ELEMENTOS DE ALGEBRA LINEAL

Matriz

Una matriz de *orden o dimensión* $n \times p$ es una ordenación rectangular de elementos dispuestos en *n* filas y *p* columnas de la siguiente forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix}$$

En general, para designar a una matriz se utiliza una letra mayúscula en negrita. Un elemento génerico de la matriz A se designa mediante a_{ij}, donde el primer subíndice i hace referencia a la fila en que está situado el elemento, mientras qhe el segundo subíndice j hace referencia a la columna.

Una matriz de orden *1 x 1* es un escalar.

Ejemplos: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -5 & 6 \end{bmatrix}$ $\qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 5 \\ -5 & 2 & 8 \end{bmatrix}$

Matriz transpuesta

La transpuesta de una matriz A de orden *n x p*, obtenida mediante el intercambio de filas y columnas, de forma que $\boxed{a_{ij} = b_{ji}}$

En general, a la matriz transpuesta de A se denomina A'

Ejemplos de transpuestas de las matrices anteriores:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \qquad B' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 3 & 4 & 2 \\ 6 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

Vector columna y vector fila

Un vector columna de orden n es una ordenación de elementos dispuestos en n filas y 1 columna de la siguiente forma:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

En general, para designar a un *vector columna* se utiliza una letra minúscula en negrita.

Un *vector fila de orden n* es una ordenación de elementos dispuestos en 1 fila y n columnas de la siguiente forma: $\boxed{\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix}}$

El transpuesto de un vector fila es un vector columna: $\boxed{\mathbf{a}' = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}}$

Matriz cuadrada

Se dice que una matriz es cuadrada si el número de filas es igual al número de columnas. En esta línea, una matriz cuadrada de *orden n* tiene *n filas*.

Una matriz cuadrada de orden 3: $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 7 \\ 5 & 6 & 8 \end{bmatrix}$

Traza de una matriz

En una matriz cuadrada de *orden n* la diagonal principal está formada por los elementos a_{ii} $(i = 1, 2, \cdots, n)$. La traza de una matriz cuadrada A, a la que se designa por *tr (A)* *o por* *traza (A)*, es la suma de los elementos de la diagonal principal. Es decir :

$$\boxed{tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}}$$

Ejemplo: $tr(C) = 1 + 3 + 8 = 12$

Matriz simétrica

Se dice que una matriz cuadrada es simétrica si se verifica: $\boxed{A = A'}$

Ejemplo: $D = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 8 \end{bmatrix}$

Matriz diagonal

Se dice que una matriz cuadrada es *diagonal* cuando todos los elementos situados fuera de la diagonal principal son nulos. Es decir, en una matriz diagonal se verifica que $a_{ij} = 0$ cuando $i \neq j$. La matriz diagonal es de la forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{np} \end{bmatrix}$$

Matriz escalar

Se dice que una matriz *diagonal es escalar* cuando todos los elementos de la diagonal principal son idénticos. Es decir, en una matriz escalar se verifica que $a_{ii} = k$ para todo i.

Matriz identidad

Es una matriz escalar en la que $a_{ii} = 1$. Se le denomina I.
Una matriz identidad genérica tiene la forma:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

OPERACIONES CON MATRICES

Igualdad de matrices

La igualdad de dos matrices $\boxed{A = B}$ se cumple si, y sólo si, A y B son del mismo orden y $\boxed{a_{ij} = b_{ij}}$ para todo i y todo j.

Para realizar la suma, las matrices A y B deben ser del mismo orden.

Suma de matrices

La suma de las matrices A y B de orden *n x p* es igual a otra matriz C, también de orden *n x p*, definida de la siguiente forma: $\boxed{A + B = C}$

Los elementos de la matriz $\boxed{C}$ se obtienen: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \forall i, j$

$$\text{Ejemplo: } A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \;,\; B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \;\mapsto\; C = \begin{bmatrix} 2+1 & -1+4 \\ 3-2 & 5+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 11 \end{bmatrix}$$

Multiplicación escalar

La multiplicación escalar de una matriz A por un escalar λ se efectúa multiplicando cada elemento de A por λ. El producto es designado por $\boxed{\lambda A}$

$$\text{Ejemplo: } \lambda = 4 \;,\; A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \;\mapsto\; \lambda A = 4\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 16 & 4 \end{bmatrix}$$

Multiplicación de matrices

Si A es una matriz de orden $\boxed{n}\, x\, m$ y B es una matriz de orden $m\, x \boxed{p}$, el producto de estas dos matrices es otra matriz C de orden *n x p* : $\boxed{A \, x \, B = C}$

