

PORTAL ESTADÍSTICA APLICADA



Video
Contrastes



Número
de Oro



Decisiones
en Bolsa



Matrices
Determinantes



Métodos
Integración



Ecuaciones
Diferenciales

PROBLEMAS DE ÁLGEBRA

Destrezas
Matemáticas



Algebra
Lineal



Diagonalizar
Matrices

ELEMENTOS DE ALGEBRA LINEAL

Matriz

Una matriz de *orden o dimensión* $n \times p$ es una ordenación rectangular de elementos dispuestos en n filas y p columnas de la siguiente forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix}$$

En general, para designar a una matriz se utiliza una letra mayúscula en negrita. Un elemento genérico de la matriz A se designa mediante a_{ij} , donde el primer subíndice i hace referencia a la fila en que está situado el elemento, mientras que el segundo subíndice j hace referencia a la columna.

Una matriz de orden 1×1 es un escalar.

Ejemplos: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -5 & 6 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 5 \\ -5 & 2 & 8 \end{bmatrix}$

Matriz transpuesta

La transpuesta de una matriz A de orden $n \times p$, obtenida mediante el intercambio de filas y columnas, de forma que $a_{ij} = b_{ji}$

En general, a la matriz transpuesta de A se denomina A'

Ejemplos de transpuestas de las matrices anteriores:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \quad B' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 3 & 4 & 2 \\ 6 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

Vector columna y vector fila

Un vector columna de orden n es una ordenación de elementos dispuestos en n filas y 1 columna de la siguiente forma:

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad \text{En general, para designar a un **vector columna** se utiliza una letra minúscula en negrita.}$$

Un **vector fila de orden n** es una ordenación de elementos dispuestos en 1 fila y n columnas de la siguiente forma: $b = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n]$

El transpuesto de un vector fila es un vector columna: $a' = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]$

Matriz cuadrada

Se dice que una matriz es cuadrada si el número de filas es igual al número de columnas. En esta línea, una matriz cuadrada de *orden n* tiene n filas.

Una matriz cuadrada de orden 3: $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 7 \\ 5 & 6 & 8 \end{bmatrix}$

Traza de una matriz

En una matriz cuadrada de *orden n* la diagonal principal está formada por los elementos a_{ii} ($i = 1, 2, \dots, n$). La traza de una matriz cuadrada A , a la que se designa por **$tr(A)$** o por **traza(A)**, es la suma de los elementos de la diagonal principal. Es decir :

$$tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

Ejemplo: $tr(C) = 1 + 3 + 8 = 12$

Matriz simétrica

Se dice que una matriz cuadrada es simétrica si se verifica: $A = A'$

$$\text{Ejemplo: } D = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

Matriz diagonal

Se dice que una matriz cuadrada es **diagonal** cuando todos los elementos situados fuera de la diagonal principal son nulos. Es decir, en una matriz diagonal se verifica que $a_{ij} = 0$ cuando $i \neq j$. La matriz diagonal es de la forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{np} \end{bmatrix}$$

Matriz escalar

Se dice que una matriz **diagonal es escalar** cuando todos los elementos de la diagonal principal son idénticos. Es decir, en una matriz escalar se verifica que $a_{ii} = k$ para todo i .

Matriz identidad

Es una matriz escalar en la que $a_{ii} = 1$. Se le denomina I . Una matriz identidad genérica tiene la forma:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

OPERACIONES CON MATRICES

Igualdad de matrices

La igualdad de dos matrices $A = B$ se cumple si, y sólo si, A y B son del mismo orden y $a_{ij} = b_{ij}$ para todo i y todo j .

Para realizar la suma, las matrices A y B deben ser del mismo orden.

