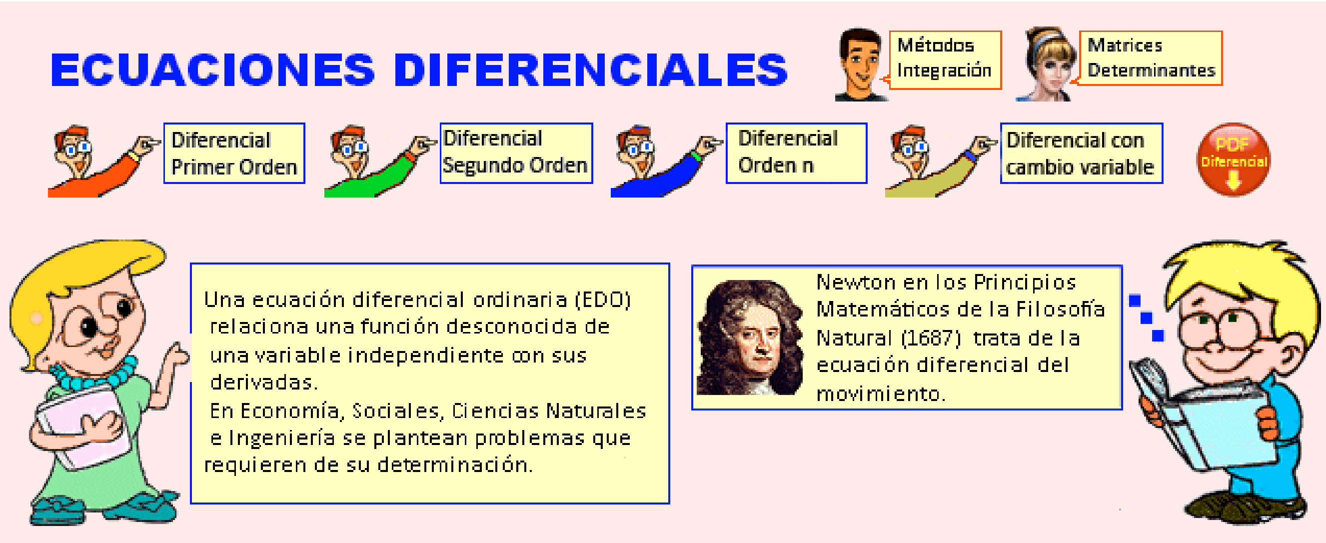


ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

Resolver $x + y\,y' = 0$

$$x + y\frac{dy}{dx} = 0 \quad \mapsto \quad y\,dy = -x\,dx \quad \mapsto \quad \int y\,dy = -\int x\,dx \quad \mapsto \quad \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C$$

$$x^2 + y^2 = 2C$$

Resolver $x^2\, y' - y = 0$

$$x^2\frac{dy}{dx} - y = 0 \quad \mapsto \quad x^2\,dy = y\,dx \quad \mapsto \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x^2}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x^2} \quad \Rightarrow \quad L|y| = -\frac{1}{x} + C \quad \mapsto \quad y = \pm\, e^{-\frac{1}{x} + C} = \pm\, h\,e^{-\frac{1}{x}} = k\,e^{-\frac{1}{x}}$$

Resolver $(1 + x^2)\,y' = 1 + y^2$

$$(1 + x^2)\frac{dy}{dx} = 1 + y^2 \quad \mapsto \quad \frac{dy}{1 + y^2} = \frac{dx}{1 + x^2} \quad \mapsto \quad \int \frac{dy}{1 + y^2} = \int \frac{dx}{1 + x^2}$$

$$\operatorname{arc\,tg} y = \operatorname{arc\,tg} x + C \quad \mapsto \quad y = \operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x + C) = \frac{x + \operatorname{arc\,tg} C}{1 - x.\operatorname{arc\,tg} C} = \frac{x + k}{1 - k\,x}$$

Resolver $y' + y\,tg\,x = 0$

$$\frac{dy}{dx} + y\,tg\,x = 0 \quad \mapsto \quad \frac{dy}{dx} = -y\,tg\,x \quad \mapsto \quad \frac{dy}{y} = -\,tg\,x\,dx \quad \mapsto \quad \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{sen\,x}{cos\,x}dx$$

$$L|y| = L|cos\,x| + C = L|cos\,x| + Lk = L|k\,cos\,x| \quad \mapsto \quad y = e^{k\,cos\,x} = K\,cos\,x$$

Resolver $y' = e^{x-y}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{e^y} \quad \mapsto \quad e^y dy = e^x dx \quad \mapsto \quad \int e^y dy = \int e^x dx$$

$$e^y = e^x + C \quad \mapsto \quad y = L(e^x + C) \;\; \text{donde} \;\; e^x + C > 0$$

Resolver $y' + \frac{2y}{x} = 0$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = 0 \quad \mapsto \frac{dy}{dx} = -\frac{2y}{x} \quad \mapsto \quad \frac{dy}{y} = -\frac{2dx}{x} \quad \mapsto \quad \int \frac{dy}{y} = -2\int \frac{dx}{x}$$

$$Ly = -2L|x| + C = L\,x^{-2} + C = L\frac{1}{x^2} + C = L\frac{1}{x^2} + Lk = L\frac{k}{x^2}$$

$$y = \frac{k}{x^2}$$

Resolver $2xyy' = x^2 + y^2$

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{2xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)$$

Haciendo el cambio $z = \frac{y}{x} \quad \mapsto \quad y = xz \quad \mapsto \quad y' = z + xz'$

con lo que $y' = z + xz' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z} + z\right) \quad \mapsto \quad xz' = \frac{1 + z^2}{2z} - z = \frac{1 - z^2}{2z}$

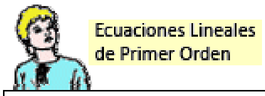
$$x\frac{dz}{dx} = \frac{1 - z^2}{2z} \quad \mapsto \quad \frac{2z}{1 - z^2}dz = \frac{dx}{x} \quad \mapsto \quad \int \frac{2z}{1 - z^2}dz = \int \frac{dx}{x} \qquad \text{si } z \neq \pm 1$$

$$-L|1 - z^2| + C = L|x| \quad \mapsto \quad L\frac{k}{|1 - z^2|} = L|x| \quad \mapsto \quad \frac{k}{1 - z^2} = x \quad \mapsto \quad 1 - z^2 = \frac{k}{x}$$

Deshaciendo el cambio $z = \dfrac{y}{x}$

$$z^2 - 1 = -\frac{k}{x} \quad \mapsto \quad \frac{y^2}{x^2} = 1 - \frac{k}{x} = \frac{x-k}{x} \quad \mapsto \quad y^2 = x\,(x-k) = x^2 - x\,k$$

$$\text{Resultando} \begin{cases} \text{Si } \ k \neq 0 \ \text{ son dos hipérbolas } \ y = \pm\sqrt{x^2 - x\,k} \\ \text{Si } \ k = 0 \ \text{ son dos bisectrices } \ y = \pm x \end{cases}$$



ECUACIONES LINEALES DE PRIMER ORDEN

Son de la forma $a(x)\,y' + b(x)\,y = c(x)$

donde a, b y c son funciones de x

Se parte de la ecuación sin segundo miembro $a(x)\,y' + b(x)\,y = 0$

separando las variables, queda: $\dfrac{dy'}{y} = -\dfrac{b(x)}{a(x)}\,dx$

con lo que $y = k\,e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}\,dx} = k\,z$

En la ecuación $y = k\,z$ se considera a k como función de x

derivando: $y' = k'z + k\,z$

Se calcula k, finalizando al sustituir en $y = k\,z$

Resolver $x\,y' - 2\,y = x^3$

Partiendo de la ecuación sin segundo miembro:

$x\,y' - 2\,y = 0$

$$x\frac{dy}{dx} - 2\,y = 0 \quad \mapsto \quad x\frac{dy}{dx} = 2\,y \quad \mapsto \quad \frac{dy}{y} = 2\frac{dx}{x} \quad \mapsto \quad \int \frac{dy}{y} = 2\int \frac{dx}{x}$$

$$L|y| = 2L|x| + C \quad \mapsto \quad L|y| = L\,x^2 + L\,k \quad \mapsto \quad L\left|\frac{y}{k}\right| = L\,x^2 \quad \mapsto \quad y = k\,x^2$$

Suponiendo k función de x, se deriva:

$$y = k\,x^2 \quad \mapsto \quad y' = k'x^2 + 2\,k\,x$$

Sustituyendo en la ecuación dada $x\,y' - 2y = x^3$ se tiene:

$$x\,(k'x^2 + 2kx) - 2\,(kx^2) = x^3 \quad \mapsto \quad k'x^3 = x^3 \quad \mapsto \quad k' = 1$$

$$\int dk = \int dx \quad \mapsto \quad k = x + \lambda$$

Finalmente, $\quad y = x^2(x+\lambda) \quad = x^3 + \lambda\,x^2$

Resolver $\quad y'\cos x \;+\; y\,\mathrm{sen}\,x \;=\; 1$

Partiendo de la ecuación sin segundo miembro:

$$y'\cos x \;+\; y\,\mathrm{sen}\,x \;=\; 0 \quad \mapsto \quad \cos x\,\frac{dy}{dx} \;= -\,y\,\mathrm{sen}\,x \quad \mapsto \quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{-\,\mathrm{sen}\,x}{\cos x}\,dx$$

$$L|y| = L|\cos x| + C \quad \mapsto \quad L|y| = L|\cos x| + Lk \quad \mapsto \quad L\left|\frac{y}{k}\right| = L|\cos x| \quad \mapsto \quad y = k\,\cos x$$