El elemento genérico $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}) & (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}) & (a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23}) \\ (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}) & (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) & (a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23}) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 9 & 1 \\ 7 & -2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x1+2x7 & 4x9-2x2 & 4x1+2x6 \\ 3x1+5x7 & 3x9-5x2 & 3x1+5x6 \\ 2x1+6x7 & 2x9-6x2 & 2x1+6x6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 32 & 16 \\ 38 & 17 & 33 \\ 44 & 6 & 38 \end{bmatrix}$$

⊙ **El producto de matrices no es conmutativo:** $\boxed{A \times B \neq B \times A}$

Sean las matrices: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ **,** $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x1+3x0 & 2x5+3x6 \\ 4x1+1x0 & 4x5+1x6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 28 \\ 4 & 26 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 & 14 \\ 2 & 13 \end{bmatrix}$$

$$B \times A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1x2+5x4 & 1x3+5x1 \\ 0x2+6x4 & 0x3+6x1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & 8 \\ 24 & 6 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 11 & 4 \\ 12 & 3 \end{bmatrix}$$

⊙ **La matriz identidad I es conmutativa:** $\boxed{A \times I = I \times A}$

$$A \times I = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x1+3x0 & 2x0+3x1 \\ 4x1+1x0 & 4x0+1x1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = A$$

$$I \times A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1x2+0x4 & 1x3+0x1 \\ 0x2+1x4 & 0x3+1x1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = A$$

Determinante de una matriz

El determinante de una matriz cuadrada A, al que se designa por $|A|$, es un escalar que se obtiene por la suma de $n!$ términos, cada uno de los cuales es el producto de *n* elementos. Se obtiene mediante la fórmula:

$$|A| = \sum \pm a_{1j}\, a_{2k} \cdots a_{nq}$$

En la expresión anterior cada sumando se obtiene permutando el segundo subíndice. El signo de cada sumando + o − según que el número de permutaciones realizado a partir de la ordenación original sea par o impar.

Si $|A| = 0$ se dice que la matriz A es singular

Ejemplos: $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}$

$$|B| = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} b_{11}\,b_{22}\,b_{33} + b_{21}\,b_{32}\,b_{13} + b_{31}\,b_{23}\,b_{12} - \\ - b_{13}\,b_{22}\,b_{31} - b_{23}\,b_{32}\,b_{11} - b_{33}\,b_{21}\,b_{12} \end{array}$$

Propiedades de los determinantes

- ⊙ **El determinante de una matriz cuadrada es igual al determinante de su transpuesta:** $\boxed{|A| = |A'|}$

- ⊙ **El determinante del producto de matrices cuadradas es igual al producto de los determinantes de cada una de las matrices:**

$$|ABC| = |A| \text{ x } |B| \text{ x } |C|$$

- ⊙ **Si se multiplica una matriz A de orden n por una constante h, se verifica:**

$$|hA| = h^n \text{ x } |A|$$

- ⊙ **Si una matriz A tiene dos filas, o dos columnas, idénticas o proporcionales, entonces:** $|A| = 0$

Matriz inversa

La inversa de una matriz cuadrada A es una matriz B que verifica: $\boxed{AB = BA = I}$

En general, a la matriz B que cumple esta propiedad se le designa por A^{-1}**, con lo cual:** $\boxed{A\,A^{-1} = A^{-1}\,A = I}$

Ejemplo: $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \mapsto A' = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad |A| = |A'| = 10$

$$A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/10 & -1/10 \\ -2/10 & 4/10 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}\,A = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$A\,A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} = I$$

$\boxed{\text{Propiedades de las matrices}}$

⊙ **La inversa de un producto de matrices ABC es igual a:** $\boxed{(ABC)^{-1} = C^{-1} B^{-1} A^{-1}}$

⊙ **La transpuesta de una inversa es igual a la inversa de la transpuesta:** $\boxed{(A^{-1})' = (A')^{-1}}$

⊙ **El determinante de la inversa de una matriz es igual al recíproco del determinante de la matriz original, es decir:** $\boxed{|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}}$

MATRICES Y DETERMINANTES: OPERACIONES

Calcular $A \,.\, (B + C)$**, siendo:**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$B + C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A \,.\, (B + C) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3.3 + 2.1 + 1.5 & 3.5 + 2.1 + 1.2 & 3.(-1) + 2.2 + 1.2 \\ 4.3 + 0.1 + 2.5 & 4.5 + 0.1 + 2.2 & 4.(-1) + 0.2 + 2.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 19 & 3 \\ 22 & 24 & 0 \end{pmatrix}$$