Suma de matrices

La suma de las matrices A y B de orden $n \times p$ es igual a otra matriz C , también de orden $n \times p$, definida de la siguiente forma: $A + B = C$

Los elementos de la matriz C se obtienen: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \forall i, j$

$$\text{Ejemplo: } A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \quad \mapsto \quad C = \begin{bmatrix} 2+1 & -1+4 \\ 3-2 & 5+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 11 \end{bmatrix}$$

Multiplicación escalar

La multiplicación escalar de una matriz A por un escalar λ se efectúa multiplicando cada elemento de A por λ . El producto es designado por λA

$$\text{Ejemplo: } \lambda = 4, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \mapsto \quad \lambda A = 4 \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 16 & 4 \end{bmatrix}$$

Multiplicación de matrices

Si A es una matriz de orden $n \times m$ y B es una matriz de orden $m \times p$, el producto de estas dos matrices es otra matriz C de orden $n \times p$: $A \times B = C$

El elemento genérico $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21}) & (a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22}) & (a_{11} b_{13} + a_{12} b_{23}) \\ (a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21}) & (a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22}) & (a_{21} b_{13} + a_{22} b_{23}) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 9 & 1 \\ 7 & -2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \times 1 + 2 \times 7 & 4 \times 9 - 2 \times 2 & 4 \times 1 + 2 \times 6 \\ 3 \times 1 + 5 \times 7 & 3 \times 9 - 5 \times 2 & 3 \times 1 + 5 \times 6 \\ 2 \times 1 + 6 \times 7 & 2 \times 9 - 6 \times 2 & 2 \times 1 + 6 \times 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 32 & 16 \\ 38 & 17 & 33 \\ 44 & 6 & 38 \end{bmatrix}$$

⊙ El producto de matrices no es conmutativo: $A \times B \neq B \times A$

Sean las matrices: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 1 + 3 \times 0 & 2 \times 5 + 3 \times 6 \\ 4 \times 1 + 1 \times 0 & 4 \times 5 + 1 \times 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 28 \\ 4 & 26 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 & 14 \\ 2 & 13 \end{bmatrix}$$

$$B \times A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 2 + 5 \times 4 & 1 \times 3 + 5 \times 1 \\ 0 \times 2 + 6 \times 4 & 0 \times 3 + 6 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & 8 \\ 24 & 6 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 11 & 4 \\ 12 & 3 \end{bmatrix}$$

⊙ La matriz identidad I es conmutativa: $A \times I = I \times A$

$$A \times I = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 1 + 3 \times 0 & 2 \times 0 + 3 \times 1 \\ 4 \times 1 + 1 \times 0 & 4 \times 0 + 1 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = A$$

$$I \times A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 2 + 0 \times 4 & 1 \times 3 + 0 \times 1 \\ 0 \times 2 + 1 \times 4 & 0 \times 3 + 1 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = A$$

Determinante de una matriz

El determinante de una matriz cuadrada A , al que se designa por $|A|$, es un escalar que se obtiene por la suma de $n!$ términos, cada uno de los cuales es el producto de n elementos. Se obtiene mediante la fórmula:

$$|A| = \sum \pm a_{1j} a_{2k} \cdots a_{nq}$$

En la expresión anterior cada sumando se obtiene permutando el segundo subíndice. El signo de cada sumando $+$ o $-$ según que el número de permutaciones realizado a partir de la ordenación original sea par o impar.

Si $|A| = 0$ se dice que la matriz A es singular

Ejemplos: $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$

$$|B| = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = b_{11}b_{22}b_{33} + b_{21}b_{32}b_{13} + b_{31}b_{23}b_{12} - \\ - b_{13}b_{22}b_{31} - b_{23}b_{32}b_{11} - b_{33}b_{21}b_{12}$$

Propiedades de los determinantes

- ⊙ El determinante de una matriz cuadrada es igual al determinante de su transpuesta: $|A| = |A'|$
- ⊙ El determinante del producto de matrices cuadradas es igual al producto de los determinantes de cada una de las matrices:

$$|ABC| = |A| \times |B| \times |C|$$

- ⊙ Si se multiplica una matriz A de orden n por una constante h, se verifica:

$$|hA| = h^n \times |A|$$

- ⊙ Si una matriz A tiene dos filas, o dos columnas, idénticas o proporcionales, entonces: $|A| = 0$