Suponiendo k función de x, se deriva:

$$y = k\,\cos x \quad \mapsto \quad y' = k'\cos x - k\,\mathrm{sen}\,x$$

Sustituyendo en la ecuación dada $y'\cos x \;+\; y\,\mathrm{sen}\,x \;=\; 1$ se tiene:

$$(k'\cos x - k\,\mathrm{sen}\,x)\cos x \;+\; (k\,\cos x)\,\mathrm{sen}\,x \;=\; 1 \quad \mapsto \quad k'\cos^2 x = 1$$

$$\int dk = \int \frac{dx}{\cos^2 x} \quad \mapsto \quad k = \mathrm{tg}\,x + \lambda$$

Finalmente, $\quad y = k\,\cos x = (\mathrm{tg}\,x + \lambda)\,\cos x = \mathrm{sen}\,x + \lambda\cos x$

Resolver: $\;x\,y' - 2y - Lx = 0$
Determinar la integral con valor cero para $x = 1$

$$x\,y' - 2y = Lx$$

Partiendo de la ecuación sin segundo miembro:

$$x\,y' - 2y = 0$$

$$x\,\frac{dy}{dx} - 2y = 0 \quad \mapsto \quad x\,\frac{dy}{dx} = 2y \quad \mapsto \quad \frac{dy}{y} = 2\,\frac{dx}{x} \quad \mapsto \quad \int \frac{dy}{y} = 2\int \frac{dx}{x}$$

$$L|y| = 2L|x| + C \quad \mapsto \quad L|y| = Lx^2 + Lk \quad \mapsto \quad L\left|\frac{y}{k}\right| = Lx^2 \quad \mapsto \quad y = kx^2$$

Suponiendo k función de x, se deriva:

$$y = kx^2 \quad \mapsto \quad y' = k'x^2 + 2kx$$

Sustituyendo en la ecuación dada $xy' - 2y = x^3$ **se tiene:**

$$x(k'x^2 + 2kx) - 2(kx^2) = Lx \quad \mapsto \quad k'x^3 = Lx \quad \mapsto \quad dk = \frac{Lx}{x^3}dx$$

$$\int dk = \int x^{-3} Lx\, dx \quad \mapsto \quad k = \int x^{-3} Lx\, dx \quad \odot$$

$$u = Lx \quad \mapsto \quad du = \frac{dx}{x}$$

$$dv = x^{-3}dx \quad \mapsto \quad v = \int x^{-3}dx = v = -\frac{1}{2x^2}$$

$$\odot \quad k = \int x^{-3} Lx\, dx = -\frac{Lx}{2x^2} + \frac{1}{2}\int x^{-3}dx = -\frac{Lx}{2x^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{2x^2} + \lambda = -\frac{Lx}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + \lambda$$

Sustituyendo el valor de k en $y = kx^2$ **resulta:**

$$y = kx^2 = \left(-\frac{Lx}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + \lambda\right)x^2 = -\frac{Lx}{2} - \frac{1}{4} + \lambda x^2$$

La integral particular que pasa por $(1,0)$**:**

$$y = -\frac{Lx}{2} - \frac{1}{4} + \lambda x^2 \Big|_{(1,0)} \quad \mapsto \quad 0 = -\frac{1}{4} + \lambda \quad \mapsto \quad \lambda = \frac{1}{4}$$

$$y = -\frac{Lx}{2} - \frac{1}{4} + \frac{x^2}{4} = \frac{1}{4}(x^2 - 2Lx - 1)$$

Resolver: $xy' + y = \text{arc tg}\, x$

Se parte de la ecuación sin segundo miembro: $xy' + y = 0$

$$xy' + y = 0 \quad \mapsto \quad x\frac{dy}{dx} = -y \quad \mapsto \quad \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \quad \mapsto \quad \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$L|y| = -L|x| + C \quad \mapsto \quad L|y| = -L|x| + Lk = L\left|\frac{k}{x}\right| \quad \mapsto \quad y = \frac{k}{x}$$

Derivando la constante k como función de x: $y' = \frac{k'x - k}{x^2} = \frac{k'}{x} - \frac{k}{x^2}$

Sustituyendo en la ecuación dada:

$$x\left(\frac{k'}{x} - \frac{k}{x^2}\right) + \frac{k}{x} = \text{arc tg}\, x \quad \mapsto \quad k' = \text{arc tg}\, x$$

$$k = \int \text{arc tg}\, x\, dx \overset{\bullet}{=} x\, \text{arc tg}\, x - \int \frac{x\, dx}{1+x^2} = x\, \text{arc tg}\, x - \frac{1}{2} L(1+x^2) + \lambda$$

$$\overset{\bullet}{=} \begin{cases} u = \text{arc tg}\, x \Rightarrow du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{cases}$$

Finalmente,

$$y = \frac{k}{x} = \frac{1}{x}\left(x\, \text{arc tg}\, x - \frac{1}{2} L(1+x^2) + \lambda\right) = \text{arc tg}\, x - \frac{L(1+x^2)}{2x} + \frac{\lambda}{x}$$

ECUACIONES DE BERNOUILLI

Son de la forma $y' + a(x)\,y = b(x)\,y^m$

con $m \neq 0$ **y** $m \neq 1$**, valores para los que la ecuación sería lineal de primer orden.**

Se dividen ambos miembros por y^m **:** $\dfrac{y'}{y^m} + \dfrac{a(x)}{y^{m-1}} = b(x)$

Se hace el cambio $z = \dfrac{1}{y^{m-1}}$

resultando: $\dfrac{z'}{1-m} + a(x)\,z = b(x)$

como ecuación lineal de primer orden, se siguen los pasos ya indicados.

Resolver: $x\,y' + 3\,y = x^2\,y^2$

Diviendo ambos miembros por y^2**, queda:** $\dfrac{x\,y'}{y^2} + \dfrac{3}{y} = x^2$ **(1)**

haciendo el cambio $z = \dfrac{1}{y} \mapsto \begin{cases} y = \dfrac{1}{z} \\ z' = \dfrac{-y'}{y^2} \end{cases}$

Sustituyendo en (1) se obtiene la eciación diferencial: $-x\,z' + 3\,z = x^2$ **(2)**

Para resolver (2) se parte de la ecuación sin segundo miembro:

$$-x\,z' + 3\,z = 0$$

$$x\,z' = 3\,z \quad \mapsto \quad x\frac{dz}{dx} = 3\,z \quad \mapsto \quad \frac{dz}{z} = 3\frac{dx}{x} \quad \mapsto \quad \int \frac{dz}{z} = 3\int \frac{dx}{x}$$

$$L|z| = 3L|x| \quad \mapsto \quad L|z| = L|x|^3 + C \quad \mapsto \quad L|z| = L|x|^3 + Lk = L\left|k\,x^3\right|$$

$$z = k\,x^3$$

Derivando la constante k como función de x: $z' = k'x^3 + 3x^2\,k$

Sustituyendo en (2) resulta:

$$-x\,(k'x^3 + 3x^2 k) + 3x^2 k = x^2 \quad \mapsto \quad -k'x^4 = x^2 \quad \mapsto \quad k' = \frac{-1}{x^2}$$

$$\int dk = \int \frac{-dx}{x^2} \quad \mapsto \quad k = \frac{1}{x} + \lambda$$

con lo que,

$$z = k\,x^3 = \left(\frac{1}{x} + \lambda\right)x^3 = x^2 + \lambda\,x^3 = x^2\,(1 + \lambda\,x)$$

Finalmente, $y = \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{x^2\,(1+\lambda x)}$

Resolver: $y' + y = x\,y^3$

dividiendo por y^3 queda $\dfrac{y'}{y^3} + \dfrac{1}{y^2} = x \quad (1)$

con el cambio, $z = \dfrac{1}{y^2} \quad \mapsto \quad \begin{cases} z' = \dfrac{-2\,y'}{y^3} \\ y^2 = \dfrac{1}{z} \end{cases}$

sustituyendo en (1) resulta:

$$\frac{y'}{y^3} + \frac{1}{y^2} = x \quad \mapsto \quad \frac{-z'}{2} + z = x \quad \mapsto \quad -z' + 2\,z = 2\,x \quad (2)$$

Se parte de la ecuación sin segundo miembro $-z' + 2\,z = 0$

$$\frac{dz}{dx} = 2\,z \quad \mapsto \quad \int \frac{dz}{z} = 2\int dx \quad \mapsto \quad L|z| = 2\,x + k \quad \mapsto \quad z = e^{2x+k} = h\,e^{2x}$$