Dadas las matrices A y B, obtener los productos AB y BA, donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$A\,.\,B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 1.5 + 2.3 + 4.0 = 11$$

$$B\,.\,A = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.1 & 5.2 & 5.4 \\ 3.1 & 3.2 & 3.4 \\ 0.1 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 20 \\ 3 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcular X tal que $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 11 \end{pmatrix} . X = \begin{pmatrix} 26 & 21 \\ 69 & 59 \end{pmatrix}$

Solución:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 11 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 21 \\ 69 & 59 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3a+4c & 3b+4d \\ 7a+11c & 7b+11d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 21 \\ 69 & 59 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3a+4c & 3b+4d \\ 7a+11c & 7b+11d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 21 \\ 69 & 59 \end{pmatrix} \mapsto \begin{array}{l} \begin{cases} 3a+4c = 26 \\ 7a+11c = 69 \end{cases} \Rightarrow \quad a = 2 \quad c = 5 \\ \begin{cases} 3b+4d = 21 \\ 7b+11d = 59 \end{cases} \Rightarrow \quad b = -1 \quad d = 6 \end{array}$$

en consecuencia, $X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

Resolver el sistema de ecuaciones de matrices $\begin{cases} X - 3Y = A \\ 2X + 3Y = B \end{cases}$

donde: $A = \begin{pmatrix} -20 & -5 \\ -2 & -15 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 23 & 17 \\ -4 & 15 \end{pmatrix}$

Solución:

$$\begin{cases} X - 3Y = A \\ 2X + 3Y = B \end{cases} \mapsto \quad 3X = A + B \quad \mapsto \quad 3X = \begin{pmatrix} -20 & -5 \\ -2 & -15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 23 & 17 \\ -4 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 12 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3 & 12\\ -6 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 4\\ -2 & 0\end{pmatrix}$$

$$X-3Y=A \quad \mapsto \quad 3Y=X-A \quad \mapsto \quad 3Y=\begin{pmatrix}1 & 4\\ -2 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-20 & -5\\ -2 & -15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21 & 9\\ 0 & 15\end{pmatrix}$$

$$Y=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}21 & 9\\ 0 & 15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 3\\ 0 & 5\end{pmatrix}$$

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}$, donde a y b son números reales. Calcular A^n

Solución:

$$A=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}$$

$$A^2=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2 & 2ab\\ 0 & a^2\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2\,.\,A=\begin{pmatrix}a^2 & 2ab\\ 0 & a^2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^3 & 3a^2b\\ 0 & a^3\end{pmatrix}$$

$$A^4=A^3\,.\,A=\begin{pmatrix}a^3 & 3a^2b\\ 0 & a^3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^4 & 4a^3b\\ 0 & a^4\end{pmatrix}$$

....

$$A^n=\begin{pmatrix}a^n & na^{n-1}b\\ 0 & a^n\end{pmatrix}$$

Hallar la potencia n-ésima de $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

Solución:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^2=A.A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 . A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 . A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por inducción: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & a_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Para calcular a_n se considera la sucesión: $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 6$, $a_4 = 10$

a_n	d_1	d_2
1		
	2	
3		1
	3	
6		1
	4	
10		

Es una progresión aritmética de segundo orden, por lo que se busca un polinomio de segundo grado $a_n = a + bn + cn^2$

$$\begin{array}{l} n=1: \quad a_1 = a+b+c = 1 \\ n=2: \quad a_2 = a+2b+4c = 3 \\ n=3: \quad a_3 = a+3b+9c = 6 \end{array} \mapsto \begin{array}{l} \begin{cases} a+b+c=1 \\ a+2b+4c=3 \end{cases} \\ \begin{cases} a+b+c=1 \\ a+3b+9c=6 \end{cases} \end{array} \mapsto \begin{array}{l} a=0 \\ b=1/2 \\ c=1/2 \end{array}$$

$$a_n = a + bn + cn^2 = \frac{n+n^2}{2} = \frac{n(1+n)}{2}$$

Finalmente, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \dfrac{n(1+n)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, obtener todas las matrices que conmutan con A

Solución:

Sea la matriz $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tal que $A.B = B.A$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ c & 2c+d \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a+2c=a \\ c=c \end{cases} \mapsto \quad c=0 \qquad \begin{cases} b+2d=2a+b \\ d=2c+d \end{cases} \mapsto \quad a=d$$

$$B=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad \forall\, a,\, b \in \mathbb{R}$$

Dado el determinante $|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 6 & 0 & -2 \end{vmatrix}$, desarrollar por los elementos de su segunda fila y por los elementos de la tercera columna. Por la regla de Sarrus.

