Universidad Autónoma de Madrid

Gestión Aeronáutica: Estadística Teórica
Facultad Ciencias Económicas y Empresariales
Departamento de Economía Aplicada
Profesor: Santiago de la Fuente Fernández

EJERCICIOS RESUELTOS
VARIABLE ALEATORIA UNIDIMENSIONAL

Universidad Autónoma de Madrid

EJERCICIOS RESUELTOS VARIABLE ALEATORIA UNIDIMENSIONAL

Ejercicio 1.- Un experimento consiste en lanzar tres veces una moneda. Sea la variable aleatoria: X ="número de caras que se obtienen". Se pide:

a) Distribución de probabilidad de X
b) Función de distribución de X. Representación gráfica
c) Media, varianza y desviación típica de X
d) Probabilidad de que salgan a lo sumo dos caras
e) Probabilidad de que salgan al menos dos caras

Solución:

a) Espacio muestral: $\Omega = \{(c,c,c),(c,c,e),(c,e,c),(e,c,c),(c,e,e),(e,c,e),(e,e,c),(e,e,e)\}$

$X(c,c,c) = 3$ $\qquad P(X=3) = 1/8$

$X(c,c,e) = X(c,e,c) = X(e,c,c) = 2$ $\qquad P(X=2) = 3/8$

$X(c,e,e) = X(e,c,e) = X(e,e,c) = 1$ $\qquad P(X=1) = 3/8$

$X(e,e,e) = 0$ $\qquad P(X=0) = 1/8$

La distribución de probabilidad será:

$X = x_i$	$P(X = x_i) = p_i$	$x_i \, . \, p_i$	x_i^2	$x_i^2 \, . \, p_i$
$x_1 = 0$	$1/8$	0	0	0
$x_2 = 1$	$3/8$	$3/8$	1	$3/8$
$x_3 = 2$	$3/8$	$6/8$	4	$12/8$
$x_4 = 3$	$1/8$	$3/8$	9	$9/8$
	1	$12/8 = 1,5$		$24/8 = 3$

b) La función de distribución: $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i) = \sum_{x_i \leq x} p_i$

$x < 0 \qquad F(x) = P(X \leq x) = P(\phi) = 0$

$0 \leq x < 1 \qquad F(x) = P(X \leq x) = P(X = 0) = 1/8$

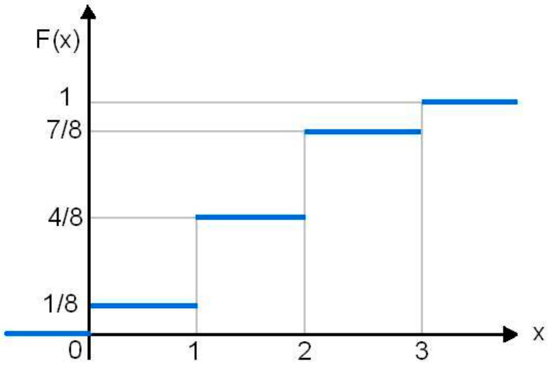
$1 \leq x < 2 \qquad F(x) = P(X \leq x) = P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) = 1/8 + 3/8 = 4/8$

$2 \leq x < 3 \qquad F(x) = P(X \leq x) = P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 1/8 + 3/8 + 3/8 = 7/8$

$x = 3 \qquad F(x) = P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 1$

$x > 3 \qquad F(x) = P(X \leq x) = P(\Omega) = 1$

$X = x_i$	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	1/8	3/8	3/8	1/8
$F(x) = P(X \leq x)$	1/8	4/8	7/8	1



$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1/8 & 0 \leq x < 1 \\ 4/8 & 1 \leq x < 2 \\ 7/8 & 2 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$$

c) Media, varianza y desviación típica de X

Media: $\alpha_1 = \mu_X = E(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i . P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{4} x_i . p_i = \dfrac{12}{8} = 1,5$

$$\alpha_2 = E(X^2) = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 . P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 . p_i = \frac{24}{8} = 3$$

Varianza: $\sigma_x^2 = E\left(X - \mu_X\right)^2 = \sum_{i=1}^{4} \left(x_i - \mu_x\right)^2 . P(X = x_i) = \alpha_2 - \alpha_1^2$

$$\sigma_x^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = 3 - 1,5^2 = 0,75$$

Desviación típica: $\sigma_x = \sqrt{0,75} = 0,87$

d) Probabilidad de que salgan a lo sumo dos caras

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$$

o bien $P(X \leq 2) = F(2) = \dfrac{7}{8}$

e) Probabilidad de que salgan al menos dos caras

$$P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

o bien $P(X \geq 2) = F(1) = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$

Ejercicio 2.- La variable aleatoria: X ="número de hijos por familia de una ciudad" tiene la siguiente distribución de probabilidad:

X	0	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	0,47	0,3	0,1	0,06	0,04	0,02	0,01

Se pide:

a) Media o esperanza matemática. Significado
b) Varianza y desviación típica
c) Si el Ayuntamiento de la ciudad paga 2000 euros por hijo e $Y = 2000.X$, ¿cuál es la distribución de probabilidad?
d) Media, varianza y desviación típica de Y

Solución:

a)

$X = x_i$	$P(X = x_i) = p_i$	$x_i \,.\, p_i$	x_i^2	$x_i^2 \,.\, p_i$
$x_1 = 0$	0,47	0	0	0
$x_2 = 1$	0,3	0,3	1	0,3
$x_3 = 2$	0,1	0,2	4	0,4
$x_4 = 3$	0,06	0,18	9	0,54
$x_5 = 4$	0,04	0,16	16	0,64
$x_6 = 5$	0,02	0,10	25	0,5
$x_7 = 6$	0,01	0,06	36	0,36
	1	1		2,74

Media: $\alpha_1 = \mu_X = E(X) = \sum_{i=1}^{7} x_i \,.\, P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{7} x_i \,.\, p_i = 1$

Si se toma al azar una familia de la ciudad, el número de hijos que se espera que tenga por término medio es uno.

b) Varianza y desviación típica

Varianza: $\sigma_x^2 = E\left(X - \mu_X\right)^2 = \sum_{i=1}^{7} \left(x_i - \mu_x\right)^2 .\, P(X = x_i) = \alpha_2 - \alpha_1^2$

$$\alpha_2 = E(X^2) = \sum_{i=1}^{7} x_i^2 \,.\, P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{7} x_i^2 \,.\, p_i = 2,74$$

$$\sigma_x^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = 2,74 - 1^2 = 1,74$$

Desviación típica: $\sigma_x = \sqrt{1,74} = 1,32$

c) Distribución de probabilidad de la variable $Y = 2000.X$

$Y = y_j$	$P(Y = y_j) = p_j$
$y_1 = 0$	0,47
$y_2 = 2.000$	0,3
$y_3 = 4.000$	0,1
$x_4 = 6.000$	0,06
$y_5 = 8.000$	0,04
$y_6 = 10.000$	0,02
$y_7 = 12.000$	0,01
	1

d) Media, varianza y desviación típica de Y

$$\mu_Y = \mu_{2000\,X} = E(2000\,.\,X) = 2000\,.\,E(X) = 2000\,.\,1 = 2.000$$

$$\sigma_Y^2 = \sigma_{2000\,X}^2 = Var(2000\,.\,X) = 2000^2\,.\,Var(X) = 2000^2\,.\,1{,}74 = 6.960.000$$

$$\sigma_Y = \sqrt{6.960.000} = 2638{,}18$$

Ejercicio 3.- Completar la ley de probabilidad , conociendo que la esperanza matemática es 1,8

X	0	1	2	3
$P(X = x_i) = p_i$	0,2	a	b	0,3

Solución:

- $\sum_{i=1}^{4} p_i = 0{,}2 + a + b + 0{,}3 = 1 \quad \mapsto \quad a + b = 0{,}5$

- $\sum_{i=1}^{4} x_i\,.\,p_i = a + 2b + 0{,}9 = 1{,}8 \quad \mapsto \quad a + 2b = 0{,}9$

Resolviendo el sistema: $\begin{cases} a + b = 0{,}5 \\ a + 2b = 0{,}9 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} b = 0{,}4 \\ a = 0{,}1 \end{matrix}$

Ejercicio 4.- Al lanzar cuatro monedas se considera el número de escudos obtenidos. De la variable aleatoria X así obtenida, se pide:

a) Ley de probabilidad. Representación gráfica

b) Función de distribución. Representación gráfica

c) Esperanza matemática y varianza

d) Mediana y moda de la distribución

e) Probabilidad de obtener más de uno y menos de tres escudos

Solución:

a) Sea X ='número de escudos en la tirada de cuatro monedas'

$$\Omega = \begin{Bmatrix} (c,c,c,c),(c,c,c,e),(c,c,e,c),(c,c,e,e),(c,e,c,c),(c,e,c,e),(e,c,c,c),(e,c,c,e), \\ (e,e,e,e),(e,e,e,c),(e,e,c,e),(e,e,c,c),(e,c,e,e),(e,c,e,c),(c,e,e,e),(c,e,e,c) \end{Bmatrix}$$

$X(c,c,c,c) = 0$ $\qquad P(X=0) = 1/16$

$X(c,c,c,e) = X(c,c,e,c) = X(c,e,c,c) = X(e,c,c,c) = 1$ $\qquad P(X=1) = 4/16$

$X(c,c,e,e) = X(c,e,c,e) = X(e,c,e,c) =$
$X(e,e,c,c) = X(e,c,e,c) = X(c,e,c,e) = 2$ $\qquad P(X=2) = 6/16$