En la ecuación $z = h\,e^{2x}$ se deriva h como función de x:

$$z = h\,e^{2x} \quad \mapsto \quad z' = h'\,e^{2x} + 2\,h\,e^{2x}$$

sustituyendo en (2) queda: $-(h'\,e^{2x} + 2\,h\,e^{2x}) + 2\,h\,e^{2x} = 2\,x$

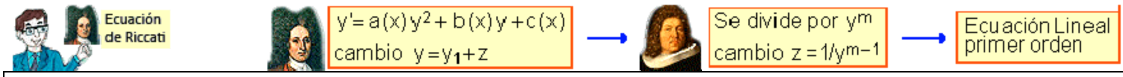
$$-h'\,e^{2x} = 2\,x \quad \mapsto \quad \cancel{\int} dh = \int -2\,x\,e^{-2x}\,dx \quad \overset{\bullet}{\mapsto} \quad h = x\,e^{-2x} + \frac{1}{2}e^{-2x} + \lambda$$

$$\overset{\bullet}{\mapsto} \quad \begin{cases} u = x \;\Rightarrow\; du = dx \\ dv = -2\,e^{-2x}\,dx \;\Rightarrow\; v = e^{-2x} \end{cases} \quad \mapsto \quad \int -2\,x\,e^{-2x}\,dx = x\,e^{-2x} - \int e^{-2x}\,dx$$

Siendo $z = h\,e^{2x}$ se tiene $z = h\,e^{2x} = \left(x\,e^{-2x} + \dfrac{1}{2}e^{-2x} + \lambda\right)e^{2x}$

$$z = x + \frac{1}{2} + \lambda\, e^{2x}$$

Finalmente, $\quad y^2 = \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{\lambda\, e^{2x} + x + \dfrac{1}{2}}$



La ecuación diferencial de Riccati es de la forma: $\; y' = a(x)\, y^2 + b(x)\, y + c(x)$

donde a, b y c son funciones de x. Sea y_1 una solución de la integral.

Se comienza con el cambio $\; y = y_1 + z \quad \mapsto \quad y' = y_1' + z'$

transformando la ecuación diferencial en:

$$y' = a(x)\, y^2 + b(x)\, y + c(x) \quad \mapsto \quad y_1' + z' = a(x)(y_1 + z)^2 + b(x)(y_1 + z) + c(x)$$

Como y_1 es solución particular, verifica: $\; y_1' = a(x)\, y_1^2 + b(x)\, y_1 + c(x)$

después de simplificar, queda: $\; \boxed{z' = a(x)\, z^2 + \left[2a(x)\, y_1 + b(x)\right] z}$

que es una ecuación diferencial de Bernouilli con $m = 2$

Resolver: $\; y' = \dfrac{1}{x} y^2 - \left(2 + \dfrac{1}{x}\right) y + x + 2 \;$ con solución particular $y_1 = x$

Con el cambio $\; y = y_1 + z \quad \mapsto \quad \begin{cases} y = x + z \\ y' = 1 + z' \end{cases}$

sustituyendo en la ecuación inicial:

$$y' = \frac{1}{x} y^2 - \left(2 + \frac{1}{x}\right) y + x + 2 \quad \mapsto \quad 1 + z' = \frac{1}{x}(x+z)^2 - \left(2 + \frac{1}{x}\right)(x+z) + x + 2$$

$$1 + z' = \frac{1}{x}(x^2 + z^2 + 2xz) - \left(2 + \frac{1}{x}\right)(x+z) + x + 2$$

$$1 + z' = \frac{1}{x}(x^2 + z^2 + 2xz) - \left(2 + \frac{1}{x}\right)(x+z) + x + 2$$

$$\cancel{1} + z' = \cancel{x} + \frac{z^2}{x} + 2z \cancel{-2x} - 2z \cancel{-1} - \frac{z}{x} + \cancel{x} \cancel{+2}$$

$z' = \frac{z^2}{x} - \frac{z}{x} \quad \mapsto \quad \boxed{x\,z' + z = z^2}$ *ecuación de Bernouilli con m = 2*

dividiendo por z^2 queda: $x\,z' + z = z^2 \quad \mapsto \quad \frac{x\,z'}{z^2} + \frac{1}{z} = 1$

con el cambio, $u = \frac{1}{z} \quad \mapsto \quad \begin{cases} u' = \frac{-z'}{z^2} \\ z = \frac{1}{u} \end{cases}$

resulta, $\boxed{-x\,u' + u = 1}$ *ecuación lineal de primer orden*

partiendo de la ecuación sin segundo miembro: $-x\,u' + u = 0$

$$-x\frac{du}{dx} + u = 0 \quad \mapsto \quad \int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x} \quad \mapsto \quad \begin{array}{l} L|u| = L|x| + Lk \\ L|u| = L|k\,x| \end{array}$$

derivando k como función de x en la ecuación $\boxed{u = k\,x} \quad \mapsto \quad u' = k'x + k$

sustituyendo en $\boxed{-x\,u' + u = 1}$ queda:

$$-x\,u' + u = 1 \quad \mapsto \quad -x\,(k'x + k) + k\,x = 1 \quad \mapsto \quad -k'x^2 = 1$$

$$\int dk = \int \frac{-dx}{x^2} \quad \mapsto \quad k = \frac{1}{x} + \lambda$$

con lo que, $u = k\,x \quad \Rightarrow \quad u = \left(\frac{1}{x} + \lambda\right)x = 1 + \lambda\,x$

Por tanto, $z = \frac{1}{u} = \frac{1}{1 + \lambda\,x}$

Finalmente, $y = x + z \quad \Rightarrow \quad y = x + \frac{1}{1 + \lambda\,x}$

Resolver: $x^3\,y' + y^2 - 5x^2\,y + 2x^4 = 0$ con solución particular $y_1 = x^2$

Con el cambio $y = y_1 + z \quad \mapsto \quad \begin{cases} y = x^2 + z \\ y' = 2x + z' \end{cases}$

sustituyendo en la ecuación diferencial dada:

$$x^3\,y' + y^2 - 5x^2\,y + 2x^4 = 0 \quad \mapsto \quad x^3\,(2x + z') + (x^2 + z)^2 - 5x^2\,(x^2 + z) + 2x^4 = 0$$

$$\cancel{2x^4} + x^3\,z' + \cancel{x^4} + z^2 + 2x^2\,z - \cancel{5x^4} - 5x^2\,z + \cancel{2x^4} = 0 \quad \mapsto \quad x^3\,z' - 3x^2\,z = -z^2$$

La ecuación de Bernouilli $x^3 z' - 3x^2 z = -z^2$ se divide por $-z^2$

$$\frac{-x^3 z'}{z^2} + \frac{3x^2}{z} = 1 \quad \text{con el cambio } u = \frac{1}{z} \quad \mapsto \quad \begin{cases} u' = \dfrac{-z'}{z^2} \\ z = \dfrac{1}{u} \end{cases}$$

resulta la *ecuación lineal de primer orden* $\boxed{x^3 u' + 3x^2 u = 1}$

partiendo de la ecuación sin segundo miembro: $x^3 u' + 3x^2 u = 0$

$$\int \frac{du}{u} = -3 \int \frac{dx}{x} \quad \mapsto \quad \begin{array}{l} L|u| = -3L|x| + Lk \\ L|u| = L\left|\dfrac{k}{x^3}\right| \end{array} \quad \mapsto \quad u = \frac{k}{x^3}$$

derivando k como función de x en la ecuación $u = \dfrac{k}{x^3}$

$$u' = \frac{k' x^3 - 3x^2 k}{x^6} = \frac{k'}{x^3} - \frac{3k}{x^4}$$

sustituyendo en $\boxed{x^3 u' + 3x^2 u = 1}$ queda:

$$x^3 u' + 3x^2 u = 1 \quad \mapsto \quad x^3\left(\frac{k'}{x^3} - \frac{3k}{x^4}\right) + 3x^2 \frac{k}{x^3} = 1 \quad \mapsto \quad k' = 1 \quad \mapsto \quad k = x + \lambda$$

con lo que, $u = \dfrac{k}{x^3} \quad \Rightarrow \quad u = \dfrac{x+\lambda}{x^3}$

Por tanto, $z = \dfrac{1}{u} = \dfrac{x^3}{x+\lambda}$

Finalmente, $y = x^2 + z \quad \Rightarrow \quad y = x^2 + \dfrac{x^3}{x+\lambda}$

ECUACIÓN SIN SEGUNDO MIEMBRO

La ecuación diferencial $a\,y'' + b\,y' + c = 0$

Tiene como integral general $C_1\,y_1 + C_2\,y_2$ siendo C_1 y C_2 constantes

Se buscan soluciones de la forma $y = e^{rx}$ con r complejo $\begin{cases} y' = r e^{rx} \\ y'' = r^2 e^{rx} \end{cases}$

sustituyendo, queda:

$$a\,y'' + b\,y' + c = 0 \quad \mapsto \quad (ar^2 + br + c)\,e^{rx} = 0 \quad \Rightarrow \quad ar^2 + br + c = 0$$

$$\begin{cases} \Delta = b^2 - 4ac > 0 & \mapsto \quad y = C_1\,e^{r_1 x} + C_2\,e^{r_2 x} \\ \Delta = b^2 - 4ac = 0 & \mapsto \quad y = (C_1\,x + C_2)\,e^{-\frac{b}{2a}x} \\ \Delta = b^2 - 4ac < 0 & \mapsto \quad y = (C_1 \cos\beta x + C_2\,\mathrm{sen}\,\beta x)\,e^{\alpha x} \end{cases}$$

Cuando $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ las soluciones complejas son $(\alpha \pm i\beta)$

La expresión $(C_1 \cos\beta x + C_2\,\mathrm{sen}\,\beta x)$ se puede poner como $\boxed{C\cos(\beta x - \theta)}$