Solución:

⊙ **El desarrollo de $|A|$ por la segunda fila:** $\boxed{|A| = a_{21}\,.\,A_{21} + a_{22}\,.\,A_{22} + a_{23}\,.\,A_{23}}$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -[-2-0]=2 \qquad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = -4-18=-22$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = -[0-6]=6$$

$$|A| = a_{21}\,.\,A_{21} + a_{22}\,.\,A_{22} + a_{23}\,.\,A_{23} = 4.2 + 2.(-22) + 5.6 = -6$$

⊙ **El desarrollo de $|A|$ por la tercera columna:** $\boxed{|A| = a_{13}\,.\,A_{13} + a_{23}\,.\,A_{23} + a_{33}\,.\,A_{33}}$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = 0-12=-12 \qquad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = -(0-6)=6$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 4-4=0$$

$$|A| = a_{13}\,.\,A_{13} + a_{23}\,.\,A_{23} + a_{33}\,.\,A_{33} = 3.(-12) + 5.6 + (-2).0 = -6$$

⊙ **El desarrollo de $|A|$ por Sarrus:**

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 6 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{matrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 6 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2.2.(-2) + 4.0.3 + 6.5.1 = 22 \\ + \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 6 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -3.2.6 - 5.0.2 - (-2).4.1 = -28 \end{matrix} = 22-28=-6$$

Desarrollar el determinante $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 & 3 \\ 7 & 3 & 12 & 8 \\ 4 & 6 & -5 & 4 \\ 3 & 2 & 6 & -3 \end{vmatrix}$

Solución:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 & 3 \\ 7 & 3 & 12 & 8 \\ 4 & 6 & -5 & 4 \\ 3 & 2 & 6 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow[F_2 - 2F_1]{} \begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 & 3 \\ 1 & -5 & -2 & 2 \\ 4 & 6 & -5 & 4 \\ 3 & 2 & 6 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow[F_1 - 3F_2]{} \begin{vmatrix} 0 & 19 & 13 & -3 \\ 1 & -5 & -2 & 2 \\ 4 & 6 & -5 & 4 \\ 3 & 2 & 6 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_3 - 4F_2]{} \begin{vmatrix} 0 & 19 & 13 & -3 \\ 1 & -5 & -2 & 2 \\ 0 & 26 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & 6 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow[F_4 - 3F_2]{} \begin{vmatrix} 0 & 19 & 13 & -3 \\ \boxed{1} & -5 & -2 & 2 \\ 0 & 26 & 3 & -4 \\ 0 & 17 & 12 & -9 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 19 & 13 & -3 \\ 26 & 3 & -4 \\ 17 & 12 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 19 & 13 & 3 \\ 26 & 3 & 4 \\ 17 & 12 & 9 \end{vmatrix} = -1774$$

Desarrollar el determinante $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x \end{vmatrix}$

Solución:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 + F_1 \\ F_3 + F_1 \\ F_4 + F_1}]{} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x+1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & x+1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & x+1 \end{vmatrix} = (x+1)^3$$

Desarrollar el determinante de Vandermonde $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

Solución:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \xrightarrow[F_2 - aF_1]{F_3 - aF_2} \begin{vmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2-ab & c^2-ac \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b(b-a) & c(c-a) \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a).(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & c \end{vmatrix} = (b-a).(c-a).(c-b)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a).(c-a).(c-b)$$

Calcula el valor del determinante $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \log 3 & \log 30 & \log 300 \\ (\log 3)^2 & (\log 30)^2 & (\log 300)^2 \end{vmatrix}$