Matriz inversa

La inversa de una matriz cuadrada A es una matriz B que verifica: $AB = BA = I$

En general, a la matriz B que cumple esta propiedad se le designa por A^{-1} , con lo cual: $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

$$\text{Ejemplo: } A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \mapsto A' = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad |A| = |A'| = 10$$

$$A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/10 & -1/10 \\ -2/10 & 4/10 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}A = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} = I$$

Propiedades de las matrices

⊙ La inversa de un producto de matrices ABC es igual a: $(ABC)^{-1} = C^{-1} B^{-1} A^{-1}$

La transpuesta de una inversa es igual a la inversa de la transpuesta:

⊙ $(A^{-1})' = (A')^{-1}$

⊙ El determinante de la inversa de una matriz es igual al recíproco del determinante de la matriz original, es decir: $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

MATRICES Y DETERMINANTES: OPERACIONES



Calcular $A \cdot (B + C)$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$B + C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot (B + C) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 5 & 3 \cdot 5 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \\ 4 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 5 & 4 \cdot 5 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 2 & 4 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 19 & 3 \\ 22 & 24 & 0 \end{pmatrix}$$



Dadas las matrices A y B, obtener los productos AB y BA, donde:

$$A = (1 \ 2 \ 4) \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$A \cdot B = (1 \ 2 \ 4) \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 0 = 11$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (1 \ 2 \ 4) = \begin{pmatrix} 5 \cdot 1 & 5 \cdot 2 & 5 \cdot 4 \\ 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 & 3 \cdot 4 \\ 0 \cdot 1 & 0 \cdot 2 & 0 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 20 \\ 3 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Calcular X tal que $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 11 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 26 & 21 \\ 69 & 59 \end{pmatrix}$

Solución:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 21 \\ 69 & 59 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3a+4c & 3b+4d \\ 7a+11c & 7b+11d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 21 \\ 69 & 59 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3a+4c & 3b+4d \\ 7a+11c & 7b+11d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 21 \\ 69 & 59 \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} 3a+4c=26 \\ 7a+11c=69 \end{cases} \Rightarrow a=2 \quad c=5$$

$$\begin{cases} 3b+4d=21 \\ 7b+11d=59 \end{cases} \Rightarrow b=-1 \quad d=6$$

en consecuencia, $X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$



Resolver el sistema de ecuaciones de matrices $\begin{cases} X - 3Y = A \\ 2X + 3Y = B \end{cases}$

donde: $A = \begin{pmatrix} -20 & -5 \\ -2 & -15 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 23 & 17 \\ -4 & 15 \end{pmatrix}$

Solución:

$$\begin{cases} X - 3Y = A \\ 2X + 3Y = B \end{cases} \mapsto 3X = A + B \mapsto 3X = \begin{pmatrix} -20 & -5 \\ -2 & -15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 23 & 17 \\ -4 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 12 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 12 \\ -6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X - 3Y = A \quad \mapsto \quad 3Y = X - A \quad \mapsto \quad 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -20 & -5 \\ -2 & -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 9 \\ 0 & 15 \end{pmatrix}$$

$$Y = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 21 & 9 \\ 0 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$



Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, donde a y b son números reales. Calcular A^n

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2b \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2b \\ 0 & a^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^4 & 4a^3b \\ 0 & a^4 \end{pmatrix}$$

.....

$$A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$$



Hallar la potencia n -ésima de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por inducción: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & a_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Para calcular a_n se considera la sucesión: $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 6$, $a_4 = 10$

a_n	d_1	d_2
1		
3	2	
6	3	1
10	4	1

Es una progresión aritmética de segundo orden, por lo que se busca un polinomio de segundo grado $a_n = a + bn + cn^2$

$$\begin{aligned} n=1: a_1 &= a + b + c = 1 \\ n=2: a_2 &= a + 2b + 4c = 3 \\ n=3: a_3 &= a + 3b + 9c = 6 \end{aligned} \quad \mapsto \quad \begin{cases} a + b + c = 1 \\ a + 2b + 4c = 3 \\ a + 3b + 9c = 6 \end{cases} \quad \mapsto \quad \begin{aligned} a &= 0 \\ b &= 1/2 \\ c &= 1/2 \end{aligned}$$

$$a_n = a + bn + cn^2 = \frac{n + n^2}{2} = \frac{n(1+n)}{2}$$

Finalmente, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(1+n)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$



Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, obtener todas las matrices que conmutan con A

Solución:

Sea la matriz $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tal que $A \cdot B = B \cdot A$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ c & 2c+d \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a+2c = a \\ c = c \end{cases} \mapsto c = 0 \quad \begin{cases} b+2d = 2a+b \\ d = 2c+d \end{cases} \mapsto a = d$$

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$



Dado el determinante $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 6 & 0 & -2 \end{vmatrix}$, desarrollar por los elementos de su

segunda fila y por los elementos de la tercera columna. Por la regla de Sarrus.

Solución:

⊙ El desarrollo de $|A|$ por la segunda fila: $|A| = a_{21} \cdot A_{21} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{23} \cdot A_{23}$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -[-2 - 0] = 2 \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 18 = -22$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = -[0 - 6] = 6$$

$$|A| = a_{21} \cdot A_{21} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{23} \cdot A_{23} = 4 \cdot 2 + 2 \cdot (-22) + 5 \cdot 6 = -6$$

⊙ El desarrollo de $|A|$ por la tercera columna: $|A| = a_{13} \cdot A_{13} + a_{23} \cdot A_{23} + a_{33} \cdot A_{33}$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 12 = -12 \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = -(0 - 6) = 6$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$$

$$|A| = a_{13} \cdot A_{13} + a_{23} \cdot A_{23} + a_{33} \cdot A_{33} = 3 \cdot (-12) + 5 \cdot 6 + (-2) \cdot 0 = -6$$

⊙ El desarrollo de $|A|$ por Sarrus:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 6 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 6 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot (-2) + 4 \cdot 0 \cdot 3 + 6 \cdot 5 \cdot 1 = 22$$

$$+ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 6 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -3 \cdot 2 \cdot 6 - 5 \cdot 0 \cdot 2 - (-2) \cdot 4 \cdot 1 = -28$$

$$= 22 - 28 = -6$$



Desarrollar el determinante $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 & 3 \\ 7 & 3 & 12 & 8 \\ 4 & 6 & -5 & 4 \\ 3 & 2 & 6 & -3 \end{vmatrix}$

Solución:

$$\begin{aligned}
 |A| &= \begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 & 3 \\ 7 & 3 & 12 & 8 \\ 4 & 6 & -5 & 4 \\ 3 & 2 & 6 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_2 - 2F_1} \begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 & 3 \\ 1 & -5 & -2 & 2 \\ 4 & 6 & -5 & 4 \\ 3 & 2 & 6 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_1 - 3F_2} \begin{vmatrix} 0 & 19 & 13 & -3 \\ 1 & -5 & -2 & 2 \\ 4 & 6 & -5 & 4 \\ 3 & 2 & 6 & -3 \end{vmatrix} \\
 &\xrightarrow{F_3 - 4F_2} \begin{vmatrix} 0 & 19 & 13 & -3 \\ 1 & -5 & -2 & 2 \\ 0 & 26 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & 6 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_4 - 3F_2} \begin{vmatrix} 0 & 19 & 13 & -3 \\ \boxed{1} & -5 & -2 & 2 \\ 0 & 26 & 3 & -4 \\ 0 & 17 & 12 & -9 \end{vmatrix} = \\
 &= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 19 & 13 & -3 \\ 26 & 3 & -4 \\ 17 & 12 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 19 & 13 & 3 \\ 26 & 3 & 4 \\ 17 & 12 & 9 \end{vmatrix} = -1774
 \end{aligned}$$



Desarrollar el determinante $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x \end{vmatrix}$

Solución:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 + F_1 \\ F_3 + F_1 \\ F_4 + F_1}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x+1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & x+1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & x+1 \end{vmatrix} = (x+1)^3$$



Desarrollar el determinante de Vandermonde $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