Adviértase que,

$$y = C\cos(\beta x - \theta)\,e^{\alpha x} = C(\cos\beta x \cos\theta + \mathrm{sen}\beta x\,\mathrm{sen}\theta)\,e^{\alpha x}$$

donde $\begin{cases} C_1 = C\cos\theta \\ C_2 = C\,\mathrm{sen}\theta \end{cases} \quad \mapsto \quad C_1^2 + C_2^2 = (\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\theta)\,C^2 = C^2$

Resolver: $y'' - 5y' + 6y = 0$

Sea $y = e^{rx} \quad \mapsto \quad y' = r e^{rx} \quad y'' = r^2 e^{rx}$

$$y'' - 5y' + 6y = 0 \quad \mapsto \quad (r^2 - 5r + 6)\,e^{rx} = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 - 5r + 6 = 0 \quad \mapsto \quad \begin{cases} r_1 = 2 \\ r_2 = 3 \end{cases}$$

La integral general es: $y = C_1\,e^{2x} + C_2\,e^{3x}$

Resolver: $y'' + 4y' + 4y = 0$

La ecuación característica asociada es

$r^2 + 4r + 4 = 0 \quad \mapsto \quad r_1 = r_2 = -2$

La integral general es: $y = (C_1 x + C_2)\, e^{-2x}$

Resolver: $y'' + y' + y = 0$

La ecuación característica asociada es

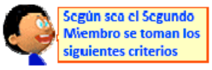
$$r^2 + r + 1 = 0 \quad \mapsto \quad \begin{cases} r_1 = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ r_2 = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \alpha = -\frac{1}{2} \quad \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

La integral general es: $y = (C_1 \cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \operatorname{sen}\dfrac{\sqrt{3}}{2}x)\, e^{-\frac{x}{2}}$

o también $y = C \cos(\dfrac{\sqrt{3}}{2}x - \theta)\, e^{-\frac{x}{2}}$

ECUACIÓN DIFERENCIAL COMPLETA

Se parte de la ecuación diferencial sin segundo miembro $a\,y'' + b\,y' + c = 0$



⊙ EL SEGUNDO MIEMBRO ES UN POLINOMIO DE GRADO n

$$\begin{cases} a\,y'' + b\,y' + c\,y = P_n(x) \quad \mapsto \quad \text{Se busca un polinomio de grado n} \\ a\,y'' + b\,y' = P_n(x) \quad \mapsto \quad \begin{cases} c = 0 \\ \text{Se busca un polinomio de grado } (n+1) \end{cases} \\ a\,y'' = P_n(x) \quad \mapsto \quad \begin{cases} c = 0\,,\; b = 0 \\ \text{Se integra dos veces sucesivamente} \end{cases} \end{cases}$$

⊙ EL SEGUNDO MIEMBRO ES DE LA FORMA $e^{kx}\,P_n(x)$

$$a\,y'' + b\,y' + c\,y = e^{kx}\,P_n(x)$$

Se parte de la función: $y = z\,e^{kx}$

⊙ EL SEGUNDO MIEMBRO ES DE LA FORMA:

$$a\,y'' + b\,y' + c\,y = A_1\cos\beta x + B_1\operatorname{sen}\beta x$$

$$i\beta \equiv \begin{cases} \text{no es raíz de la ecuación característica} \\ \text{se busca una solución particular} \quad y = A\cos\beta x + B\operatorname{sen}\beta x \end{cases}$$

$$i\beta \equiv \begin{cases} \text{es raíz de la ecuación característica} \\ \text{se busca una solución particular} \quad y = x\,(A\cos\beta x + B\operatorname{sen}\beta x) \end{cases}$$

▷ **Análogamente, si la ecuación diferencial es del tipo:**

$$a\,y'' + b\,y' + c\,y = A_1\,x^n\cos\beta x + B_1\,x^n\operatorname{sen}\beta x \qquad \text{n es entero}$$

$$i\beta \equiv \begin{cases} \text{no es raíz de la ecuación característica} \\ \text{se busca una solución particular} \quad y = P_n(x)\cos\beta x + Q_n(x)\operatorname{sen}\beta x \end{cases}$$

$$i\beta \equiv \begin{cases} \text{es raíz de la ecuación característica} \\ \text{se busca una solución particular} \quad y = P_{n+1}(x)\cos\beta x + Q_{n+1}(x)\operatorname{sen}\beta x \end{cases}$$

⊙ EL SEGUNDO MIEMBRO ES DE LA FORMA $e^{kx}(A_1\cos\alpha x + B_1\operatorname{sen}\alpha x)$

$$a\,y'' + b\,y' + c\,y = e^{kx}(A_1\cos\alpha x + B_1\operatorname{sen}\alpha x)$$ **Se parte de la función** $y = z\,e^{kx}$

Resolver: $y''+y'-2y=2x^2-3x-2$

La ecuación diferencial sin segundo miembro $y''+y'-2y=0$

la ecuación característica asociada $r^2+r-2=0$

con raíces $r_1=1$ y $r_2=-2$

La integral general de la ecuación sin segundo miembro:

$$y=C_1e^x+C_2e^{-2x}$$

Se busca una solución bajo la forma de un polinomio de segundo grado:

$$\begin{cases} y=ax^2+bx+c \\ y'=2ax+b \\ y''=2a \end{cases}$$

de donde, resulta:

$$y''+y'-2y=2a+2ax+b-2(ax^2+bx+c)=2x^2-3x-2$$

operando e identificando coeficientes:

$$\begin{cases} -2a=2 \\ 2a-2b=-3 \\ 2a+b-2c=-2 \end{cases} \qquad a=-1 \qquad b=\frac{1}{2} \qquad c=\frac{1}{4}$$

La solución particular de la ecuación completa: $y=-x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$

Según el *Teorema Fundamental*, la solución general de la ecuación diferencial propuesta:

$$y=C_1e^x+C_2e^{-2x}-x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$$

Resolver: $y''+y'+2y=4x^2-4x+6$

La ecuación diferencial sin segundo miembro $y''+y'+2y=0$

tiene asociada la ecuación característica $r^2+r+2=0$

con raíces complejas $-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{7}}{2}i$ donde $\alpha=-\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{\sqrt{7}}{2}$

La integral general de la ecuación sin segundo miembro:

$$y=\left(C_1\cos\frac{\sqrt{7}}{2}+C_2\,\text{sen}\frac{\sqrt{7}}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}}$$

Se busca una solución bajo la forma de un polinomio de segundo grado:

$$\begin{cases} y=ax^2+bx+c \\ y'=2ax+b \\ y''=2a \end{cases}$$

de donde, resulta:

$$y''+y'+2y=2a+2ax+b+2(ax^2+bx+c)=4x^2-4x+6$$

operando e identificando coeficientes:

$$\begin{cases} 2a=4 \\ 2a+2b=-4 \\ 2a+b+2c=6 \end{cases} \qquad a=2 \qquad b=-4 \qquad c=3$$

La solución particular de la ecuación completa: $y=2x^2-4x+3$

La solución general de la ecuación diferencial propuesta:

$$y=\left(C_1\cos\frac{\sqrt{7}}{2}+C_2\,\text{sen}\frac{\sqrt{7}}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}}+2x^2-4x+3$$

Resolver: $y''-y'=x^2$

La ecuación diferencial sin segundo miembro $y''-y'=0$

la ecuación característica asociada $r^2-r=0 \quad \mapsto \quad \begin{cases} r_1=0 \\ r_2=1 \end{cases}$

La integral general de la ecuación sin segundo miembro: $y=C_1+C_2\,e^x$

Se busca una integral particular de grado 3:

$$\begin{cases} y=ax^3+bx^2+cx+d \\ y'=3ax^2+2bx+c \\ y''=6ax+2\,b \end{cases}$$

con lo que:

$$y''-y'=6ax+2b-(3ax^2+2bx+c)=x^2$$

identificando coeficientes:

$$\begin{cases} -3a = 1 \\ 6a - 2b = 0 \\ 2b - c = 0 \end{cases} \mapsto \quad a = \frac{-1}{3} \qquad b = -1 \qquad c = -2$$

La solución particular de la ecuación completa: $y = -\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 2x$

La solución general de la ecuación diferencial:

$$y = C_1 + C_2 e^x - \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 2x$$

Resolver: $y'' = 2x^2 - 3x + 1$

Se integra dos veces sucesivamente:

$$y' = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x + \lambda_1$$

$$y = \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \lambda_1 x + \lambda_2$$

Resolver: $y'' - y' + y = x^2 e^{-x}$

La ecuación sin segundo miembro: $y'' - y' + y = 0$

tiene asociada la ecuación característica: $r^2 - r + 1 = 0$

con raíces $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} \qquad \alpha = 1/2 \qquad \beta = \sqrt{3}/2$

La integral general de la ecuación sin segundo miembro:

$$y = \left(C_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \,\text{sen}\,\frac{\sqrt{3}}{2}x \right) e^{x/2}$$

Considerando la ecuación completa y la forma del segundo miembro,
se hace el cambio: $y = z\,e^{-x}$

$$\begin{aligned} &y = z\,e^{-x} \\ &y' = (z' - z)\,e^{-x} \\ &y'' = (z'' - 2z' + z)\,e^{-x} \end{aligned}$$

sustituyendo en la ecuación diferencial dada:

$$y'' - y' + y = \left[(z'' - 2z' + z) - (z' - z) + z \right] e^{-x} = x^2 e^{-x}$$