Solución:

$$\log 30 = \log(3.10) = \log 10 + \log 3 = 1 + \log 3$$
$$\log 300 = \log(3.100) = \log 100 + \log 3 = 2 + \log 3$$

$$\odot\ |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \log 3 & \log 30 & \log 300 \\ (\log 3)^2 & (\log 30)^2 & (\log 300)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \log 3 & 1+\log 3 & 2+\log 3 \\ (\log 3)^2 & (1+\log 3)^2 & (2+\log 3)^2 \end{vmatrix} \mapsto$$

$$\xrightarrow[C_2 - C_1]{C_3 - C_2} \begin{vmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ \log 3 & 1 & 1 \\ (\log 3)^2 & 1+2\log 3 & 3+2\log 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1+2\log 3 & 3+2\log 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 + 2\log 3 - 1 - 2\log 3 = 2$$

$$\odot\ |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \log 3 & \log 30 & \log 300 \\ (\log 3)^2 & (\log 30)^2 & (\log 300)^2 \end{vmatrix} \xrightarrow[F_2 - (\log 3)F_1]{F_3 - (\log 3)F_2}$$

$$= (\log 30 - \log 3)\,.\,(\log 300 - \log 3)\,.\,(\log 300 - \log 30) = \log 10\,.\,\log 100\,.\,\log 10 = 2$$

Resolver $\begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix} = 0$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{\boxed{C_1} + C_2 + C_3 + C_4} \begin{vmatrix} 3+3x & x & x & x \\ 3+3x & 3 & x & x \\ 3+3x & x & 3 & x \\ 3+3x & x & x & 3 \end{vmatrix} = (3+3x)\begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 1 & 3 & x & x \\ 1 & x & 3 & x \\ 1 & x & x & 3 \end{vmatrix} =$$

$$\xrightarrow[F_4 - F_1]{\substack{F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1}} (3+3x)\begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 0 & 3-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-x \end{vmatrix} = (3+3x).(3-x)^3 = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \textit{ triple} \end{cases}$$

Valor del determinante $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1+a & 2+a & 3+a & 4+a \\ a & a & a & a \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix}$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1+a & 2+a & 3+a & 4+a \\ a & a & a & a \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & a & a & a \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 0 + 0 = 0$$

Los dos determinantes valen 0 al tener dos filas iguales o proporcionales.

Valor del determinante $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 7 & 1 \\ 2 & -5 & 3 & 6 \\ 2 & 0 & 4 & -3 \\ 6 & 2 & 8 & 0 \end{vmatrix}$

Solución:

$$\odot \quad \begin{vmatrix} 4 & 2 & 7 & 1 \\ 2 & -5 & 3 & 6 \\ 2 & 0 & 4 & -3 \\ 6 & 2 & 8 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\boxed{2F_2} - F_1} \boxed{\frac{1}{2}}\begin{vmatrix} 4 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & -12 & -1 & 11 \\ 2 & 0 & 4 & -3 \\ 6 & 2 & 8 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\boxed{2F_3} - F_1}$$

$$\longrightarrow \boxed{\frac{1}{2}}\cdot\boxed{\frac{1}{2}}\begin{vmatrix} 4 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & -12 & -1 & 11 \\ 0 & -2 & 1 & -7 \\ 6 & 2 & 8 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\boxed{2F_4} - 3F_1} \boxed{\frac{1}{2}}\cdot\boxed{\frac{1}{2}}\cdot\boxed{\frac{1}{2}}\begin{vmatrix} \boxed{4} & 2 & 7 & 1 \\ 0 & -12 & -1 & 11 \\ 0 & -2 & 1 & -7 \\ 0 & -2 & -5 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{4}{8}\begin{vmatrix} -12 & -1 & 11 \\ -2 & 1 & -7 \\ -2 & -5 & -3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 6 & -1 & 11 \\ 1 & 1 & -7 \\ 1 & -5 & -3 \end{vmatrix} = -(-18-55+7-11-210-3) = 290$$

$$\odot \begin{vmatrix} 4 & 2 & 7 & 1 \\ 2 & -5 & 3 & 6 \\ 2 & 0 & 4 & -3 \\ 6 & 2 & 8 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[F_4 - 3F_2]{\substack{F_1 - 2F_2 \\ F_3 - F_2}} \begin{vmatrix} 0 & 12 & 1 & -11 \\ \boxed{2} & -5 & 3 & 6 \\ 0 & 5 & 1 & -9 \\ 0 & 17 & -1 & -18 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 12 & 1 & -11 \\ 5 & 1 & -9 \\ 17 & -1 & -18 \end{vmatrix} \mapsto$$

$$\xrightarrow[F_2 + F_3]{F_1 + F_3} -2\begin{vmatrix} 29 & 0 & -29 \\ 22 & 0 & -27 \\ 17 & \boxed{-1} & -18 \end{vmatrix} = -2\,.\,29\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 22 & -27 \end{vmatrix} = -2\,.\,29\,.\,(-5) = 290$$

Descomponer la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ como suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica.