Solución:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \xrightarrow[\begin{matrix} F_3 - aF_2 \\ F_2 - aF_1 \end{matrix}]{\begin{matrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2-ab & c^2-ac \end{matrix}} \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b(b-a) & c(c-a) \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a) \cdot (c-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & c \end{vmatrix} = (b-a) \cdot (c-a) \cdot (c-b)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a) \cdot (c-a) \cdot (c-b)$$



Calcula el valor del determinante $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \log 3 & \log 30 & \log 300 \\ (\log 3)^2 & (\log 30)^2 & (\log 300)^2 \end{vmatrix}$

Solución:



$$\log 30 = \log(3 \cdot 10) = \log 10 + \log 3 = 1 + \log 3$$

$$\log 300 = \log(3 \cdot 100) = \log 100 + \log 3 = 2 + \log 3$$

$$\odot |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \log 3 & \log 30 & \log 300 \\ (\log 3)^2 & (\log 30)^2 & (\log 300)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \log 3 & 1 + \log 3 & 2 + \log 3 \\ (\log 3)^2 & (1 + \log 3)^2 & (2 + \log 3)^2 \end{vmatrix} \mapsto$$

$$\xrightarrow[\begin{matrix} C_2 - C_1 \\ C_3 - C_1 \end{matrix}]{\begin{matrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ \log 3 & 1 & 1 \\ (\log 3)^2 & 1 + 2 \log 3 & 3 + 2 \log 3 \end{matrix}} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 + 2 \log 3 & 3 + 2 \log 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 + 2 \log 3 - 1 - 2 \log 3 = 2$$

$$\odot |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \log 3 & \log 30 & \log 300 \\ (\log 3)^2 & (\log 30)^2 & (\log 300)^2 \end{vmatrix} \xrightarrow[\begin{matrix} F_2 - (\log 3)F_1 \\ F_3 - (\log 3)F_2 \end{matrix}]{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ \log 3 & \log 30 & \log 300 \\ (\log 3)^2 & (\log 30)^2 & (\log 300)^2 \end{matrix}}$$

$$= (\log 30 - \log 3) \cdot (\log 300 - \log 3) \cdot (\log 300 - \log 30) = \log 10 \cdot \log 100 \cdot \log 10 = 2$$



Resolver

$$\begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1 + C_2 + C_3 + C_4} \begin{vmatrix} 3+3x & x & x & x \\ 3+3x & 3 & x & x \\ 3+3x & x & 3 & x \\ 3+3x & x & x & 3 \end{vmatrix} = (3+3x) \begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 1 & 3 & x & x \\ 1 & x & 3 & x \\ 1 & x & x & 3 \end{vmatrix} =$$

$$\xrightarrow{\substack{F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \\ F_4 - F_1}} (3+3x) \begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 0 & 3-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-x \end{vmatrix} = (3+3x) \cdot (3-x)^3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \text{ triple} \end{cases}$$



Valor del determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1+a & 2+a & 3+a & 4+a \\ a & a & a & a \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1+a & 2+a & 3+a & 4+a \\ a & a & a & a \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & a & a & a \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 0 + 0 = 0$$

Los dos determinantes valen 0 al tener dos filas iguales o proporcionales.



Valor del determinante

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 7 & 1 \\ 2 & -5 & 3 & 6 \\ 2 & 0 & 4 & -3 \\ 6 & 2 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\odot \begin{vmatrix} 4 & 2 & 7 & 1 \\ 2 & -5 & 3 & 6 \\ 2 & 0 & 4 & -3 \\ 6 & 2 & 8 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{2F_2 - F_1} \begin{vmatrix} 4 & 2 & 7 & 1 \\ 1 & -12 & -1 & 11 \\ 2 & 0 & 4 & -3 \\ 6 & 2 & 8 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{2F_3 - F_1}$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow \begin{matrix} \boxed{1} \\ \boxed{2} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} \boxed{1} \\ \boxed{2} \end{matrix} \begin{vmatrix} 4 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & -12 & -1 & 11 \\ 0 & -2 & 1 & -7 \\ 6 & 2 & 8 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{2F_4 - 3F_1} \begin{matrix} \boxed{1} \\ \boxed{2} \\ \boxed{2} \end{matrix} \begin{vmatrix} \boxed{4} & 2 & 7 & 1 \\ 0 & -12 & -1 & 11 \\ 0 & -2 & 1 & -7 \\ 0 & -2 & -5 & -3 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{4}{8} \begin{vmatrix} -12 & -1 & 11 \\ -2 & 1 & -7 \\ -2 & -5 & -3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 6 & -1 & 11 \\ 1 & 1 & -7 \\ 1 & -5 & -3 \end{vmatrix} = -(-18 - 55 + 7 - 11 - 210 - 3) = 290 \end{aligned}$$