La ecuación $z''-3z'+3z=x^2$ se resuelve buscando un polinomio de grado dos:

$$z=ax^2+bx+c$$
$$z'=2ax+b$$
$$z''=2a$$

$$z''-3z'+3z=x^2 \quad \mapsto \quad 2a-3(2ax+b)+3(ax^2+bx+c)=x^2$$

$$3ax^2+(-6a+3b)x+(2a-3b+3c)=x^2$$

Identificando coeficientes $\begin{cases} 3a=1 \\ -6a+3b=0 \\ 2a-3b+3c=0 \end{cases} \quad \mapsto \quad \begin{matrix} a=1/3 \\ b=2/3 \\ c=4/9 \end{matrix}$

entonces, $z=\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{2}{3}x+\dfrac{4}{9}$

$$y=z\,e^{-x}=\left(\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{4}{9}\right)e^{-x}$$

Según el Teorema Fundamental, la solución general de la ecuación diferencial:

$$y=\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\,\text{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)e^{x/2}+\left(\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{4}{9}\right)e^{-x}$$

Resolver: $y''-4y'+4y=(x^2-x)e^{2x}$

La ecuación sin segundo miembro $y''-4y'+4y=0$ tiene como ecuación característica $r^2-4r+4r=0$, con raíz doble $r=2$

La integral general de la ecuación sin segundo miembro: $y=\left(C_1x+C_2\right)e^{2x}$

Considerando la ecuación completa y la forma del segundo miembro,
se hace el cambio: $y=z\,e^{2x}$

$$y=z\,e^{2x}$$
$$y'=(z'+2z)e^{2x}$$
$$y''=(z''+4z'+4z)e^{2x}$$

por tanto:
$$y''-4y'+4y=\left[(z''+4z'+4z)-4(z'+2z)+4z\right]e^{2x}=(x^2-x)e^{2x}$$

resultando: $z''=x^2-x$

integrando dos veces consecutivas: $\begin{cases} z' = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 + \lambda_1 \\ z = \dfrac{1}{12}x^4 - \dfrac{1}{6}x^3 + \lambda_1 x + \lambda_2 \end{cases}$

$$y = z\,e^{2x} = \left(\frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + \lambda_1 x + \lambda_2\right)e^{2x}$$

Por el Teorema Fundamental, la solución general de la ecuación diferencial:

$$y = \left(C_1 x + C_2 + \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + \lambda_1 x + \lambda_2\right)e^{2x}$$

Resolver: $y'' + 2y' + 5y = \cos 2x + 2\,\mathrm{sen}\,2x$

La ecuación sin segundo miembro $y'' + 2y' + 5y = 0$ **tiene como ecuación característica** $r^2 + 2r + 5 = 0$ **, con raíces** $-1 \pm 2i$ **,** $\alpha = -1$ **y** $\beta = 2$

La solución de la ecuación sin segundo miembro: $y = \left(C_1 \cos 2x + C_2\,\mathrm{sen}\,2x\right)e^{-x}$

Como $2i$ no es solución de la ecuación característica, se busca una solución particular de la forma: $y = A\cos 2x + B\,\mathrm{sen}\,2x$

$$\begin{aligned} y &= A\cos 2x + B\,\mathrm{sen}\,2x \\ y' &= -2A\,\mathrm{sen}\,2x + 2B\cos 2x \\ y'' &= -4A\cos 2x - 4B\,\mathrm{sen}\,2x \end{aligned}$$

por tanto:

$$\begin{aligned} y'' + 2y' + 5y &= (-4A\cos 2x - 4B\,\mathrm{sen}\,2x) + 2(-2A\,\mathrm{sen}\,2x + 2B\cos 2x) + \\ &\quad + 5(A\cos 2x + B\,\mathrm{sen}\,2x) = \cos 2x + 2\,\mathrm{sen}\,2x \end{aligned}$$

operando, resulta:

$$(A + 4B)\cos 2x + (-4A + B)\,\mathrm{sen}\,2x = \cos 2x + 2\,\mathrm{sen}\,2x$$

identificando coeficientes: $\begin{cases} A + 4B = 1 \\ -4A + B = 2 \end{cases} \mapsto \quad A = -\dfrac{7}{17} \qquad B = \dfrac{6}{17}$

La solución particular de la ecuación completa es:

$$y = -\frac{7}{17}\cos 2x + \frac{6}{17}\,\mathrm{sen}\,2x$$

Por el Teorema Fundamental, la solución general de la ecuación diferencial:

$$y = \left(C_1 \cos 2x + C_2 \,\text{sen}\, 2x\right) e^{-x} - \frac{7}{17}\cos 2x + \frac{6}{17}\,\text{sen}\, 2x$$

Resolver: $y'' + 4y = \cos 2x$

La ecuación sin segundo miembro $y'' + 4y = 0$ tiene como ecuación característica $r^2 + 4 = 0$, con raíces $\pm 2i$, $\alpha = 0$ y $\beta = 2$

La solución de la ecuación sin segundo miembro: $y = C_1 \cos 2x + C_2 \,\text{sen}\, 2x$

Como $2i$ es solución de la ecuación característica, se busca una solución particular de la forma: $y = x\,(A\cos 2x + B\,\text{sen}\, 2x)$

$$y = (A\cos 2x + B\,\text{sen}\, 2x)\,x$$
$$y' = (A\cos 2x + B\,\text{sen}\, 2x) + (-2A\,\text{sen}\, 2x + 2B\cos 2x)\,x$$
$$y'' = (-4A\,\text{sen}\, 2x + 4B\cos 2x) + (-4A\cos 2x - 4B\,\text{sen}\, 2x)\,x$$

por tanto:

$$\begin{aligned} y'' + 4y &= (-4A\,\text{sen}\, 2x + 4B\cos 2x) + (-4A\cos 2x - 4B\,\text{sen}\, 2x)\,x + \\ &\quad + 4(A\cos 2x + B\,\text{sen}\, 2x)\,x = \cos 2x \end{aligned}$$

simplificando: $y'' + 4y = 4B\cos 2x - 4A\,\text{sen}\, 2x = \cos 2x$

identificando coeficientes: $\begin{cases} 4B = 1 \\ -4A = 0 \end{cases} \mapsto \quad A = 0 \qquad B = \dfrac{1}{4}$

La solución particular de la ecuación completa es: $y = \dfrac{x}{4}\,\text{sen}\, 2x$

La solución general de la ecuación diferencial:

$$y = C_1\cos 2x + C_2\,\text{sen}\, 2x + \frac{x}{4}\,\text{sen}\, 2x = C_1\cos 2x + \left(\frac{x}{4} + C_2\right)\text{sen}\, 2x$$

Resolver: $y'' + 4y = 9x\,(\text{sen}\, x - 2\cos x)$

La ecuación sin segundo miembro $y'' + 4y = 0$ tiene como ecuación característica $r^2 + 4 = 0$, con raíces $\pm 2i$, $\alpha = 0$ y $\beta = 2$

La solución de la ecuación sin segundo miembro: $y = C_1 \cos 2x + C_2 \,\text{sen}\, 2x$

Como i no es solución de la ecuación característica, se busca una solución particular de la forma: $y = P_1(x)\cos x + Q_1(x)\,\text{sen}\, x$

$y = (a + b\,x)\cos x + (c + d\,x)\,\mathrm{sen}\,x$

$y' = (b + c + d\,x)\cos x + (-a + d - b\,x)\,\mathrm{sen}\,x$

$y'' = (-a + 2d - b\,x)\cos x + (-2b - c - d\,x)\,\mathrm{sen}\,x$

sustituyendo en la ecuación dada:

$$y'' + 4y = (-a + 2d - b\,x)\cos x + (-2b - c - d\,x)\,\mathrm{sen}\,x + 4(a + b\,x)\cos x + 4(c + d\,x)\,\mathrm{sen}\,x =$$
$$= (3a + 2d)\cos x + (-2b + 3c)\,\mathrm{sen}\,x + 3b\,x\cos x + 3d\,x\,\mathrm{sen}\,x = 9x\,\mathrm{sen}\,x - 18x\cos x$$

identificando coeficientes:

$$\left.\begin{array}{l} 3a + 2d = 0 \\ -2b + 3c = 0 \\ 3b = -18 \\ 3d = 9 \end{array}\right\} \begin{array}{l} d = 3 \\ b = -6 \\ c = -4 \\ a = -2 \end{array} \mapsto \begin{array}{l} P_1(x) = a + b\,x = -2 - 6x = -(2 + 6x) \\ \\ Q_1(x) = c + d\,x = (-4 + 3x) \end{array}$$

La solución de la ecuación particular: $y = -(2 + 6x)\cos x + (-4 + 3x)\,\mathrm{sen}\,x$

La solución de la ecuación propuesta:

$$y = C_1\cos 2x + C_2\,\mathrm{sen}\,2x - (2 + 6x)\cos x + (-4 + 3x)\,\mathrm{sen}\,x$$

Resolver: $y'' + 4y = 8x(2\cos 2x - \mathrm{sen}\,2x)$

La ecuación sin segundo miembro $y'' + 4y = 0$ tiene como ecuación característica $r^2 + 4 = 0$, con raíces $\pm 2i$

La solución de la ecuación: $y = C_1\cos 2x + C_2\,\mathrm{sen}\,2x$

Siendo $2i$ solución de la ecuación característica, se busca una solución particular de la forma: $y = P_2(x)\cos 2x + Q_2(x)\,\mathrm{sen}\,2x$

$$y = (a + b\,x + c\,x^2)\cos 2x + (d + e\,x + f\,x^2)\,\mathrm{sen}\,2x$$

En este caso, $(a\cos 2x)$ y $(d\,\mathrm{sen}\,2x)$ puede obviarse dado que estas funciones verifican la ecuación sin segundo miembro.