Solución:

Sean las matrices S (simétrica, coincide con su transpuesta, es decir $S = S^t$) y A (antisimétrica, cuando su transpuesta es igual a su negativa, esto es, $A = -A^t$).

$$\begin{cases} M = S + A \\ M^t = S^t + A^t \end{cases} \mapsto \begin{cases} M = S + A \\ M^t = S - A \end{cases} \mapsto \quad S = \frac{1}{2}(M + M^t) \quad A = \frac{1}{2}(M - M^t)$$

$$S = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 2 & \frac{7}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{7}{2} & 5 & \frac{9}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{9}{2} & 4 \end{pmatrix}$$

$$A=\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}2&3&-1\\4&5&7\\0&2&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&4&0\\3&5&2\\-1&7&4\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}0&\frac{-1}{2}&\frac{-1}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{5}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{-5}{2}&0\end{pmatrix}$$

 **Obtener la matriz inversa de** $A=\begin{pmatrix}3&-2&1\\4&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix}$

Solución:

$$|A|=\begin{vmatrix}3&-2&1\\4&1&0\\-1&2&3\end{vmatrix}=42$$

La matriz transpuesta $A^t=\begin{pmatrix}3&4&-1\\-2&1&2\\1&0&3\end{pmatrix}$ **, siendo** $|A|=|A^t|=42$

La matriz adjunta $A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}$

Los adjuntos correspondientes:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&2\\0&3\end{vmatrix}=3 \qquad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-2&2\\1&3\end{vmatrix}=8 \qquad A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-2&1\\1&0\end{vmatrix}=-1$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}4&-1\\0&3\end{vmatrix}=-12 \qquad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}3&-1\\1&3\end{vmatrix}=10 \qquad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}3&4\\1&0\end{vmatrix}=4$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}4&-1\\1&2\end{vmatrix}=9 \qquad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}3&-1\\-2&2\end{vmatrix}=-4 \qquad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}3&4\\-2&1\end{vmatrix}=11$$

En definitiva, la matriz adjunta: $A^*=\begin{pmatrix}3&8&-1\\-12&10&4\\9&-4&11\end{pmatrix}$

La matriz inversa $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\,A^*$

$$A^{-1} = \frac{1}{42}\begin{pmatrix} 3 & 8 & -1 \\ -12 & 10 & 4 \\ 9 & -4 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{42} & \frac{8}{42} & \frac{-1}{42} \\ \frac{-12}{42} & \frac{10}{42} & \frac{4}{42} \\ \frac{9}{42} & \frac{-4}{42} & \frac{11}{42} \end{pmatrix}$$

- **Téngase en cuenta que una matriz cuadrada A es invertible sólo si $|A| \neq 0$**

- **La matriz inversa A^{-1} verifica la propiedad conmutativa $A.A^{-1} = A^{-1}.\,A = I$**

$$A.A^{-1} = \frac{1}{42}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 8 & -1 \\ -12 & 10 & 4 \\ 9 & -4 & 11 \end{pmatrix} = \frac{1}{42}\begin{pmatrix} 42 & 0 & 0 \\ 0 & 42 & 0 \\ 0 & 0 & 42 \end{pmatrix} = I$$

$$A^{-1}.\,A = \frac{1}{42}\begin{pmatrix} 3 & 8 & -1 \\ -12 & 10 & 4 \\ 9 & -4 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{42}\begin{pmatrix} 42 & 0 & 0 \\ 0 & 42 & 0 \\ 0 & 0 & 42 \end{pmatrix} = I$$

Halla el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solución:

El rango de una matriz cuadrada es el número de filas o columnas independientes.

En este caso, el rango de A como máximo puede ser 3.

El menor $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \;\Rightarrow\; r(A) \geq 2$

Combinando $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ **todos los menores de tercer orden que se pueden obtener:**

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -4 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

Al existir un menor de tercer orden distinto de cero, se concluye que $r(A) = 3$

Halla el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -7 & 17 & -4 \end{pmatrix}$

Solución:

El rango de una matriz cuadrada es el número de filas o columnas independientes, por consiguiente, el rango como máximo puede ser 4.

De otra parte, se observa que $F_3 = F_1 + F_2$, es decir, la tercera fila es combinación lineal de la primera y segunda fila. Por tanto, se puede suprimir sin que altere el rango de la matriz A.