$X(e,e,e,c) = X(e,e,c,e) = X(e,c,e,e) = X(c,e,e,e) = 3$ $\qquad P(X=3) = 4/16$

$X(e,e,e,e) = 4$ $\qquad P(X=4) = 1/16$

La ley de probabilidad o función de cuantía:

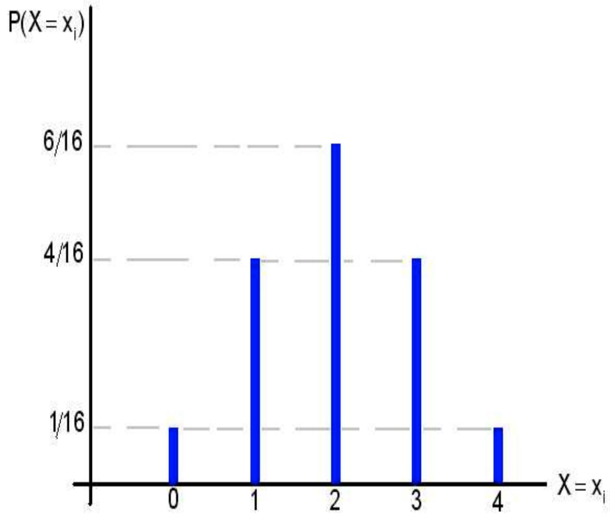
$X = x_i$	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$1/16$	$4/16$	$6/16$	$4/16$	$1/16$

b) Función de distribución:

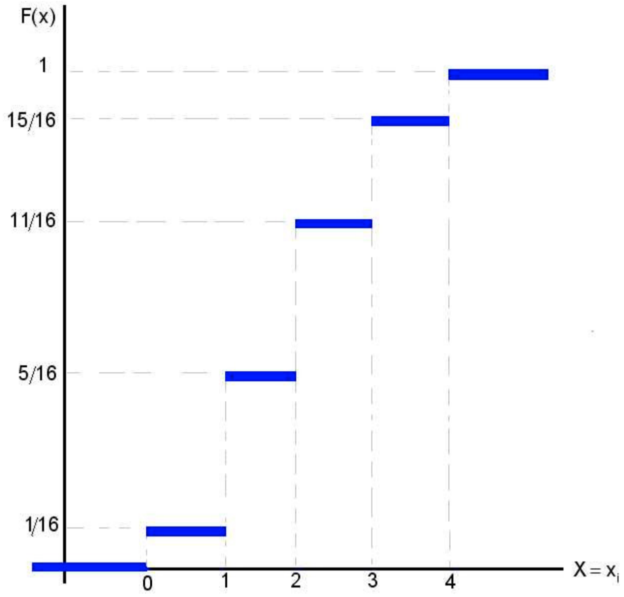
$X = x_i$	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$1/16$	$4/16$	$6/16$	$4/16$	$1/16$
$F(x) = P(X \le x)$	$1/16$	$5/16$	$11/16$	$15/16$	1

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1/16 & 0 \le x < 1 \\ 5/16 & 1 \le x < 2 \\ 11/16 & 2 \le x < 3 \\ 15/16 & 3 \le x < 4 \\ 1 & x \ge 4 \end{cases}$$

Ley de Probabilidad



Función de distribución



c) Cálculo de la esperanza matemática y varianza

$X = x_i$	0	1	2	3	4	
$P(X = x_i)$	1/16	4/16	6/16	4/16	1/16	
$x_i . P(X = x_i)$	0	4/16	12/16	12/16	4/16	$\sum_{i=1}^{5} x_i . P(X = x_i) = 2$
$x_i^2 . P(X = x_i)$	0	4/16	24/16	36/16	16/16	$\sum_{i=1}^{5} x_i^2 . P(X = x_i) = 5$

Media: $\alpha_1 = \mu_X = E(X) = \sum_{i=1}^{5} x_i . P(X = x_i) = 2$

$$\alpha_2 = E(X^2) = \sum_{i=1}^{5} x_i^2 . P(X = x_i) = 5$$

Varianza: $\sigma_X^2 = Var(X) = \alpha_2 - \alpha_1^2 = 5 - 2^2 = 1$

d) Observando la ley de probabilidad la moda $M_d = 2$

Observando la función de distribución la mediana $M_e = 2$ por ser $F(x = 2) = 11/16$ el primer valor que iguala o deja por debajo a 0,5

e) $P(1 < X < 3) = P(X = 2) = \frac{6}{16} = 0,375$ o bien $P(1 < X < 3) = F(2) - F(1) = \frac{11}{16} - \frac{5}{16} = \frac{6}{16}$

Ejercicio 5.- Calcular la media, varianza y coeficiente de variación de la variable aleatoria que tiene como función de distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 2 \\ 0,2 & 2 \le x < 4 \\ 0,55 & 4 \le x < 6 \\ 0,85 & 6 \le x < 8 \\ 1 & x \ge 8 \end{cases}$$

Solución:

La ley de probabilidad o función de cuantía:

$X = x_i$	2	4	6	8
$P(X = x_i)$	0,2	0,35	0,30	0,15

Adviértase que la función de distribución $F(x)$ es una función acumulativa, por tanto:

$P(X=2) = F(2) - F(0) = 0,2$ $\quad$ $P(X=4) = F(4) - F(2) = 0,55 - 0,2 = 0,35$

$P(X=6) = F(6) - F(4) = 0,85 - 0,55 = 0,30$ $\quad$ $P(X=8) = F(8) - F(6) = 1 - 0,85 = 0,15$

Cálculo de la esperanza matemática y varianza

$X = x_i$	2	4	6	8	
$P(X = x_i)$	0,2	0,35	0,30	0,15	
$x_i . P(X = x_i)$	0,4	1,4	1,8	1,2	$\sum_{i=1}^{4} x_i . P(X = x_i) = 4,8$
$x_i^2 . P(X = x_i)$	0, 8	5,6	10,8	9,6	$\sum_{i=1}^{4} x_i^2 . P(X = x_i) = 26,8$

Media: $\alpha_1 = \mu_X = E(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i . P(X = x_i) = 4,8$

$\alpha_2 = E(X^2) = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 . P(X = x_i) = 26,8$

Varianza: $\sigma_X^2 = Var(X) = \alpha_2 - \alpha_1^2 = 26,8 - 4,8^2 = 3,76$

Desviación típica: $\sigma_x = \sqrt{3,76} = 1,94$

Coeficiente variación: $CV = \dfrac{\sigma_x}{\mu_x} = \dfrac{1,94}{4,8} = 0,40$

Ejercicio 6.- La variable discreta X tiene como distribución de probabilidad

X	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	0,30	0,25	0,10	0,35

Se realiza un cambio de origen hacia la izquierda de dos unidades y un cambio de escala de 3 unidades.

Se pide:

a) Media y varianza de la X

b) Media, varianza y coeficiente de variación de la variable transformada por el cambio de origen

c) Media, varianza y coeficiente de variación de la variable transformada por el cambio de escala

d) Media, varianza y coeficiente de variación de la variable transformada por el cambio de origen y escala

Solución:

a)

$X = x_i$	$P(X = x_i) = p_i$	$x_i \,.\, p_i$	x_i^2	$x_i^2 \,.\, p_i$
$x_1 = 1$	0,30	0,30	1	0,30
$x_2 = 2$	0,25	0,50	4	1,00
$x_3 = 3$	0,10	0,30	9	0,90
$x_4 = 4$	0,35	1,40	16	5,60
	1	2,5		7,8

Media: $\alpha_1 = \mu_X = E(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i \,.\, P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{4} x_i \,.\, p_i = 2,5$

$$\alpha_2 = E(X^2) = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 \,.\, P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 \,.\, p_i = 7,8$$

Varianza: $\sigma_X^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = 7,8 - 2,5^2 = 1,55$

Desviación típica: $\sigma_X = \sqrt{1,55} = 1,245$

Coeficiente de variación: $CV_X = \dfrac{\sigma_X}{\mu_X} = \dfrac{1,245}{2,5} = 0,498$

b) Sea Y la variable transformada, al realizar un cambio de origen hacia la izquierda de dos unidades hay que restar 2, quedando: $Y = X - 0' = X - (-2) = X + 2$.

Media: $\mu_Y = E(Y) = E\left[X + 2\right] = E(X + 2) = E(X) + 2 \quad \mapsto \quad \mu_Y = E(Y) = 2,5 + 2 = 4,5$

Varianza: $\sigma_Y^2 = Var[X+2] = Var(X) + Var(2) = \sigma_X^2 + 0 = \sigma_X^2 \quad \mapsto \quad \sigma_Y^2 = 1,55$

Desviación típica: $\sigma_Y = \sqrt{1,55} = 1,245$

Coeficiente de variación: $CV_Y = \dfrac{\sigma_Y}{\mu_Y} = \dfrac{\sigma_X}{\mu_X + 2} = \dfrac{1,245}{4,5} = 0,28 \neq CV_x$

En consecuencia, el cambio de origen afecta a la media y, en consecuencia, al coeficiente de variación.

c) Al realizar un cambio de escala de 3 unidades, la variable transformada es $Y = \dfrac{X}{3}$

Media: $\mu_Y = E(Y) = E\left[\dfrac{X}{3}\right] = \dfrac{1}{3}.\, E(X) \quad \mapsto \quad \mu_Y = \dfrac{1}{3}.\mu_X = \dfrac{2,5}{3}$

Varianza: $\sigma_Y^2 = Var\left[\dfrac{X}{3}\right] = \dfrac{1}{9}\, .Var(X) = \dfrac{1}{9}\, .\sigma_X^2 \quad \mapsto \quad \sigma_Y^2 = \dfrac{1}{9}\, .1,55 = \dfrac{1,55}{9}$

Desviación típica: $\sigma_Y = \sqrt{\dfrac{1,55}{9}} = \dfrac{1}{3}.\sqrt{1,55} = \dfrac{1}{3}.\sigma_X$

Coeficiente de variación: $CV_Y = \dfrac{\sigma_Y}{\mu_Y} = \dfrac{\dfrac{1}{3}.\sigma_X}{\dfrac{1}{3}.\mu_X} = \dfrac{\sigma_X}{\mu_X} = CV_X = 0,498$

El cambio de escala afecta a la media y a la desviación típica de la misma forma, en consecuencia deja invariante al coeficiente de variación.