$y = (b\,x + c\,x^2)\cos 2x + (e\,x + f\,x^2)\,\mathrm{sen}\,2x$

$y' = (b + 2c\,x + 2e\,x + 2f\,x^2)\cos 2x + (-2b\,x - 2c\,x^2 + e + 2f\,x)\,\mathrm{sen}\,2x$

$y'' = (2c + 2e + 4f\,x - 4b\,x - 4c\,x^2 + 2e + 4f\,x)\cos 2x +$
$\quad + (-2b - 4c\,x - 4e\,x - 4f\,x^2 - 2b - 4c\,x + 2f)\,\mathrm{sen}\,2x$

sustituyendo en la ecuación dada:

$$y'' + 4y = (2c + 4e + 8f\,x)\cos 2x + (-4b - 8c\,x + 2f)\,\mathrm{sen}\,2x = 16x\cos 2x - 8x\,\mathrm{sen}\,2x$$

Al identificar coeficientes:

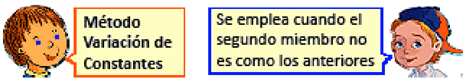
$$\begin{cases} 2c+4e=0 \\ 8f=16 \\ -4b+2f=0 \\ 8c=8 \end{cases} \mapsto \begin{matrix} f=2 \\ c=1 \\ e=-1/2 \\ b=1 \end{matrix} \mapsto \begin{matrix} P_2(x)=b\,x+c\,x^2=x+x^2 \\ Q_2(x)=e\,x+f\,x^2=-\dfrac{1}{2}x+2x^2 \end{matrix}$$

Solución de la ecuación particular: $y=(x+x^2)\cos 2x+\left(-\dfrac{1}{2}x+2x^2\right)\operatorname{sen} 2x$

La solución de la ecuación propuesta:

$$y=C_1\cos 2x+C_2\operatorname{sen} 2x+(x+x^2)\cos 2x+\left(-\frac{1}{2}x+2x^2\right)\operatorname{sen} 2x$$

$$y=(C_1+x+x^2)\cos 2x+\left(C_2-\frac{1}{2}x+2x^2\right)\operatorname{sen} 2x$$



Resolver: $y''+y=\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$

La ecuación sin segundo miembro $y''+y=0$ **tiene como ecuación característica** $r^2+1=0$ **, con raíces** $\pm i$ **,** $\alpha=0$ **,** $\beta=1$

La solución de la ecuación: $y=C_1\cos x+C_2\operatorname{sen} x$

Derivando C_1 **y** C_2 **como funciones de x:**

$$y'=C_1'\cos x-C_1\operatorname{sen} x+C_2'\operatorname{sen} x+C_2\cos x$$

Con la condición: $C_1'\cos x+C_2'\operatorname{sen} x=0$

resulta, $y'=-C_1\operatorname{sen} x+C_2\cos x$

$$y''=-C_1'\operatorname{sen} x-C_1\cos x+C_2'\cos x-C_2\operatorname{sen} x=(C_2'-C_1)\cos x-(C_1'+C_2)\operatorname{sen} x$$

con lo que,

$$y''+y=C_2'\cos x-C_1'\operatorname{sen} x=\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$$

Resolviendo el sistema: $\begin{cases} C_1' \cos x + C_2' \operatorname{sen} x = 0 \\ C_2' \cos x - C_1' \operatorname{sen} x = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \end{cases}$ $\qquad C_2' = -C_1' \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$

$$y'' + y = -C_1' \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x} - C_1' \operatorname{sen} x = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \quad \mapsto \quad -C_1' \cos^2 x \operatorname{sen} x - C_1' \operatorname{sen}^2 x = 1$$

$$-C_1' (1 - \operatorname{sen}^2 x) \operatorname{sen} x - C_1' \operatorname{sen}^2 x = 1$$

$$-C_1' \operatorname{sen} x = 1 \quad \mapsto \quad C_1' = -\frac{1}{\operatorname{sen} x} \quad \mapsto \quad C_1 = -\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} \overset{\odot}{=} -L\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + \lambda_1$$

$$\odot \int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \int \frac{2dt/1+t^2}{2t/1+t^2} = \int \frac{dt}{t} = L|t| + \lambda_1 = L\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + \lambda$$

$$C_2' = -C_1' \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \text{ x } \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} \quad \mapsto \quad C_2 = \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} dx = -\frac{1}{\operatorname{sen} x} + \lambda_2$$

resulta, por tanto:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x = \left(-L\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + \lambda_1\right)\cos x + \left(-\frac{1}{\operatorname{sen} x} + \lambda_2\right)\operatorname{sen} x$$

$$y = \lambda_1 \cos x + \lambda_2 \operatorname{sen} x - 1 - \cos x \; L\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$$

Resolver: $y'' + y = \operatorname{cotg} x$

La ecuación sin segundo miembro $y'' + y = 0$ tiene como ecuación característica $r^2 + 1 = 0$, con raíces $\pm\, i$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$

La solución de la ecuación sin segundo miembro: $y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x$

Derivando C_1 y C_2 como funciones de x:

$$y' = C_1' \cos x - C_1 \operatorname{sen} x + C_2' \operatorname{sen} x + C_2 \cos x$$

Con la condición: $C_1' \cos x + C_2' \operatorname{sen} x = 0$

resulta, $y' = -C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x$

$$y'' = -C_1' \operatorname{sen} x - C_1 \cos x + C_2' \cos x - C_2 \operatorname{sen} x = (C_2' - C_1)\cos x + (-C_1' - C_2)\operatorname{sen} x$$

con lo que, $y''+y=C_2'\cos x-C_1'\operatorname{sen} x=\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$

Resolviendo el sistema $\begin{cases} C_1'\cos x+C_2'\operatorname{sen} x=0 \\ C_2'\cos x-C_1'\operatorname{sen} x=\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\end{cases}$ $\qquad C_2'=-C_1'\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$

$$-C_1'\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x}-C_1'\operatorname{sen} x=\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\quad\mapsto\quad -C_1'\cos^2 x-C_1'\operatorname{sen}^2 x=\cos x$$

$$C_1'=\frac{-\cos x}{\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x}=-\cos x\quad\mapsto\quad C_1=-\int\cos x\,dx=-\operatorname{sen} x+\lambda_1$$

$$C_2'=-C_1'\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}=\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x}=\frac{1-\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x}$$

$$C_2=\int\frac{1-\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x}dx=\int\frac{dx}{\operatorname{sen} x}-\int\operatorname{sen} x\,dx\overset{\odot}{=}L\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+\cos x+\lambda_2$$

$$\odot\int\frac{dx}{\operatorname{sen} x}=\int\frac{2dt/1+t^2}{2t/1+t^2}=\int\frac{dt}{t}=L|t|=L\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$$

resultando, finalmente:

$$y=C_1\cos x+C_2\operatorname{sen} x=(-\operatorname{sen} x+\lambda_1)\cos x+\left(L\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+\cos x+\lambda_2\right)\operatorname{sen} x$$

$$y=\lambda_1\cos x+\lambda_2\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} x\,L\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$$

Resolver: $y''+4y=\dfrac{1}{\cos 2x}$

La ecuación sin segundo miembro $y''+4y=0$ tiene como ecuación característica $r^2+4=0$, con raíces $\pm 2i$, $\alpha=0$, $\beta=2$

La solución de la ecuación: $y=C_1\cos 2x+C_2\operatorname{sen} 2x$

Derivando en la solución anterior C_1 y C_2 como funciones de x:

$$y'=C_1'\cos 2x-2C_1\operatorname{sen} 2x+C_2'\operatorname{sen} 2x+2C_2\cos 2x$$

Con la condición: $C_1'\cos 2x+C_2'\operatorname{sen} 2x=0$

resulta, $y'=-2C_1\operatorname{sen} 2x+2C_2\cos 2x$

$$y'' = -2C_1' \,\text{sen}2x - 4C_1 \cos 2x + 2C_2' \cos 2x - 4C_2 \,\text{sen}2x =$$
$$= (2C_2' - 4C_1)\cos 2x + (-2C_1' - 4C_2)\,\text{sen}2x$$

en consecuencia,

$$y'' + 4y = 2C_2' \cos 2x - 2C_1' \,\text{sen}2x = \frac{1}{\cos 2x}$$

Resolviendo el sistema $\begin{cases} C_1' \cos 2x + C_2' \,\text{sen}2x = 0 \\ 2C_2' \cos 2x - 2C_1' \,\text{sen}2x = \dfrac{1}{\cos 2x} \end{cases}$ $\qquad C_2' = -C_1' \dfrac{\cos 2x}{\text{sen}2x}$

$$-2C_1' \frac{\cos^2 2x}{\text{sen}2x} - 2C_1' \,\text{sen}2x = \frac{1}{\cos 2x}$$

$$-2C_1'\left(\frac{\cos^2 2x}{\text{sen}2x} + \text{sen}2x\right) = \frac{1}{\cos 2x} \quad \mapsto \quad C_1' = \frac{-\text{sen}2x}{2\cos 2x}$$

$$C_1 = \frac{1}{2}\int \frac{-\text{sen}2x}{\cos 2x} = \frac{1}{4}L\left|\cos 2x\right| + \lambda_1$$

$$C_2' = -C_1' \frac{\cos 2x}{\text{sen}2x} = \frac{\text{sen}2x}{2\cos 2x} \text{ x } \frac{\cos 2x}{\text{sen}2x} = \frac{1}{2} \quad \mapsto \quad C_2 = \frac{1}{2}\int dx = \frac{1}{2}x + \lambda_2$$