Queda la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -7 & 17 & -4 \end{pmatrix}$ que como máximo tiene rango 3

se tiene que $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow r(A) \geq 2$

Orlando el menor de todas las formas posibles, se obtiene:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -7 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 17 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

Como resulta que, $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -7 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 17 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 0$

El rango no puede ser 3, por tanto: $r(A) = 2$

Calcular el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & -1 & 8 \\ -1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 10 & 13 & 11 \end{pmatrix}$

Solución:

Mediante el método de reducción, se tiene:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & -1 & 8 \\ -1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 10 & 13 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_4 + F_2]{\substack{F_1 + 2F_2 \\ F_3 + 3F_2}} \begin{pmatrix} 0 & 5 & 11 & 7 & 18 \\ -1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 13 & 17 & 16 \\ 0 & 5 & 13 & 17 & 16 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_4 - F_3]{F_3 - F_1}$$

$$\xrightarrow[F_4 - F_3]{F_3 - F_1} \begin{pmatrix} 0 & 5 & 11 & 7 & 18 \\ -1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 5 & 11 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{rango} = 3$$

Sea A una matriz cuadrada diagonal.
¿Qué condiciones deben cumplir los elementos para que sea inversible?.
¿Y cuáles para que dicha inversa coincida con A?

Solución:

Sea $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$

Para que exista A^{-1} tiene que verificarse que $|A| = a.b.c \neq 0$, es decir, que ningún elemento de la diagonal principal sea nulo.

$$A = A^t = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \qquad |A| = a.b.c \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 1/b & 0 \\ 0 & 0 & 1/c \end{pmatrix}$$

Para que $A^t = A^{-1} \mapsto \begin{cases} a = 1/a \\ b = 1/b \\ c = 1/c \end{cases} \mapsto \begin{cases} a^2 = 1 & a = \pm 1 \\ b^2 = 1 & b = \pm 1 \\ c^2 = 1 & c = \pm 1 \end{cases}$

Las matrices que cumplen estas condiciones son:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcular el valor del determinante $\begin{vmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix}$

Solución:

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2+2ab+b^2 & ab & ab & b^2 \\ a^2+2ab+b^2 & a^2 & b^2 & ab \\ a^2+2ab+b^2 & b^2 & a^2 & ab \\ a^2+2ab+b^2 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix} = (a+b)^2 \begin{vmatrix} 1 & ab & ab & b^2 \\ 1 & a^2 & b^2 & ab \\ 1 & b^2 & a^2 & ab \\ 1 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (a+b)^2 \begin{vmatrix} 1 & ab & ab & b^2 \\ 0 & a^2-ab & b^2-ab & ab-b^2 \\ 0 & b^2-ab & a^2-ab & ab-b^2 \\ 0 & 0 & 0 & a^2-b^2 \end{vmatrix} = (a+b)^2 \begin{vmatrix} a(a-b) & b(b-a) & b(b-a) \\ b(b-a) & a(a-b) & b(b-a) \\ 0 & 0 & a^2-b^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (a+b)^2 .\, (a^2-b^2) \begin{vmatrix} a(a-b) & -b(a-b) \\ -b(a-b) & a(a-b) \end{vmatrix} = (a+b)^2 .(a^2-b^2).(a-b)^2 \begin{vmatrix} a & -b \\ -b & a \end{vmatrix} =$$

$$= \boxed{(a+b)^2}.(a^2-b^2).\boxed{(a-b)^2}.(a^2-b^2) = \left[(a+b).(a-b)\right]^2 .\, (a^2-b^2)^2 =$$

$$= (a^2-b^2)^2 .\, (a^2-b^2)^2 = (a^2-b^2)^4$$

Hallar los valores para los que la matriz A no tiene inversa: $A = \begin{pmatrix} |x| & 1 \\ |x-2| & 2 \end{pmatrix}$

Solución:

La matriz no tiene inversa cuando $|A| = 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} |x| & 1 \\ |x-2| & 2 \end{vmatrix} = 2\,|x| - |x-2| = 0$$

$-\infty$ 0 2 ∞

$2\,\lvert x\rvert$	$-2x$	$2x$	$2x$
$\lvert x-2\rvert$	$-(x-2)$	$-(x-2)$	$x-2$
$2\,\lvert x\rvert - \lvert x-2\rvert = 0$	$-2x + x - 2 =$ $= -x - 2 = 0$ $\boxed{x = -2}$	$2x + x - 2 =$ $= 3x - 2 = 0$ $\boxed{x = \frac{2}{3}}$	$2x - x + 2 =$ $= x + 2 = 0$ $\boxed{x = -2}$

$$|A| = \begin{cases} x = -2 & x \le 0 \\ x = \dfrac{2}{3} & 0 < x \le 2 \\ x = -2 & x > 2 \end{cases} \quad \mapsto$$