Resultados que se observan en la tabla, donde $Y = \dfrac{X}{3}$

$Y = y_j$	$P(Y = y_j) = p_j$	$y_j \,.\, p_j$	y_j^2	$y_j^2 \,.\, p_j$
$x_1 = 1/3$	0,30	0,1	$1/9$	$0,3/9$
$x_2 = 2/3$	0,25	$0,5/3$	$4/9$	$1/9$
$x_3 = 1$	0,10	0,1	1	0,1
$x_4 = 4/3$	0,35	$1,4/3$	$16/9$	$5,6/9$
	1	$2,5/3$		$7,8/9$

Media: $\alpha_1 = \mu_Y = E(Y) = \sum_{j=1}^{4} y_j .P(Y = y_j) = \sum_{j=1}^{4} y_j \,.\, p_j = \dfrac{2,5}{3} = \dfrac{1}{3}\, .\, \mu_X$

$$\alpha_2 = E(Y^2) = \sum_{j=1}^{4} y_j^2 .P(Y = y_j) = \sum_{j=1}^{4} y_j^2 \,.\, p_j = \dfrac{7,8}{9} = \dfrac{1}{9}\, .\, E(Y^2)$$

Varianza: $\sigma_Y^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = \dfrac{7,8}{9} - \left(\dfrac{2,5}{3}\right)^2 = \dfrac{1}{9}\, .\, \sigma_X^2 = \dfrac{1,55}{9}$

Desviación típica: $\sigma_Y = \sqrt{\dfrac{1,55}{9}} = \dfrac{1}{3}.\sqrt{1,55} = \dfrac{1}{3}.\sigma_X$

Coeficiente de variación: $CV_Y = \dfrac{\sigma_Y}{\mu_Y} = \dfrac{\frac{1}{3}.\sigma_X}{\frac{1}{3}.\mu_X} = \dfrac{\sigma_X}{\mu_X} = CV_X = 0,498$

d) Al realizar simultáneamente un cambio de origen de 2 unidades a la izquierda y un cambio de escala de 3 unidades, la variable transformada es $Y = \dfrac{X+2}{3}$

Media: $\mu_Y = E(Y) = E\left[\dfrac{X+2}{3}\right] = \dfrac{1}{3}\,.\,E(X+2) = \dfrac{1}{3}.\,E(X) + \dfrac{2}{3}$

con lo que, $\mu_Y = E(Y) = \dfrac{1}{3}.\,E(X) + \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}\,.\,2,5 + \dfrac{2}{3} = \dfrac{4,5}{3} = 1,5$

Varianza: $\sigma_Y^2 = Var(Y) = Var\left[\dfrac{X+2}{3}\right] = \dfrac{1}{9}\,.\,Var(X+2) = \dfrac{1}{9}.\,Var(X) = \dfrac{1}{9}.\,\sigma_X^2$

Desviación típica: $\sigma_Y = \sqrt{\dfrac{1,55}{9}} = \dfrac{1}{3}.\sqrt{1,55} = \dfrac{1}{3}.\sigma_X$

Coeficiente de variación: $CV_Y = \dfrac{\sigma_Y}{\mu_Y} = \dfrac{\frac{1}{3}.\sigma_X}{\frac{1}{3}.\mu_X + \frac{2}{3}} = \dfrac{\sigma_X}{\mu_X + 2} = \dfrac{1,245}{4,5} = 0,28 \neq CV_x$

El cambio de origen y de escala afecta a la media y desviación típica de distinta forma, en consecuencia también queda afectado el coeficiente de variación

.

Resultados que se observan en la tabla, donde $Y = \dfrac{X+2}{3}$

$Y = y_j$	$P(Y = y_j) = p_j$	$y_j\,.\,p_j$	y_j^2	$y_j^2\,.\,p_j$
$x_1 = 1$	0,30	0,30	1	0,30
$x_2 = 4/3$	0,25	$1/3$	$16/9$	$4/9$
$x_3 = 5/3$	0,10	$0,5/3$	$25/9$	$2,5/9$
$x_4 = 2$	0,35	0,70	4	1,4
	1	$4,5/3$		$21,8/9$

Media: $\alpha_1 = \mu_Y = E(Y) = \sum_{j=1}^{4} y_j.P(Y = y_j) = \sum_{j=1}^{4} y_j\,.\,p_j = \dfrac{4,5}{3} = 1,5$

$$\alpha_2 = E(Y^2) = \sum_{j=1}^{4} y_j^2.P(Y = y_j) = \sum_{j=1}^{4} y_j^2\,.\,p_j = \dfrac{21,8}{9}$$

Varianza: $\sigma_Y^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = \dfrac{21{,}8}{9} - \left(\dfrac{4{,}5}{3}\right)^2 = \dfrac{1}{9} \,.\, \sigma_X^2 = \dfrac{1{,}55}{9}$

Desviación típica: $\sigma_Y = \sqrt{\dfrac{1{,}55}{9}} = \dfrac{1}{3}.\sqrt{1{,}55} = \dfrac{1}{3}.\sigma_X$

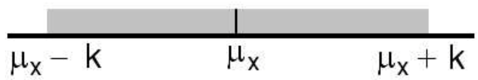
Coeficiente de variación: $CV_Y = \dfrac{\sigma_Y}{\mu_Y} = \dfrac{\frac{1}{3} \,.\, \sigma_X}{\frac{1}{3} \,.\, 4{,}5} = \dfrac{\sigma_X}{4{,}5} = \dfrac{1{,}245}{4{,}5} = 0{,}28 \neq CV_x$

Ejercicio 7.- En un cine de verano hay instaladas 800 sillas, sabiendo que el número de asistentes es una variable aleatoria de media 600 y desviación típica 100.
¿Qué probabilidad existe de que el número de personas que vaya al cine un día cualquiera sea superior al número de sillas instaladas?

Solución:

Sea la variable aleatoria X = "número de sillas del cine", donde $\mu = 600$, $\sigma = 100$

$P\left[X > 800\right] < P\left[\,\left|X - \mu_x\right| > k\,\right] \leq \dfrac{\sigma^2}{k^2}$



$\mu_x + k = 800 \quad \mapsto \quad k = 800 - 600 = 200$

$P\left[X > 800\right] \leq \dfrac{100^2}{200^2} = \dfrac{1}{4} = 0{,}25$

Ejercicio 8.- La variable discreta X tiene como distribución de probabilidad

$$P(X = k) = \frac{1}{10} \quad \text{siendo} \quad k = 2, 3, \cdots, 11$$

Se pide:

a) Función de distribución
b) $P(X > 7)$
c) $P(X < 5)$
d) $P(3 \leq X < 7)$

Solución:

a) $F(x) = P(X \leq x) = \dfrac{x-1}{10}$ siendo $x = 2, 3, \cdots, 11$

Adviértase que entre dos valores consecutivos de la variable, la función de distribución toma el valor menor.

b) $P(X > 7) = 1 - P(X \leq 7) = 1 - F(7) = 1 - \dfrac{6}{10} = \dfrac{4}{10} = 0{,}4$

o bien, $P(X > 7) = P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) + P(X = 11) = \dfrac{4}{10} = 0,4$

c) $P(X < 5) = F(5) = \dfrac{4}{10} = 0,4$

o bien, $P(X < 5) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = \dfrac{4}{10} = 0,4$

d) $P(3 \le X < 7) = F(7) - F(3) = \dfrac{6}{10} - \dfrac{2}{10} = \dfrac{4}{10} = 0,4$

o bien, $P(3 \le X < 7) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) = \dfrac{4}{10} = 0,4$

Ejercicio 9.- Se desea conocer el número de automóviles que se deben poner a la venta durante un periodo determinado para que se satisfaga una demanda media de 300 unidades con una desviación típica de 100 unidades, con una probabilidad no inferior al 75%.

Solución:

Sea la variable aleatoria X = "número de automóviles a la venta"

$\mu = 300$, $\sigma = 100$

Según Chebyshev:

$$P\Big[\,|X - \mu_x| \le k\,\Big] \ge 1 - \frac{\sigma^2}{k^2} \quad \longrightarrow \quad P\big[\,\mu_x - k \le X \le \mu_x + k\big] \ge 1 - \frac{\sigma^2}{k^2}$$

$$P\big[\,300 - k \le X \le 300 + k\big] \ge \overbrace{1 - \frac{100^2}{k^2}}^{0,75}$$

$$0,75 = 1 - \frac{100^2}{k^2} \quad \mapsto \quad \frac{100^2}{k^2} = 0,25 \quad \mapsto \quad k^2 = \frac{100^2}{0,25} \quad \mapsto \quad k = \sqrt{\frac{100^2}{0,25}} = 200$$

$300 + k = 300 + 200 = 500$ automóviles

Ejercicio 10.- La demanda media de un producto es de 100 unidades con una desviación típica de 40 unidades. Calcular la cantidad del producto que se debe tener a la venta para satisfacer la demanda de forma que puedan ser atendidos al menos el 80% de los clientes.