La solución a la ecuación propuesta es:

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \,\text{sen}2x = \left(\frac{1}{4}L\left|\cos 2x\right| + \lambda_1\right)\cos 2x + \left(\frac{1}{2}x + \lambda_2\right)\text{sen}2x$$

$$y = \lambda_1 \cos 2x + \lambda_2 \,\text{sen}2x + \frac{1}{2}x\,\text{sen}2x + \frac{1}{4}\cos 2x\, L\left|\cos 2x\right|$$

ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL DE ORDEN N

$a_n\, y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + \cdots + a_2\, y'' + a_1\, y' + a_0\, y = f(x)$

Ecuación diferencial tipo: $a_n\, y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + \cdots + a_2\, y'' + a_1\, y' + a_0\, y = f(x)$
donde $(a_n, a_{n-1}, \cdots, a_2, a_1, a_0)$ **son constantes, siendo f una función dada.**

A la ecuación se asocia una ecuación sin segundo miembro:

$$a_n\, y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + \cdots + a_2\, y'' + a_1\, y' + a_0\, y = 0$$

La integral general de la ecuación propuesta, según el *Teorema Fundamental*, es la suma de la integral obtenida al resolver la ecuación sin segundo miembro y de una integral particular.

Se buscan soluciones de la forma $y = e^{rx}$**, r complejo, solución de la ecuación característica:** $a_n\, r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_2\, r^2 + a_1\, r + a_0 = 0$

Una raíz simple de r esta asociada a la solución $y = e^{rx}$**. A una raíz múltiple r de orden k estan asociadas soluciones** $e^{rx},\ x\,e^{rx},\ x^2\, e^{rx},\ \cdots,\ x^{k-1}\, e^{rx}$

Se definen n soluciones $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ **linealmente independientes.**

La integral general es: $y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i\, y_i(x)$

Para obtener la integral particular de la ecuación completa, considerando el segundo miembro, se utilizan métodos análogos a los vistos anteriormente.

Resolver: $y''' - 3\,y'' + 3\,y' - y = 0$

La ecuación característica: $r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = 0 \ \mapsto\ (r-1)^3 = 0$ **tiene como raíz triple** $r = 1$

La ecuación tiene por solución: $y = (C_1 + C_2\, x + C_3\, x^2)\, e^x$

Resolver: $y^{IV} - y''' - 3y'' + 5y' - 2y = 2x - 7$

La ecuación sin segundo miembro: $y^{IV} - y''' - 3y'' + 5y' - 2y = 0$

con ecuación característica: $r^4 - r^3 - 3r^2 + 5r - 2 = 0 \quad \mapsto \quad \begin{cases} r = 1 \ \text{triple} \\ r = -2 \end{cases}$

La solución de la ecuación sin segundo miembro:

$$y = C_1 e^{-2x} + (C_2 x + C_3 x + C_4 x^2) e^x$$

Se quiere encontrar un polinomio de primer grado que sea solución particular de la ecuación completa:

$$y = a + bx$$
$$y' = b$$
$$y'' = y''' = y^{IV} = 0$$

con lo que,

$$y^{IV} - y''' - 3y'' + 5y' - 2y = 5b - 2(a + bx) = 2x - 7$$

identificando coeficientes: $\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$

La integral particular de la ecuación completa es $y = 1 - x$

Según el Teorema Fundamental, la solución general:

$$y = 1 - x + C_1 e^{-2x} + (C_2 x + C_3 x + C_4 x^2) e^x$$

Resolver: $y^{IV} - y = \operatorname{sen} x$

La ecuación sin segundo miembro: $y^{IV} - y = 0$

Tiene ecuación característica: $r^4 - 1 = 0$ con raíces: $-1, 1, -i, i$

La solución de la ecuación sin segundo miembro:

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} + C_3 \cos x + C_4 \operatorname{sen} x$$

$$\begin{cases} r = -i \ \equiv \ \lambda_1 \cos(-x) + \lambda_2 \operatorname{sen}(-x) = \ \lambda_1 \cos x - \lambda_2 \operatorname{sen} x \\ r = i \ \equiv \ \lambda_3 \cos x + \lambda_4 \operatorname{sen} x \\ (\lambda_1 + \lambda_3) \cos x + (-\lambda_2 + \lambda_4) \operatorname{sen} x = C_3 \cos x + C_4 \operatorname{sen} x \end{cases}$$

Se quiere encontrar una solución particular de la ecuación completa bajo la forma $y = x(A\cos x + B\,\text{sen}\,x)$

$$\begin{cases} y' = (A\cos x + B\,\text{sen}\,x) + x(-A\,\text{sen}\,x + B\cos x) \\ y'' = 2(-A\,\text{sen}\,x + B\cos x) + x(-A\cos x - B\,\text{sen}\,x) \\ y''' = 3(-A\cos x - B\,\text{sen}\,x) + x(A\,\text{sen}\,x - B\cos x) \\ y^{IV} = 4(A\,\text{sen}\,x - B\cos x) + x(A\cos x + B\,\text{sen}\,x) \end{cases}$$

con lo que, $y^{IV} - y = 4A\,\text{sen}\,x - 4B\cos x = \text{sen}\,x$

identificando coeficientes: $\begin{cases} 4A = 1 \\ 4B = 0 \end{cases} \mapsto \quad A = \dfrac{1}{4} \qquad B = 0$

La solución particular de la ecuación completa es: $y = \dfrac{1}{4}x\cos x$

Según el Teorema Fundamental, la solución general:

$$y = \frac{1}{4}x\cos x + C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} + C_3\cos x + C_4\,\text{sen}\,x$$

ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL CON CAMBIO DE VARIABLE

La variable x se cambia por otra variable t

Se calcula dy/dx, d^2y/dx^2, --- , en función de dy/dt, d^2y/dt^2, ---

Resolver: $x\,y'' - y' + 4x^2\,y = 0$

Sea $t = x^2 \quad \mapsto \quad dt = 2x\,dx \quad \mapsto \quad \dfrac{dt}{dx} = 2x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = 2x\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(2x\frac{dy}{dt}\right) = 2\frac{dy}{dt} + 2x\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right) = 2\frac{dy}{dt} + 2x\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\frac{dt}{dx} =$$

$$= 2\frac{dy}{dt} + 4x^2\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) = 2\frac{dy}{dt} + 4x^2\frac{d^2y}{dt}$$

con lo que,

$$x\,y'' - y' + 4x^2\,y = 2x\frac{dy}{dt} + 4x^3\frac{d^2y}{dt} - 2x\frac{dy}{dt} + 4x^2\,y = 4x^3\frac{d^2y}{dt} + 4x^2\,y = 0$$

$$\frac{d^2y}{dt} + y = 0 \quad \mapsto \quad y'' + y = 0$$

La ecuación característica asociada $r^2 + 1 = 0$ tiene raíces $r = \pm\, i$

Solución: $\; y = C_1\cos t + C_2\,\text{sen}\,t$

sustituyendo, $\; y = C_1\cos x^2 + C_2\,\text{sen}\,x^2$

Resolver: $x\,y'' + 2\,y' + x\,y = 1$

Sea $t = x\,y \quad \mapsto \quad y = \dfrac{t}{x} \quad \mapsto \quad y' = \dfrac{t'x - t}{x^2} = \dfrac{t'}{x} - \dfrac{t}{x^2}$

$$y'' = \frac{t''x - t'}{x^2} - \frac{t'x^2 - 2xt}{x^4} = \frac{t''}{x} - \frac{2t'}{x^2} + \frac{2t}{x^3}$$

sustituyendo,

$$x\,y'' + 2\,y' + x\,y = 1 \quad \mapsto \quad t'' - \frac{2t'}{x} + \frac{2t}{x^2} + \frac{2t'}{x} - \frac{2t}{x^2} + t = 1$$

queda, $\; t'' + t = 1$

con solución: $t = 1 + C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x$

deshaciendo el cambio:

$$y = \frac{1}{x}(1 + C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x)$$

Resolver: $y\,y'' + y'^2 = 6x$

Sea $t = y\,y' \;\mapsto\; t' = y'^2 + y\,y''$

sustituyendo, $y\,y'' + y'^2 = 6x \;\mapsto\; t' = 6x$

$$t = \int 6x\,dx = 3x^2 + \lambda_1$$

en consecuencia: $y\,y' = 3x^2 + \lambda_1$

$$\int y\,y'\,dy = \int (3x^2 + \lambda_1)\,dx \;\mapsto\; \frac{y^2}{2} = x^3 + \lambda_1 x + \lambda_2$$

$$y^2 = 2x^3 + C_1 x + C_2$$

Resolver: $y'' + y' \operatorname{tg} x = \operatorname{sen} 2x$

$$\text{Sea} \begin{cases} y' = t \\ y'' = t' \end{cases} \quad dy = t\,dx$$

sustituyendo queda la ecuación de primer orden: $t' + t \operatorname{tg} x = \operatorname{sen} 2x$

resolviendo la ecuación sin segundo miembro $t' + t \operatorname{tg} x = 0$

$$\frac{dt}{dx} = -\,t \operatorname{tg} x \;\mapsto\; \int \frac{dt}{t} = -\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx \;\mapsto\; L|t| = L|k \cos x| \;\mapsto\; t = k \cos x$$