$$\odot \begin{vmatrix} 4 & 2 & 7 & 1 \\ 2 & -5 & 3 & 6 \\ 2 & 0 & 4 & -3 \\ 6 & 2 & 8 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} F_1 - 2F_2 \\ F_3 - F_2 \\ F_4 - 3F_2 \end{matrix}} \begin{vmatrix} 0 & 12 & 1 & -11 \\ \boxed{2} & -5 & 3 & 6 \\ 0 & 5 & 1 & -9 \\ 0 & 17 & -1 & -18 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 12 & 1 & -11 \\ 5 & 1 & -9 \\ 17 & -1 & -18 \end{vmatrix} \mapsto$$

$$\xrightarrow{\begin{matrix} F_1 + F_3 \\ F_2 + F_3 \end{matrix}} -2 \begin{vmatrix} 29 & 0 & -29 \\ 22 & 0 & -27 \\ 17 & \boxed{-1} & -18 \end{vmatrix} = -2 \cdot 29 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 22 & -27 \end{vmatrix} = -2 \cdot 29 \cdot (-5) = 290$$



Descomponer la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ como suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica.

Solución:

Sean las matrices S (simétrica, coincide con su transpuesta, es decir $S = S^t$) y A (antisimétrica, cuando su transpuesta es igual a su negativa, esto es, $A = -A^t$).

$$\begin{cases} M = S + A \\ M^t = S^t + A^t \end{cases} \mapsto \begin{cases} M = S + A \\ M^t = S - A \end{cases} \mapsto S = \frac{1}{2}(M + M^t) \quad A = \frac{1}{2}(M - M^t)$$

$$S = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 2 & \frac{7}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{7}{2} & 5 & \frac{9}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{9}{2} & 4 \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-5}{2} & 0 \end{pmatrix}$$



Obtener la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Solución:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 42$$

La matriz transpuesta $A^t = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, siendo $|A| = |A^t| = 42$

La matriz adjunta $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$

Los adjuntos correspondientes:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 8 \quad A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -12 \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 10 \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 9 \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -4 \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 11$$

En definitiva, la matriz adjunta: $A^* = \begin{pmatrix} 3 & 8 & -1 \\ -12 & 10 & 4 \\ 9 & -4 & 11 \end{pmatrix}$

La matriz inversa $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$

$$A^{-1} = \frac{1}{42} \begin{pmatrix} 3 & 8 & -1 \\ -12 & 10 & 4 \\ 9 & -4 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{42} & \frac{8}{42} & \frac{-1}{42} \\ \frac{-12}{42} & \frac{10}{42} & \frac{4}{42} \\ \frac{9}{42} & \frac{-4}{42} & \frac{11}{42} \end{pmatrix}$$

Téngase en cuenta que una matriz cuadrada A es invertible sólo si $|A| \neq 0$

La matriz inversa A^{-1} verifica la propiedad conmutativa $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

$$A \cdot A^{-1} = \frac{1}{42} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 8 & -1 \\ -12 & 10 & 4 \\ 9 & -4 & 11 \end{pmatrix} = \frac{1}{42} \begin{pmatrix} 42 & 0 & 0 \\ 0 & 42 & 0 \\ 0 & 0 & 42 \end{pmatrix} = I$$

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{42} \begin{pmatrix} 3 & 8 & -1 \\ -12 & 10 & 4 \\ 9 & -4 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{42} \begin{pmatrix} 42 & 0 & 0 \\ 0 & 42 & 0 \\ 0 & 0 & 42 \end{pmatrix} = I$$



Halla el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solución:

El rango de una matriz cuadrada es el número de filas o columnas independientes.