Solución:

$\mu = 100$, $\sigma = 40$

Según Chebyshev:

$$P\left[\,|X-\mu_x| \le k\,\right] \ge 1-\frac{\sigma^2}{k^2} \longrightarrow P\left[\,\mu_x - k \le X \le \mu_x + k\right] \ge 1-\frac{\sigma^2}{k^2}$$

$$P\left[\,100-k \le X \le 100+k\right] \ge \overbrace{1-\frac{40^2}{k^2}}^{0{,}80}$$

$$0{,}80 = 1-\frac{40^2}{k^2} \mapsto \frac{40^2}{k^2} = 0{,}20 \mapsto k^2 = \frac{40^2}{0{,}20} \mapsto k = \sqrt{\frac{40^2}{0{,}20}} = 89{,}44$$

Se deben poner a la venta 90 unidades.

Ejercicio 11.- La variable X ="número de centímetros a que un dardo queda del centro de la diana" al ser tirado por una persona tiene como función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} k & 0 < x < 10 \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

Se pide:

a) Hallar k para que f(x) sea función de densidad. Representarla

b) Hallar la función de distribución. Representarla

c) Media, varianza y desviación típica

d) $P(X \le 1)$

e) Probabilidad de acertar en la diana

Solución:

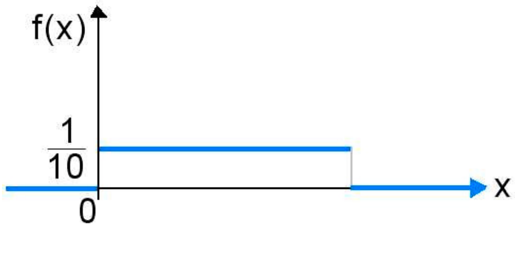
a) Para que f(x) sea función de densidad debe verificar:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{10} f(x)\,dx + \int_{10}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{0}^{10} f(x)\,dx$$

la primera y tercera integral son cero al ser $f(x) = 0$ en esos intervalos.

$$1 = \int_{0}^{10} k\,dx = k\int_{0}^{10} dx = 10\left[x\right]_0^{10} = 10k \mapsto k = \frac{1}{10}$$

En consecuencia, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{10} & 0 < x < 10 \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$



b) La función de distribución se define $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

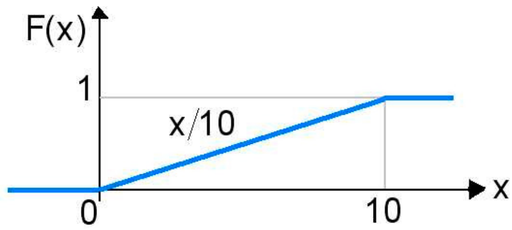
$x < 0 \qquad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = 0$

$0 \le x \le 10 \qquad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{x} f(t)\,dt = \int_{0}^{x} \frac{1}{10}\,dt = \frac{x}{10}$

$x > 10 \qquad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{10} f(t)\,dt + \int_{10}^{x} f(t)\,dt = \int_{0}^{10} \frac{1}{10}\,dt = 1$

En consecuencia,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{x}{10} & 0 \le x \le 10 \\ 1 & x > 10 \end{cases}$$



c) Media

$$\alpha_1 = \mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx = \int_{0}^{10} x\,.\frac{1}{10}.\,dx = \frac{1}{10}\int_{0}^{10} x\,dx = \frac{1}{10}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{10} = 5\,\text{cm}$$

Varianza: $\sigma_X^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2$

$$\alpha_2 = E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\,f(x)\,dx = \int_{0}^{10} x^2\,.\frac{1}{10}.\,dx = \frac{1}{10}\int_{0}^{10} x^2\,dx = \frac{1}{10}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{10} = \frac{1}{10}\left[\frac{1000}{3} - 0\right] = \frac{100}{3}$$

$$\sigma_X^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = \frac{100}{3} - 5^2 = \frac{25}{3}\ \text{cm}^2$$

Desviación típica: $\sigma_X = \sqrt{\frac{25}{3}} = 2{,}9\ \text{cm}$

d) $P(X \le 1) = F(1) = \frac{1}{10}$

o también, $P(X \le 1) = \int_{0}^{1} \frac{1}{10}\,dx = \frac{1}{10}\int_{0}^{1} dx = \frac{1}{10}\,[x]_0^1 = \frac{1}{10}$

e) Probabilidad de acertar en la diana: $P(X = 0) = 0$ por ser una variable continua

$$P(X = 0) = \int_{0}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{0} \frac{1}{10}\,dx = \frac{1}{10}\int_{0}^{0} dx = 0$$

Ejercicio 12.- Se ha verificado que la variable X ="peso en kilos de los niños al nacer" es una variable aleatoria continua con función de densidad

$$f(x)=\begin{cases} k\,x & 2\le x\le 4 \\ 0 & \text{en otros casos}\end{cases}$$

Se pide:

a) Hallar k para que f(x) sea función de densidad. Representarla

b) Hallar la función de distribución. Representarla

c) Media, varianza y desviación típica

d) Probabilidad de que un niño elegido al azar pese más de 3 kilos

e) Probabilidad de que pese entre 2 y 3,5 kilos

f) Qué debe pesar un niño para tener un peso igual o inferior al 90% de los niños

Solución:

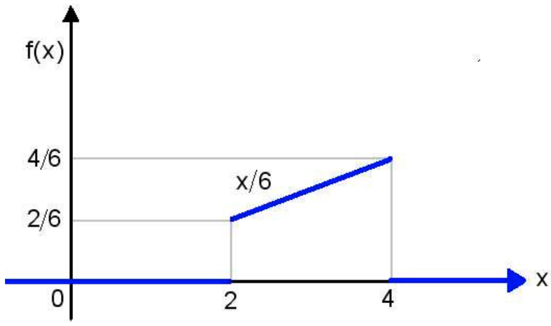
a) Para que f(x) sea función de densidad debe verificar:

$$1=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{2} f(x)\,dx+\int_{2}^{4} f(x)\,dx+\int_{4}^{\infty} f(x)\,dx=\int_{2}^{4} f(x)\,dx$$

La primera y tercera integral son cero al ser $f(x)=0$ en esos intervalos.

$$1=\int_2^4 f(x)\,dx=\int_2^4 k\,x\,dx=k\int_2^4 x\,dx=k\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^4=k\left[\frac{16}{2}-\frac{4}{2}\right]=6k \quad \mapsto \quad k=\frac{1}{6}$$

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{6} & 2\le x\le 4 \\ 0 & \text{en otros casos}\end{cases}$$



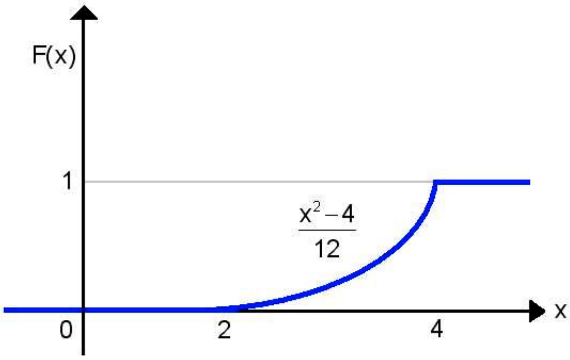
b) La función de distribución se define $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

$x<2 \qquad F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=0$

$2\le x\le 4 \qquad F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=\int_{2}^{x} f(t)\,dt=\int_2^x \frac{t}{6}\,dt=\frac{1}{6}\left[\frac{t^2}{2}\right]_2^x=\frac{1}{6}\left[\frac{x^2-4}{2}\right]=\frac{x^2-4}{12}$

$x>4 \qquad F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=\int_{2}^{4} f(t)\,dt+\int_{4}^{x} f(t)\,dt=\int_2^4 \frac{t}{6}\,dt=\frac{1}{6}\left[\frac{t^2}{2}\right]_2^4=\frac{1}{6}\left[\frac{16-4}{2}\right]=1$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 2 \\ \dfrac{x^2-4}{12} & 2 \le x \le 4 \\ 1 & x > 4 \end{cases}$$



c) Media

$$\alpha_1 = \mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx = \int_2^4 x\,.\frac{x}{6}.\, dx = \frac{1}{6}\int_2^4 x^2\, dx = \frac{1}{6}\left[\frac{x^3}{3}\right]_2^4 = \frac{1}{6}\left[\frac{64}{3} - \frac{8}{3}\right] = \frac{56}{18} = 3{,}1 \text{ kilos}$$

Varianza: $\sigma_X^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2$

$$\alpha_2 = E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, f(x)\, dx = \int_2^4 x^2\,.\frac{x}{6}.\, dx = \frac{1}{6}\int_2^4 x^3\, dx = \frac{1}{6}\left[\frac{x^4}{4}\right]_2^4 = \frac{1}{6}\left[\frac{256}{4} - \frac{16}{4}\right] = 10 \text{ kilos}^2$$

$$\sigma_X^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = 10 - 3{,}1^2 = 0{,}39 \text{ kilos}^2$$

Desviación típica: $\sigma_X = \sqrt{0{,}39} = 0{,}62$ kilos

d) $P(X > 3) = 1 - P(X \le 3) = 1 - F(3) = 1 - \dfrac{3^2-4}{12} = 1 - \dfrac{5}{12} = \dfrac{7}{12} = 0{,}58$

o también, $P(X > 3) = \displaystyle\int_3^4 f(x)\, dx = \int_3^4 \frac{x}{6} dx = \frac{1}{6}\left[\frac{x^2}{2}\right]_3^4 = \frac{1}{6}\left(8 - \frac{9}{2}\right) = \frac{7}{12} = 0{,}58$

e) $P(2 \le X \le 3{,}5) = F(3{,}5) - F(2) = \dfrac{3{,}5^2-4}{12} - 0 = 0{,}6875$

$$P(2 \le X \le 3{,}5) = \int_2^{3,5} f(x)\, dx = \int_2^{3,5} \frac{x}{6} dx = \frac{1}{6}\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^{3,5} = \frac{1}{6}\left(\frac{12{,}25}{2} - \frac{4}{2}\right) = \frac{8{,}25}{12} = 0{,}6875$$

f) Sea k el peso del niño, se tiene:

$$F(k) = P(X \le k) = 0{,}9 \longrightarrow \frac{k^2-4}{12} = 0{,}9 \Rightarrow k^2 - 4 = 10{,}8 \Rightarrow k^2 = 14{,}8$$

$k = \sqrt{14{,}8} = 3{,}85$, es decir, el niño debe pesar 3,85 kilos para tener para tener al 90% de los niños con un peso igual o inferior.