La matriz A tiene inversa para todo valor real de x, excepto para $x = -2$ **y** $x = \dfrac{3}{2}$

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Comprueba si $(A.B)^{-1} = B^{-1}.\,A^{-1}$

Solución:

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad |A| = |A^t| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \qquad A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$B^t = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad |B| = |B^t| = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -4 \qquad B^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$A.B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (A.B)^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} \qquad |A.B| = |(A.B)^t| = -8$$

$$\begin{cases} (A.B)^{-1} = -\dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} 0 & -8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/8 & -3/8 \end{pmatrix} \\ \\ B^{-1}.\ A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/8 & -3/8 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow \quad (A.B)^{-1} = B^{-1}.\ A^{-1}$$

Calcula X tal que $X - B^2 = A.B$, donde: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solución:

$$X - B^2 = A.B \quad \Rightarrow \quad X = A.B + B^2$$

$$A.B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = A.B + B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Determinar los valores de m para los que la matriz $X = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ verifique $X^2 - \dfrac{5}{2}X + I = 0$

Solución:

$$X^2 - \frac{5}{2}X + I = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \frac{5}{2}\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} m^2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \frac{5}{2}\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} m^2 - \dfrac{5}{2}m + 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$m^2-\frac{5}{2}m+1=0 \quad \mapsto \quad 2m^2-5m+2=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} m=2 \\ m=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Resuelve la ecuación $AXB=C$, donde: $A=\begin{pmatrix}3&2\\4&3\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$

Solución:

$$AXB=C \quad \mapsto \quad A^{-1}AXB=A^{-1}C \quad \mapsto \quad A^{-1}AXB\,B^{-1}=A^{-1}C\,B^{-1}$$

$$I\,X\,I=A^{-1}C\,B^{-1} \quad \mapsto \quad \boxed{X=A^{-1}C\,B^{-1}}$$

Adviértase que el producto de matrices no es conmutativo. En esta línea, hay que multiplicar por la izquierda A^{-1} y por la derecha B^{-1}.

De otra parte, $A^{-1}A=B\,B^{-1}=I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$$A=\begin{pmatrix}3&2\\4&3\end{pmatrix} \mapsto A^t=\begin{pmatrix}3&4\\2&3\end{pmatrix} \mapsto |A|=\begin{vmatrix}3&2\\4&3\end{vmatrix}=1 \mapsto A^{-1}=\begin{pmatrix}3&-2\\-4&3\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix} \mapsto B^t=\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix} \mapsto |B|=\begin{vmatrix}2&3\\1&2\end{vmatrix}=1 \mapsto B^{-1}=\begin{pmatrix}2&-3\\-1&2\end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}C\,B^{-1} \mapsto X=\begin{pmatrix}3&-2\\-4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-3\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-3\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$$

Halla la matriz X que verifica $AB+CX=D$, siendo:

$A=\begin{pmatrix}-2&0&1\\1&-1&5\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3&1\\0&1\\-1&2\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ $D=\begin{pmatrix}-9&3\\-8&17\end{pmatrix}$

Solución:

$$AB+CX=D \quad \mapsto \quad CX=D-AB \quad \mapsto \quad C^{-1}CX=C^{-1}(D-AB) \quad \mapsto \quad \boxed{X=C^{-1}(D-AB)}$$

⊙ $C=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix} \mapsto C^t=\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix} \mapsto |C|=\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}=-2 \mapsto C^{-1}=\dfrac{-1}{2}\begin{pmatrix}4&-2\\-3&1\end{pmatrix}$

⊙ $AB=\begin{pmatrix}-2&0&1\\1&-1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\0&1\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7&0\\-2&10\end{pmatrix}$

$$\mathbf{D}-\mathbf{AB}=\begin{pmatrix}-9 & 3\\ -8 & 17\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-7 & 0\\ -2 & 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ -6 & 7\end{pmatrix}$$

$\odot$ $\mathbf{X}=\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{D}-\mathbf{AB}) \quad \mapsto \quad \mathbf{X}=\dfrac{-1}{2}\begin{pmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 3\\ -6 & 7\end{pmatrix}=\dfrac{-1}{2}\begin{pmatrix}4 & -2\\ 0 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$