En este caso, el rango de A como máximo puede ser 3.

$$\text{El menor } \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow r(A) \geq 2$$

Combinando $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ todos los menores de tercer orden que se pueden obtener:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{Al existir un menor de tercer orden distinto de cero, se concluye que } r(A) = 3$$



Halla el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -7 & 17 & -4 \end{pmatrix}$

Solución:

El rango de una matriz cuadrada es el número de filas o columnas independientes, por consiguiente, el rango como máximo puede ser 4.

De otra parte, se observa que $F_3 = F_1 + F_2$, es decir, la tercera fila es combinación lineal de la primera y segunda fila. Por tanto, se puede suprimir sin que altere el rango de la matriz A.

Queda la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -7 & 17 & -4 \end{pmatrix}$ que como máximo tiene rango 3

se tiene que $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow r(A) \geq 2$

Orlando el menor de todas las formas posibles, se obtiene:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -7 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 17 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

Como resulta que, $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -7 \end{vmatrix} = 0$ $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 17 \end{vmatrix} = 0$ $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 0$

El rango no puede ser 3, por tanto: $r(A) = 2$



Calcular el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & -1 & 8 \\ -1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 10 & 13 & 11 \end{pmatrix}$$

Solución:

Mediante el método de reducción, se tiene:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & -1 & 8 \\ -1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 10 & 13 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_1 + 2F_2 \\ F_3 + 3F_2 \\ F_4 + F_2}} \begin{pmatrix} 0 & 5 & 11 & 7 & 18 \\ -1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 13 & 17 & 16 \\ 0 & 5 & 13 & 17 & 16 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_3 - F_1 \\ F_4 - F_3}}$$

$$\xrightarrow{\substack{F_3 - F_1 \\ F_4 - F_3}} \begin{pmatrix} 0 & 5 & 11 & 7 & 18 \\ -1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 5 & 11 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rango} = 3$$

Sea A una matriz cuadrada diagonal.



¿Qué condiciones deben cumplir los elementos para que sea inversible?.

¿Y cuáles para que dicha inversa coincida con A?

Solución:

$$\text{Sea } A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

Para que exista A^{-1} tiene que verificarse que $|A| = a \cdot b \cdot c \neq 0$, es decir, que ningún elemento de la diagonal principal sea nulo.

$$A = A^t = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \quad |A| = a \cdot b \cdot c \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 1/b & 0 \\ 0 & 0 & 1/c \end{pmatrix}$$

$$\text{Para que } A^t = A^{-1} \mapsto \begin{cases} a = 1/a \\ b = 1/b \\ c = 1/c \end{cases} \mapsto \begin{cases} a^2 = 1 & a = \pm 1 \\ b^2 = 1 & b = \pm 1 \\ c^2 = 1 & c = \pm 1 \end{cases}$$

Las matrices que cumplen estas condiciones son:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$



Calcular el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 + 2ab + b^2 & ab & ab & b^2 \\ a^2 + 2ab + b^2 & a^2 & b^2 & ab \\ a^2 + 2ab + b^2 & b^2 & a^2 & ab \\ a^2 + 2ab + b^2 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix} = (a+b)^2 \begin{vmatrix} 1 & ab & ab & b^2 \\ 1 & a^2 & b^2 & ab \\ 1 & b^2 & a^2 & ab \\ 1 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (a+b)^2 \begin{vmatrix} 1 & ab & ab & b^2 \\ 0 & a^2 - ab & b^2 - ab & ab - b^2 \\ 0 & b^2 - ab & a^2 - ab & ab - b^2 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 - b^2 \end{vmatrix} = (a+b)^2 \begin{vmatrix} a(a-b) & b(b-a) & b(b-a) \\ b(b-a) & a(a-b) & b(b-a) \\ 0 & 0 & a^2 - b^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (a+b)^2 \cdot (a^2 - b^2) \begin{vmatrix} a(a-b) & -b(a-b) \\ -b(a-b) & a(a-b) \end{vmatrix} = (a+b)^2 \cdot (a^2 - b^2) \cdot (a-b)^2 \begin{vmatrix} a & -b \\ -b & a \end{vmatrix} =$$