Ejercicio 13.- Gran número de fenómenos aeronáuticos tienen asociada una variable aleatoria con ley de probabilidad:

$$f(x) = \begin{cases} k\,e^{-kx} & 0 < x < \infty \quad k > 0 \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

Se pide:

a) ¿Puede tomar k cualquier valor?

b) Para $k = 0,1$ representar la función de densidad, la función de distribución y su gráfica

c) Siendo $k = 0,1$ hallar $P(X > 10)$

d) Para $k = 0,1$ calcular $P(50 < X \leq 100)$

Solución:

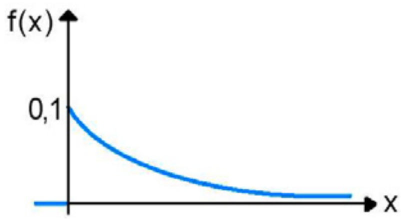
a) Para que f(x) sea función de densidad debe verificar:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{0}^{\infty} k\,e^{-kx}\,dx = -\int_{0}^{\infty} -k\,e^{-kx}\,dx = -\left[e^{-kx}\right]_0^{\infty} = -\left[\frac{1}{e^{kx}}\right]_0^{\infty} = 1$$

La función de densidad no depende del valor del parámetro k, pudiendo tomar éste cualquier valor positivo.

b) La función de densidad para $k = 0,1$ será:

$$f(x) = \begin{cases} 0,1 \,.\, e^{-0,1\,x} & x > 0 \\ 0 & \text{otros casos} \end{cases}$$



La función de distribución se define $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

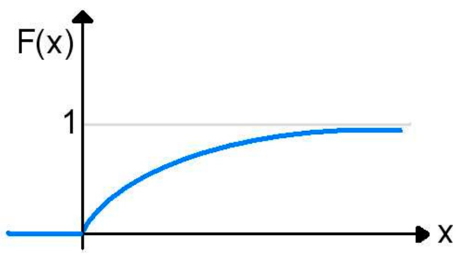
$x \leq 0 \qquad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = 0$

$x > 0$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{x} f(t)\,dt = \int_{0}^{x} 0,1\,.\,e^{-0,1t}\,dt = -\int_{0}^{x} -0,1\,.\,e^{-0,1t}\,dt =$$

$$= -\left[e^{-0,1t}\right]_0^{x} = -\left[\frac{1}{e^{0,1t}}\right]_0^{x} = -\left(\frac{1}{e^{0,1\,x}} - 1\right) = 1 - e^{-0,1\,x}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 - e^{-0,1\,x} & x > 0 \end{cases}$$



c) $P(X > 10) = 1 - P(X \le 10) = 1 - F(10) = 1 - \left(1 - e^{-0,1.10}\right) = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$

d) $P(50 < X \le 100) = F(100) - F(50) = \left(1 - e^{-0,1.100}\right) - \left(1 - e^{-0,1.50}\right) = -e^{-10} + e^{-5} = \dfrac{1}{e^5} - \dfrac{1}{e^{10}}$

Ejercicio 14.- Una variable aleatoria continua X tiene por función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & 0 \le x < 1 \\ x - 1 & 1 \le x \le 2 \\ 0 & \text{otros casos} \end{cases}$$

Se pide:

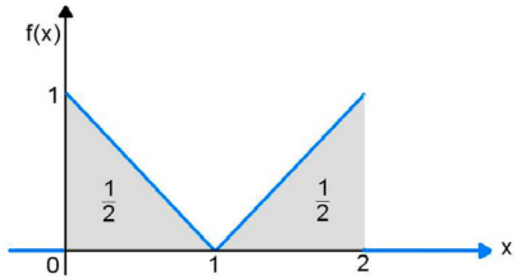
a) Representa la función de densidad

b) Hallar la función de distribución y su gráfica

c) $P(0 \le X \le 1) \qquad P(-2 \le X \le 2) \qquad P\left(\dfrac{1}{2} \le X < \infty\right)$

Solución:

a)



Se observa que el área encerrada es igual a la unidad

b) La función de distribución se define $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

$x < 0 \qquad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = 0$

$0 \le x < 1 \qquad F(x) = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{x} f(t)\,dt = \int_{0}^{x} (1-t)\,dt = \left[t - \dfrac{t^2}{2}\right]_0^x = x - \dfrac{x^2}{2}$

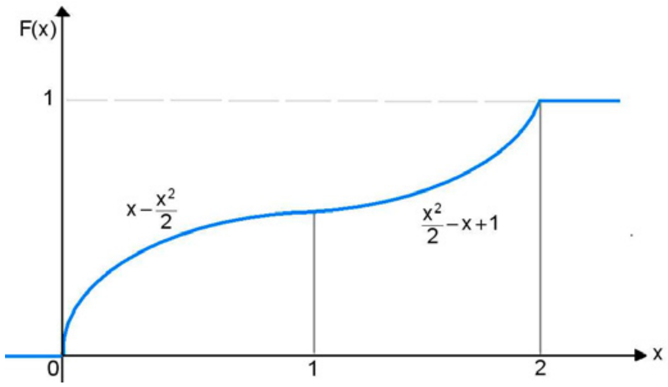
$1 \le x \le 2$

$$F(x) = \cancel{\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt} + \int_{0}^{1} f(t)\,dt + \int_{1}^{x} f(t)\,dt = \int_{0}^{1} (1-t)\,dt + \int_{1}^{x} (t-1)\,dt =$$

$$= \left[t - \frac{t^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{t^2}{2} - t\right]_1^x = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left[\left(\frac{x^2}{2} - x\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right)\right] = \frac{x^2}{2} - x + 1$$

$x > 2 \qquad F(x) = \int_{0}^{1} (1-t)\,dt + \int_{1}^{2} (t-1)\,dt = \left[t - \dfrac{t^2}{2}\right]_0^1 + \left[\dfrac{t^2}{2} - t\right]_1^2 = 1$

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ x-\dfrac{x^2}{2} & 0\le x<1\\ \dfrac{x^2}{2}-x+1 & 1\le x\le 2\\ 1 & x>2\end{cases}$$



c) $P(0\le X\le 1)$ $\quad P(-2\le X\le 2)$ $\quad P\left(\dfrac{1}{2}\le X<\infty\right)$

$$P(0\le X\le 1)=F(1)-F(0)=\left(\frac{1}{2}-1+1\right)-0=\frac{1}{2}$$

$$P(-2\le X\le 2)=F(2)-F(-2)=\left(\frac{4}{2}-2+1\right)-0=1$$

$$P\left(\frac{1}{2}\le X<\infty\right)=F(\infty)-F\left(\frac{1}{2}\right)=1-\left(\frac{1}{2}-\frac{1/4}{2}\right)=\frac{5}{8}$$

Ejercicio 15.- Una variable aleatoria continua X tiene por función de distribución:

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \dfrac{x^2}{2} & 0\le x\le 1\\ 2x-\dfrac{x^2}{2}-1 & 1<x\le 2\\ 1 & x>2\end{cases}$$

Se pide:

a) Hallar la función de distribución y representarla

b) Media, varianza, desviación típica y coeficiente de variación

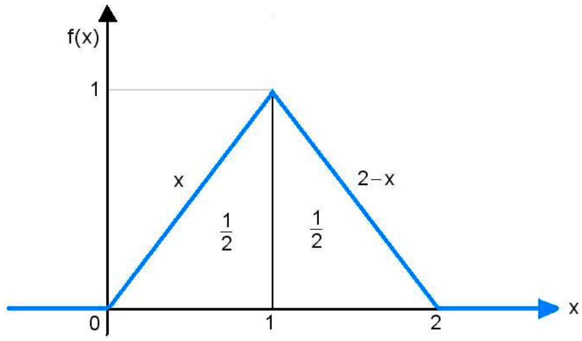
c) $P\left(\dfrac{1}{2}<X\le\dfrac{3}{2}\right)$