$$= \boxed{(a+b)^2} \cdot (a^2 - b^2) \cdot \boxed{(a-b)^2} \cdot (a^2 - b^2) = [(a+b) \cdot (a-b)]^2 \cdot (a^2 - b^2)^2 =$$

$$= (a^2 - b^2)^2 \cdot (a^2 - b^2)^2 = (a^2 - b^2)^4$$



Hallar los valores para los que la matriz A no tiene inversa: $A = \begin{pmatrix} |x| & 1 \\ |x-2| & 2 \end{pmatrix}$

Solución:

La matriz no tiene inversa cuando $|A| = 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} |x| & 1 \\ |x-2| & 2 \end{vmatrix} = 2|x| - |x-2| = 0$$

	$-\infty$	0	2	∞
$2 x $		$-2x$	$2x$	$2x$
$ x-2 $		$-(x-2)$	$-(x-2)$	$x-2$
$2 x - x-2 = 0$		$-2x + x - 2 = -x - 2 = 0$ $x = -2$	$2x + x - 2 = 3x - 2 = 0$ $x = \frac{2}{3}$	$2x - x + 2 = x + 2 = 0$ $x = -2$

$$|A| = \begin{cases} x = -2 & x \leq 0 \\ x = \frac{2}{3} & 0 < x \leq 2 \\ x = -2 & x > 2 \end{cases} \Rightarrow \text{La matriz A tiene inversa para todo valor real de x, excepto para } x = -2 \text{ y } x = \frac{3}{2}$$



Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Comprueba si $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

Solución:

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad |A| = |A^t| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \quad A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$B^t = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad |B| = |B^t| = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -4 \quad B^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} \quad |A \cdot B| = |(A \cdot B)^t| = -8$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/8 & -3/8 \end{pmatrix} \\ \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/8 & -3/8 \end{pmatrix} \end{array} \right. \Rightarrow (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$$



Calcula \mathbf{X} tal que $\mathbf{X} - \mathbf{B}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, donde: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solución:

$$\mathbf{X} - \mathbf{B}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{X} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B}^2$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$



Determinar los valores de m para los que la matriz $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ verifique

$$\mathbf{X}^2 - \frac{5}{2}\mathbf{X} + \mathbf{I} = \mathbf{0}$$

Solución:

$$\mathbf{X}^2 - \frac{5}{2}\mathbf{X} + \mathbf{I} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \frac{5}{2} \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} m^2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \frac{5}{2} \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} m^2 - \frac{5}{2}m + 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$m^2 - \frac{5}{2}m + 1 = 0 \mapsto 2m^2 - 5m + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -\frac{1}{2} \end{cases}$$



Resuelve la ecuación $AXB = C$, donde: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Solución:

$$AXB = C \mapsto A^{-1}AXB = A^{-1}C \mapsto A^{-1}AXB B^{-1} = A^{-1}C B^{-1}$$

$$IXI = A^{-1}C B^{-1} \mapsto \boxed{X = A^{-1}C B^{-1}}$$

Adviértase que el producto de matrices no es conmutativo. En esta línea, hay que multiplicar por la izquierda A^{-1} y por la derecha B^{-1} .

$$\text{De otra parte, } A^{-1}A = B B^{-1} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \mapsto A^t = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \mapsto |A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 1 \mapsto A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \mapsto B^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \mapsto |B| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \mapsto B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}C B^{-1} \mapsto X = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Halla la matriz X que verifica $AB + CX = D$, siendo:



$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ -8 & 17 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$AB + CX = D \mapsto CX = D - AB \mapsto C^{-1}CX = C^{-1}(D - AB) \mapsto \boxed{X = C^{-1}(D - AB)}$$

$$\odot C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \mapsto C^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \mapsto |C| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \mapsto C^{-1} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\odot AB = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$$

$$D - AB = \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ -8 & 17 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ -2 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\odot X = C^{-1}(D - AB) \mapsto X = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