Solución:

a) La función de densidad es la derivada de la función de distribución en los puntos donde exista la derivada, entonces:

$$f(x)=\frac{dF(x)}{dx}=\begin{cases}0 & x<0\\ x & 0\le x\le 1\\ 2-x & 1<x\le 2\\ 0 & x>2\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} x & 0\le x\le 1 \\ 2-x & 1< x\le 2 \\ 0 & \text{otros valores}\end{cases}$$



b) Media

$$\alpha_1=\mu_X=E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx=\int_0^1 x.x.\,dx+\int_1^2 x.(2-x).\,dx=\int_0^1 x^2\,dx+\int_1^2 (2x-x^2).dx=$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1+\left[x^2-\frac{x^3}{3}\right]_1^2=\frac{1}{3}+\left(4-\frac{8}{3}\right)-\left(1-\frac{1}{3}\right)=1$$

Varianza: $\sigma_X^2=\alpha_2-\alpha_1^2$

$$\alpha_2=E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2\,f(x)\,dx=\int_0^1 x^2.x.\,dx+\int_1^2 x^2.(2-x).\,dx=\int_0^1 x^3\,dx+\int_1^2 (2x^2-x^3).dx=$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1+\left[\frac{2x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_1^2=\frac{1}{4}+\left(\frac{16}{3}-\frac{16}{4}\right)-\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\right)=\frac{14}{12}=\frac{7}{6}$$

$$\sigma_X^2=\alpha_2-\alpha_1^2=\frac{7}{6}-1^2=\frac{1}{6}$$

Desviación típica: $\sigma_X=\sqrt{\frac{1}{6}}=0,41$

Coeficiente variación: $CV_X=\frac{\sigma_X}{\mu_X}=\frac{0,41}{1}=0,41$

c) $P\left(\frac{1}{2}<X\le\frac{3}{2}\right)=F\left(\frac{3}{2}\right)-F\left(\frac{1}{2}\right)=\left(2.\frac{3}{2}-\frac{(3/2)^2}{2}-1\right)-\left(\frac{(1/2)^2}{2}\right)=3-\frac{9}{8}-1-\frac{1}{8}=\frac{3}{4}=0,75$

Ejercicio 16.- Una variable aleatoria continua X tiene por función de distribución:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<1 \\ x-1 & 1\le x<2 \\ 1 & x\ge 2 \end{cases}$$

a) Calcular la función de densidad o función de cuantía

b) Calcular la media, mediana y coeficiente de variación

Solución:

a) La función de densidad o función de cuantía es la derivada de la función de distribución en los puntos donde exista la derivada, entonces:

$$f(x)=\frac{dF(x)}{dx}=\begin{cases} 0 & x<1 \\ 1 & 1\le x<2 \\ 0 & x\ge 2 \end{cases} \longrightarrow \quad f(x)=\begin{cases} 1 & 1\le x<2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

b) Media: $\alpha_1=\mu_X=E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx=\int_1^2 x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}=1{,}5$

• La Mediana de una distribución es el valor que deja el 50% de la distribución a la derecha y el otro 50% a la izquierda, por lo que:

$$\begin{cases} F(M_e)=0{,}5 \;\Rightarrow\; M_e-1=0{,}5 \;\Rightarrow\; M_e=1{,}5 \\ \int_1^{M_e} f(x)=0{,}5 \;\Rightarrow\; \int_1^{M_e} dx=0{,}5 \;\Rightarrow [x]_1^{M_e}=0{,}5 \;\Rightarrow\; M_e-1=0{,}5 \;\Rightarrow\; M_e=1{,}5 \end{cases}$$

• Coeficiente de variación: $CV_X=\frac{\sigma_X}{\mu_X}$

$$\alpha_2=E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2\,f(x)\,dx=\int_1^2 x^2\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$$

$$\sigma_X^2=\alpha_2-\alpha_1^2=\frac{7}{3}-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{7}{3}-\frac{9}{4}=\frac{1}{12} \quad\Rightarrow\quad \sigma_x=\sqrt{\frac{1}{12}}=0{,}08$$

$$CV_X=\frac{\sigma_X}{\mu_X}=\frac{0{,}08}{1{,}5}=0{,}05$$

Ejercicio 17.- La función de densidad de una variable aleatoria es:

$$f(x)=\begin{cases} a\,x^2+b & 0<x<2 \\ 0 & \text{en el resto}\end{cases} \qquad \text{sabiendo que } P\left[\frac{1}{2}<x<1\right]=0{,}1666\,.$$

Determinar a y b.

Solución:

Hay que calcular dos parámetros (a y b), por lo que se necesitan dos ecuaciones:

- Por ser función de densidad:

$$1=\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^2 (a\,x^2+b)\,dx=\left[a\frac{x^3}{3}+b\,x\right]_0^2=\frac{8\,a}{3}+2b \quad \mapsto \quad 8\,a+6\,b=3$$

- $P\left[\frac{1}{2}\le x\le 1\right]=\int_{1/2}^1 f(x)\,dx=\int_{1/2}^1 (a\,x^2+b)\,dx=\left[a\frac{x^3}{3}+b\,x\right]_{1/2}^1=0{,}1666$, con lo que:

$$\left[a\frac{x^3}{3}+b\,x\right]_{1/2}^1=\left[\frac{a}{3}+b\right]-\left[\frac{a}{24}+\frac{b}{2}\right]=\frac{7a}{24}+\frac{b}{2}=0{,}1666 \quad \mapsto \quad 7a+12\,b\approx 4$$

en consecuencia,

$$\left.\begin{aligned} 8\,a+6\,b&=3 \\ 7a+12\,b&=4\end{aligned}\right\} \;\mapsto\; \left.\begin{aligned} 16\,a+12\,b&=6 \\ 7a+12\,b&=4\end{aligned}\right\} \;\rightarrow\; \boxed{a=\frac{2}{9}=0{,}22} \quad 6\,b=3-\frac{16}{9}=\frac{11}{9} \;\mapsto\; \boxed{b=\frac{11}{54}=0{,}20}$$

Ejercicio 18.- La función de distribución asociada a la producción de una máquina, en miles de unidades, es del tipo:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x(2-x) & 0 \le x \le k \\ 1 & x > k \end{cases}$$

a) Determinar k para que sea función de distribución

b) Hallar la función de densidad

c) Calcular la media, mediana. moda y varianza de la producción

d) Hallar $P(X < 0{,}5)$ y $P(X > 0{,}25)$

Solución:

a) Para que sea función de distribución se debe verificar:

$$1 = \lim_{x \to k^+} F(x) = \lim_{x \to k^-} F(x) \quad \mapsto \quad \lim_{x \to k^-} x(x-2) = k(k-2) = 1 \quad \mapsto \quad k^2 - 2k + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 1$$

En consecuencia, la función de distribución es: $F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x(2-x) & 0 \le x \le 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$

b) La función de densidad o función de cuantía es la derivada de la función de distribución en los puntos donde exista la derivada.

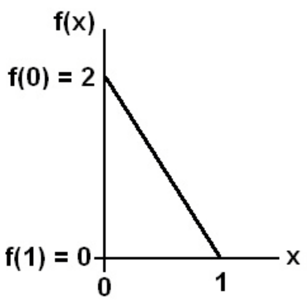
$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 2-2x & 0 \le x \le 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases} \quad \longrightarrow \quad f(x) = \begin{cases} 2-2x & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

c) Media:

$$\alpha_1 = \mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx = \int_0^1 x\,(2-2x)\, dx = \int_0^1 (2x - 2x^2)\, dx = \left[x^2 - \frac{2x^3}{3} \right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

• Para calcular la Moda hay que ver el valor que hace mínima la función de densidad o de cuantía, es decir:

$$f(x) = \begin{cases} 2-2x & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad \mapsto \quad f'(x) = \begin{cases} -2 & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$



La derivada de la función de cuantía $f'(x) = -2 < 0$, por lo que se trata de una función decreciente y toma el valor máximo en el extremo del intervalo $[0, 1]$, por tanto la moda $M_d = 0$

$f(1) = 0 \le f(x) \le f(0) = 1$, con lo que $M_d = 0$

• La Mediana de una distribución es el valor que deja el 50% de la distribución a la derecha y el otro 50% a la izquierda, por lo que:

$$F(M_e) = 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad M_e\left(2 - M_e\right) = 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad M_e^2 - 2M_e + 0{,}5 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2M_e^2 - 4M_e + 1 = 0$$

$$2M_e^2 - 4M_e + 1 = 0 \quad \mapsto \quad M_e = \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{4} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{4} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

De las dos soluciones se rechaza aquella que es mayor que 1, por lo que la Mediana es:

$$M_e == 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

• La Varianza de la producción: $\sigma_X^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2$

$$\alpha_2 = E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, f(x)\, dx = \int_0^1 x^2\,(2 - 2\,x)dx = \left[\frac{2\,x^3}{3} - \frac{x^4}{2}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$\sigma_X^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}$$

d) Función de distribución $F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x\,(2-x) & 0 \le x \le 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$

$$P(X < 0{,}5) = P(X \le 0{,}5) = F(0{,}5) = 0{,}5\,(2 - 0{,}5) = 0{,}75$$

$$P(X > 0{,}25) = 1 - P(X \le 0{,}25) = 1 - F(0{,}25) = 1 - 0{,}25\,(2 - 0{,}25) = 0{,}5625$$

También mediante la función de cuantía: $f(x) = \begin{cases} 2 - 2\,x & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

$$P(X < 0{,}5) = \int_0^{0{,}5} f(x)\,dx = \int_0^{0{,}5} (2 - 2\,x)\,dx = \left[2\,x - x^2\right]_0^{0{,}5} = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$$

$$P(X > 0{,}25) = \int_{0{,}25}^{1} f(x)\,dx = \int_{0{,}25}^{1} (2 - 2\,x)\,dx = \left[2\,x - x^2\right]_{0{,}25}^{1} = 1 - (0{,}5 - 0{,}0625) = 0{,}5625$$

Ejercicio 19.- Dada la función $f(x) = e^{-2x}$

a) Comprobar si puede ser función de densidad de una variable aleatoria X cuando su campo de variación es el intervalo $x \geq 0$

b) En caso de que no lo pueda ser, qué modificaciones habría que introducir para que lo fuera.

Solución:

a) Para que sea función de densidad, debe cumplir dos condiciones en el campo de variación de la variable aleatoria:

- $f(x)$ no puede ser negativa
- La integral de $f(x)$ en el campo de variación es 1

- $f(x) = e^{-2x} \geq 0 \quad \mapsto \quad L\, e^{-2x} \geq L\,0 \quad \Rightarrow \quad -2x > -\infty \quad \Rightarrow \quad x < \infty$ es positiva

- $\int_0^{\infty} e^{-2x}\, dx = \left[-\frac{1}{2}\, e^{-2x}\right]_0^{\infty} = \left[0 + \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2} \neq 1$. No se cumple, luego la función dada no es de densidad en el intervalo.

b) Para que sea función de densidad, se define $f(x) = k\, e^{-2x}$

$$\int_0^{\infty} k\, e^{-2x}\, dx = k \int_0^{\infty} e^{-2x}\, dx = k\left[-\frac{1}{2}\, e^{-2x}\right]_0^{\infty} = \frac{k}{2} = 1 \mapsto k = 2$$

En consecuencia, $f(x) = 2\, e^{-2x}$

Ejercicio 20.- Dada la variable aleatoria continua X con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} k\,(x+2) & 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Hallar:

a) El valor de k para que sea realmente una función de densidad

b) La función de distribución

c) La varianza

d) $P(2 \leq X \leq 3)$

Solución:

a) $\int_0^4 f(x)\, dx = 1 \quad \mapsto \quad \int_0^4 k\,(x+2)\, dx = k \int_0^4 (x+2)\, dx = k\left[\frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^4 = 16k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{16}$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{16}(x+2) & 0\le x\le 4\\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}$$

b) Función de distribución: $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$, en este caso:

$x<0 \qquad F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=\int_{-\infty}^{x} 0\,dt=0$

$0\le x<4 \qquad F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=\int_{-\infty}^{x} 0\,dt+\int_{0}^{x}\frac{1}{16}(t+2)\,dt=\frac{1}{16}\int_{0}^{x}(t+2)\,dt=\frac{1}{16}\left[\frac{t^2}{2}+2t\right]_0^x=$

$$=\frac{x^2+4x}{32}$$

$x\ge 4 \qquad F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=\int_{-\infty}^{x} 0\,dt+\int_{0}^{4}\frac{1}{16}(t+2)\,dt+\int_{4}^{x}0\,dt=\frac{1}{16}\left[\frac{t^2}{2}+2t\right]_0^4=1$

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \dfrac{x^2+4x}{32} & 0\le x<4\\ 1 & x\ge 4\end{cases}$$

c) Para calcular la varianza: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{16}(x+2) & 0\le x\le 4\\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}$

$$\alpha_1=\mu=E[X]=\int_0^4 x\,f(x)\,dx=\int_0^4 x\left[\frac{1}{16}(x+2)\right]dx=\frac{1}{16}\int_0^4 (x^2+2x)\,dx=\frac{1}{16}\left[\frac{x^3}{3}+x^2\right]_0^4=$$

$$=\frac{1}{16}\left[\frac{112}{3}\right]=\frac{7}{3}$$

$$\alpha_2=E\left[X^2\right]=\int_0^4 x^2\,f(x)\,dx=\int_0^4 x^2\left[\frac{1}{16}(x+2)\right]dx=\frac{1}{16}\int_0^4 (x^3+2x^2)\,dx=\frac{1}{16}\left[\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}\right]_0^4=$$

$$=\frac{1}{16}\left[64+\frac{128}{3}\right]=\frac{20}{3}$$

$$\sigma_X^2=\mathrm{Var}(X)=\alpha_2-(\alpha_1)^2 \quad\Rightarrow\quad \sigma_X^2=\frac{20}{3}-\left(\frac{7}{3}\right)^2=\frac{11}{9}$$

d) $F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \dfrac{x^2+4x}{32} & 0\le x<4 \\ 1 & x\ge 4 \end{cases}$ $\qquad f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{16}(x+2) & 0\le x\le 4 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$

$$P(2\le X\le 3)=F(3)-F(2)=\left(\frac{9+12}{32}\right)-\left(\frac{4+8}{32}\right)=\frac{21-12}{32}=\frac{9}{32}$$

$$P(2\le X\le 3)=\int_2^3 \frac{1}{16}(x+2)\,dx=\frac{1}{16}\left[\frac{x^2}{2}+2x\right]_2^3=\frac{1}{16}\,\frac{9}{2}=\frac{9}{32}$$

Ejercicio 21.- Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad tal que

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{8}{7\,x^2} & 1\le x\le 8 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

a) Calcular el primer y tercer cuartil, el decil 7 y el percentil 85

b) Calcular la mediana y moda

Solución:

a) La Función de distribución:

$$F(x)=P\left[X\le x\right]=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=\int_1^x \frac{8}{7\,t^2}\,dt=-\frac{8}{7}\left[\frac{1}{t}\right]_1^x=\frac{8\,(x-1)}{7x} \qquad 1\le x\le 8$$

sustituyendo, queda:

$$F(Q_1)=\frac{1}{4}=\frac{8\,(Q_1-1)}{7\,Q_1} \quad \mapsto \quad 7\,Q_1=32\,(Q_1-1) \quad \mapsto \quad Q_1=\frac{32}{25}=1{,}28 \qquad \boxed{Q_1=P_{25}=1{,}28}$$

$$F(Q_3)=\frac{3}{4}=\frac{8\,(Q_3-1)}{7\,Q_3} \quad \mapsto \quad 21Q_3=32\,(Q_3-1) \quad \mapsto \quad Q_3=\frac{32}{11}=2{,}91 \qquad \boxed{Q_3=D_5=P_{75}=2{,}91}$$

$$F(D_7)=\frac{7}{10}=\frac{8\,(D_7-1)}{7\,D_7} \quad \mapsto \quad 49\,D_7=80\,(D_7-1) \quad \mapsto \quad D_7=\frac{80}{31}=2{,}58$$

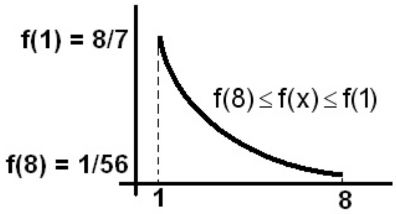
$$F(P_{85})=\frac{85}{100}=\frac{8\,(P_{85}-1)}{7\,P_{85}} \quad \mapsto \quad 595\,P_{85}=800\,(P_{85}-1) \quad \mapsto \quad P_{85}=\frac{800}{205}=3{,}90$$

b) $M_e=Q_2=D_5=P_{50}$

$$F(M_e)=\frac{1}{2}=\frac{8\,(M_e-1)}{7\,M_e} \quad \mapsto \quad 7\,M_e=16\,(M_e-1) \quad \mapsto \quad M_e=\frac{16}{9}=1{,}78$$

La Moda M_d se obtiene calculando el máximo de la función de densidad:

$$f(x) = \frac{8}{7\,x^2} \quad \mapsto \quad f'(x) = -\frac{16}{7\,x^3} < 0 \quad \mapsto \quad \text{La función es decreciente}$$



$f(8) \le f(x) \le f(1)$, con lo que $M_d = 1$

Ejercicio 22.- La demanda diaria de un determinado artículo es una variable aleatoria con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{8} & 0 < x \le 4 \\ \dfrac{12-x}{64} & 4 < x \le 12 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Los beneficios diarios dependen de la demanda según la siguiente función:

$$B = \begin{cases} -5 & \text{si} \quad x < 2 \\ 5 & \text{si} \quad 2 < x \le 4 \\ 10 & \text{si} \quad 4 < x \le 8 \\ 15 & \text{si} \quad 8 < x \le 12 \end{cases}$$

Calcular:

a) Probabilidad de que en un día cualquiera la demanda sea superior a 10
b) Probabilidad de que la demanda sea inferior a 3
c) La esperanza y la varianza de la demanda
d) Función de distribución de la demanda
e) Función de cuantía y función de distribución de la variable aleatoria beneficios diarios.
f) Esperanza y varianza de la variable beneficios

Solución:

a) $P(X > 10) = \displaystyle\int_{10}^{12} f(x)\,dx = \int_{10}^{12} \frac{12-x}{64}\,dx = \frac{1}{64}\left[12x - \frac{x^2}{2}\right]_{10}^{12} = \frac{1}{32} = 0{,}03125$

b) $P(X < 3) = \displaystyle\int_{0}^{3} f(x)\,dx = \int_{0}^{3} \frac{1}{8}\,dx = \frac{1}{8}\,[x]_0^3 = \frac{3}{8} = 0{,}375$

c) Media o Esperanza

$$\alpha_1 = \mu_x = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\,.f(x)\,dx = \int_0^4 x\,.f(x)\,dx + \int_4^{12} x\,.f(x)\,dx = \int_0^4 x.\frac{1}{8}\,dx + \int_4^{12} x.\frac{12-x}{64}\,dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^4 x\,dx + \frac{1}{64}\int_4^{12} (12x - x^2)\,dx = \frac{1}{16}\Big[\,x^2\Big]_0^4 + \frac{1}{64}\left[6x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_4^{12} =$$

$$= 1 + \frac{1}{64}\left(864 - \frac{1728}{3} - 96 + \frac{64}{3}\right) = \frac{13}{3} = 4,33$$

Varianza:

$$\alpha_2 = E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2.f(x)\,dx = \int_0^4 x^2.f(x)\,dx + \int_4^{12} x^2.f(x)\,dx = \int_0^4 x^2.\frac{1}{8}\,dx + \int_4^{12} x^2.\frac{12-x}{64}\,dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^4 x^2\,dx + \frac{1}{64}\int_4^{12} (12x^2 - x^3)\,dx = \frac{1}{24}\Big[x^3\Big]_0^4 + \frac{1}{64}\left[4x^3 - \frac{x^4}{4}\right]_4^{12} =$$

$$= \frac{64}{24} + \frac{1}{64}\big(6912 - 5184 - 256 + 64\big) = \frac{5120}{192} = \frac{80}{3} = 26,67$$

$$\sigma_x^2 = \mathrm{Var}(X) = \alpha_2 - \alpha_1^2 = \frac{80}{3} - \left(\frac{13}{3}\right)^2 = \frac{71}{9} = 7,89$$

d) La función de distribución de la demanda $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

$$F(x) = \begin{cases} \text{si } x < 0 & \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{x} 0\,dx = 0 \\ \text{si } 0 \le x < 4 & \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_0^x \frac{1}{8}\,dx = \frac{x}{8} \\ \text{si } 4 \le x < 12 & \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int_0^4 \frac{1}{8}\,dx + \int_4^x \frac{12-x}{64}\,dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{64}\left(-\frac{x^2}{2} + 12x - 40\right) \\ \text{si } x \ge 12 & \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_0^4 \frac{1}{8}\,dx + \int_4^{12} \frac{12-x}{64}\,dx + \int_{12}^{x} 0\,dx = 1 \end{cases}$$

En resumen,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\ \ x < 0 \\ \dfrac{x}{8} & si\ \ 0 \le x < 4 \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{64}\left(-\dfrac{x^2}{2} + 12x - 40\right) & si\ \ 4 \le x < 12 \\ 1 & si\ \ x \ge 12 \end{cases}$$

e) La función de cuantía y la función de distribución de la variable aleatoria beneficios diarios se hallan considerando:

$$B = \begin{cases} -5 & \text{si} \quad x < 2 \\ 5 & \text{si} \quad 2 < x \le 4 \\ 10 & \text{si} \quad 4 < x \le 8 \\ 15 & \text{si} \quad 8 < x \le 12 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{8} & 0 < x \le 4 \\ \dfrac{12-x}{64} & 4 < x \le 12 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Función de cuantía o probabilidad:

b_i	$P[B = b_i]$
-5	$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 \frac{1}{8}\,dx = \frac{1}{4} = 0,25$
5	$\int_2^4 f(x)\,dx = \int_2^4 \frac{1}{8}\,dx = \frac{1}{4} = 0,25$
10	$\int_4^8 f(x)\,dx = \int_4^8 \frac{12-x}{64}\,dx = \frac{1}{64}\left(12x - \frac{x^2}{2}\right)_4^8 = 0,375$
15	$\int_8^{12} f(x)\,dx = \int_8^{12} \frac{12-x}{64}\,dx = \frac{1}{64}\left(12x - \frac{x^2}{2}\right)_8^{12} = 0,125$

Función de distribución $F(B) = P(B \le b_i)$

b_i	$P(B = b_i)$	$F(B) = P(B \le b_i)$	$b_i \,.\, P[B = b_i]$	$b_i^2 \,.\, P[B = b_i]$
-5	0,25	0,25	-1,25	6,25
5	0,25	0,50	1,25	6,25
10	0,375	0,875	3,75	37,5
15	0,125	1	1,875	28,125
			$\sum_{i=1}^{4} b_i \,.\, P[B = b_i] = 5,625$	$\sum_{i=1}^{4} b_i^2 \,.\, P[B = b_i] = 78,125$

f) Media o Esperanza beneficios: $\mu_b = E(B) = \sum_{i=1}^{4} b_i \,.\, P[B = b_i] = 5,625$

Varianza beneficios:

$$E\left[B^2\right] = \sum_{i=1}^{4} b_i^2 \,.\, P[B = b_i] = 78,125$$

$$\sigma_b^2 = \text{Var}(B) = E(B^2) - \mu_b^2 = 78,125 - (5,625)^2 = 46,48$$

Desviación típica de los beneficios: $\sigma_b = \sqrt{46,48} = 6,817$

Ejercicio 23.- Sea X una variable aleatoria continua, cuya función de densidad es

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Sea $Y = 1 - X^2$ una transformación de la v.a. X

a) Calcular la función de densidad de la v.a. Y

b) Calcular la función de distribución de la v.a. Y

Solución:

a) La transformación asociada a la v.a. Y es derivable y estrictamente monótona cuando X toma valores en el intervalo (0, 1). En consecuencia, se puede aplicar la transformación, quedando la función de densidad:

$$Y = 1 - X^2 \quad \mapsto \quad x = \sqrt{1-y} \quad \mapsto \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dy} = \dfrac{-1}{2\sqrt{1-y}} \\ g^{-1}(y) = \sqrt{1-y} \end{cases}$$

La función de densidad de la variable continua Y se obtiene:

$$f_Y(y) = f_X\left[g^{-1}(y)\right] . \left|\frac{dx}{dy}\right| = 3\left(\sqrt{1-y}\right)^2 \left|\frac{-1}{2\sqrt{1-y}}\right| = \frac{3}{2}\sqrt{1-y}$$

La función de densidad de la v.a. Y: $f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{3}{2}\sqrt{1-y} & 0 < y < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

b) Función de distribución:

$$y \le 0 \ \mapsto \ F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f(t)\,dt = 0$$

$$0 < y < 1 \ \mapsto \ F_Y(y) = \cancel{\int_{-\infty}^{0} f(y)\,dy} + \int_0^y f(t)\,dt = \int_0^y \frac{3}{2}\sqrt{1-t}\,dt = \left[-\sqrt{(1-t)^3}\right]_0^y = 1 - \sqrt{(1-y)^3}$$

$$y \ge 1 \ \mapsto \ F_Y(y) = \cancel{\int_{-\infty}^{0} f(y)\,dy} + \int_0^1 f(t)\,dt + \cancel{\int_1^y f(t)\,dt} = \int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 \frac{3}{2}\sqrt{1-t}\,dt = 1$$

La función de distribución de la v.a. Y será: $F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ 1 - \sqrt{(1-y)^3} & 0 < y < 1 \\ 1 & y \ge 1 \end{cases}$

Ejercicio 24.- Sea X una variable aleatoria continua, cuya función de densidad es

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Sea $Y = X^2$ una transformación de la v.a. X

a) Calcular la función de densidad de la v.a. Y

b) Calcular la función de distribución de la v.a. Y

Solución:

La transformación $Y = X^2$ es derivable, pero no es estrictamente monótona, puesto que en el intervalo (-1, 0) la transformación es decreciente y en el intervalo [0, 1) es creciente.

En este caso, hay que determinar la función de distribución de la variable aleatoria Y para el caso general de las transformaciones de una variable aleatoria, ya que no se puede aplicar el método descrito en el ejercicio 25.

b) Cálculo de la función de distribución

$$F_Y(y) = P\left[Y \le y\right] = P\left[X^2 \le y\right] = P\left[|X| \le \sqrt{y}\right] = P\left[-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}\right] = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left[x\right]_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} = \sqrt{y}$$

La función de distribución de la v.a. Y es: $F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ \sqrt{y} & 0 \le y < 1 \\ 1 & y \ge 1 \end{cases}$

a) La función de densidad $f_Y(y) = \dfrac{dF_Y(y)}{dy} = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{y}} & 0 \le y < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

Ejercicio 25.- Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad tal que

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

a) Función generatriz de los momentos (f.g.m.)

b) Esperanza y varianza a partir de la f.g.m.

c) Función característica

Solución:

a) $M(t) = E\left[e^{tx}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}\,.\,f(x)\,.\,dx = \int_{0}^{\infty} e^{x(t-1)}\,dx = \dfrac{1}{t-1}\left[e^{x(t-1)}\right]_0^{\infty} = \dfrac{1}{1-t}$ si $t < 1$

b) $\alpha_1 = E(X) = M^{(1)}(0) = \left.\dfrac{dM(t)}{dt}\right|_{t=0} = \left.\dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{1}{1-t}\right]\right|_{t=0} = \left.\dfrac{1}{(1-t)^2}\right|_{t=0} = 1$

$$\alpha_2 = E(X^2) = M^{(2)}(0) = \left.\frac{d^2M(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1-t}\right)\right]\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{(1-t)^2}\right)\right|_{t=0} = \left.\frac{2}{(1-t)^3}\right|_{t=0} = 2$$

$$Var(X) = \alpha_2 - \alpha_1^2 = 2 - 1 = 1$$

c) La función característica se puede calcular utilizando la relación entre función característica y los momentos:

$$\varphi(t) = 1 + (it)\,\alpha_1 + \frac{(it)^2}{2!}\alpha_2 + \frac{(it)^3}{3!}\alpha_3 + \cdots + \frac{(it)^k}{k!}\alpha_k + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(it)^j}{j!}\alpha_j \quad \text{si } t < 1$$

Universidad Autónoma de Madrid

Gestión Aeronáutica: Estadística Teórica
Facultad Ciencias Económicas y Empresariales
Departamento de Economía Aplicada
Profesor: Santiago de la Fuente Fernández