En $t = k \cos x$ se deriva k como función de x:

$$t' = k' \cos x - k \operatorname{sen} x$$

trasladando el valor a la ecuación de primer orden:

$$t' + t \operatorname{tg} x = \operatorname{sen} 2x \;\mapsto\; k' \cos x - k \operatorname{sen} x + k \cos x \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \operatorname{sen} 2x$$

$$k' \cos x = \operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x \;\mapsto\; k' = 2 \operatorname{sen} x$$

$$k = 2\int \text{sen}\,x\,dx = -2\cos x + C_1$$

siendo $t = k\cos x = (-2\cos x + C_1)\cos x = -2\cos^2 x + C_1\cos x$

Como $y' = t$

$$dy = (-2\cos^2 x + C_1\cos x) \quad \mapsto \quad y = \int (-2\cos^2 x + C_1\cos x)\,dx$$

$$y = -\frac{1}{2}\text{sen}\,2x - x + C_1\,\text{sen}\,x + C_2$$

$$\begin{cases} \cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x \;\rightarrow\; \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \;\rightarrow\; \cos^2 x = \dfrac{1}{2}(\cos 2x + 1) \\ -2\displaystyle\int \cos^2 x\,dx = -\int (\cos 2x + 1)\,dx = -\frac{1}{2}\text{sen}\,2x - x \end{cases}$$

Resolver: $x\,y'' - y' = \dfrac{1}{x}$

Sea $y' = t \;\rightarrow\; dy = t\,dx \qquad y'' = t'$

sustituyendo queda la ecuación de primer orden: $x\,t' - t = \dfrac{1}{x}$

La ecuación sin segundo miembro $x\,t' - t = 0$

$$\frac{dt}{t} = \frac{dx}{x} \quad \mapsto \quad \int \frac{dt}{t} = \int \frac{dx}{x} \quad \mapsto \quad L|t| = L|k\,x| \quad \mapsto \quad t = k\,x$$

En $\underline{t = k\,x}$ se deriva k como función de x:

$$t' = k'x + k$$

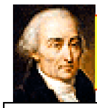
$$x\,t' - t = \frac{1}{x} \quad \mapsto \quad x(k'x - k) - k\,x = \frac{1}{x}$$

$$k'x^2 = \frac{1}{x} \quad \mapsto \quad k = \int \frac{1}{x^3}\,dx = -\frac{1}{2x^2} + C_1$$

$$t = k\,x = \left(-\frac{1}{2x^2} + C_1\right)x = -\frac{1}{2x} + C_1 x$$

Como $y' = t$: $dy = \left(-\dfrac{1}{2x} + C_1 x\right) \quad \mapsto \quad y = \displaystyle\int \left(-\frac{1}{2x} + C_1 x\right)dx$

$$y = -\frac{1}{2} L|x| + \lambda_1 x^2 + \lambda_2$$



Ecuación de Lagrange
$y = x f(y') + g(y')$

Ecuación $y = x f(y') + g(y')$

Con el cambio $t = y'$ se tiene: $y = x f(t) + g(t)$, siendo $dy = t dx$

$$y = x f(t) + g(t) \quad \mapsto \quad dy = t dx = f(t) dx + x f(t') dt + g(t') dt$$

$$-t dx + f(t) dx + x f(t') dt + g(t') dt = 0$$

$$-t dx + f(t) dx + x f(t') dt = -g(t') dt$$

$$\left[f(t) - t\right] dx + x f(t') dt = -g(t') dt$$

$$\left[f(t) - t\right] \frac{dx}{dt} + f(t') x = -g(t')$$ ecuación lineal de primer orden

Resolver: $y = x y'^2 + y'^3$

Cambio $t = y' \quad \mapsto \quad dy = t dx$

sustituyendo, resulta:

$$y = x y'^2 + y'^3 \quad \mapsto \quad y = x t^2 + t^3$$

$$dy = t^2 dx + 2 x t dt + 3 t^2 dt$$
$$t dx = t^2 dx + 2 x t dt + 3 t^2 dt$$

$$(t^2 - t) dx + 2 x t dt + 3 t^2 dt = 0$$

- Si $t = 0$ se obtendría la integral singular $y = x.0 + 0 = 0$
- Si $t \neq 0$ se tiene una ecuación diferencial de primer orden:

$$t(t-1)\frac{dx}{dt} + 2 x t + 3 t^2 = 0 \quad \mapsto \quad (t-1)\frac{dx}{dt} + 2 x + 3 t = 0$$

Para resolver $(t-1)\dfrac{dx}{dt} + 2x = -3t$ se parte de la ecuación

sin segundo miembro: $(t-1)\dfrac{dx}{dt} + 2x = 0$

$$(t-1)\frac{dx}{dt} = -2x \quad \mapsto \quad \int \frac{dx}{x} = -2\int \frac{dt}{t-1} \quad \mapsto \quad L|x| = L\left|\frac{1}{(t-1)^2}\right| + h$$

$$L|x| = L\left|\frac{k}{(t-1)^2}\right| \quad \mapsto \quad x = \frac{k}{(t-1)^2}$$

Una solución particular de la ecuación completa bajo la forma de un polinomio de grado uno:

$$x = a + b\,t \qquad \frac{dx}{dt} = b$$

en consecuencia:

$$(t-1)\frac{dx}{dt} + 2\,x = -3t \quad \Rightarrow \quad (t-1)b + 2\,(a + b\,t) = -3t$$

identificando coeficientes $\begin{cases} 3b = -3 \\ 2a - b = 0 \end{cases} \quad \mapsto \quad b = -1 \qquad a = -\dfrac{1}{2}$

solución particular: $x = -\dfrac{1}{2} - t$

La ecuación lineal admite como integral general:

$$x = -\frac{1}{2} - t + \frac{k}{(t-1)^2} \qquad \text{si } t \neq 1$$

Finalmente,

$$y = x\,t^2 + t^3 = -\frac{1}{2}\,t^2 + \frac{k\,t^2}{(t-1)^2} \qquad \text{si } t \neq 1$$

Si $t = 1$ se obtendría la integral singular $y = x.1 + 1 = x + 1$

Ecuación de Clairaut
$y = xy' + g(y')$

Ecuación $y = x\,y' + g(y')$, caso particular de la ecuación de Lagrange con $y' = f(y')$

Con el cambio $t = y'$ se tiene: $y = x\,t + g(t)$, siendo $dy = t\,dx$

$$y = x\,f(t) + g(t) \quad \mapsto \quad dy = t\,dx = t\,dx + x\,dt + g(t')\,dt$$

$$\text{es decir, } \left[x + g(t')\right]dt = 0 \quad \mapsto \quad \begin{cases} dt = 0 \\ x + g(t') = 0 \end{cases}$$

⊙ Si $dt = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \dfrac{dy}{dx} = C$ se tiene una familia de rectas:

$$y = x\,t + g(t) = C\,x + g(C)$$

⊙ Si $x + g(t') = 0 \quad \Rightarrow \quad g(t) = C_1 + C_2\,x^2$ parábola que es la envolvente de la familia de rectas.

Resolver: $y = x\,y' + y'^2$

Cambio $t = y' \quad \mapsto \quad dy = t\,dx$

sustituyendo, resulta:

$$y = x\,y' + y'^2 \quad \mapsto \quad y = x\,t + t^2$$

$$dy = t\,dx = t\,dx + x\,dt + 2\,t\,dt$$

$$t\,dx = t\,dx + (x + 2\,t)\,dt \quad \mapsto \quad (x + 2\,t)\,dt \;\Rightarrow\; \begin{cases} dt = 0 \\ x + 2\,t = 0 \end{cases}$$

⊙ Si $dt = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \dfrac{dy}{dx} = C$ se tiene una familia de rectas:

$$y = x\,t + t^2 = C\,x + C^2$$

⊙ Si $dt \neq 0 \quad \mapsto \quad x + 2\,t = 0 \;\Rightarrow\; t = -\dfrac{x}{2}$

$$dy = t\,dx \;\mapsto\; dy = -\frac{x}{2}\,dx \;\mapsto\; y = -\frac{x^2}{4}$$

La parábola es la envolvente de la familia de rectas. En esta linea la tangente en un punto $(x_1, -x_1^2/4)$ tiene por ecuación:

$$y + \frac{x_1^2}{4} = -\frac{2x_1}{4}(x - x_1)$$

$$y = -\frac{x_1}{2}x + \frac{x_1^2}{4} = \left(-\frac{x_1}{2}\right)x + \left(\frac{x_1}{2}\right)^2$$

recta correspondiente a $C = -\frac{x_1}{2}$

Ecuación de Euler
$a x^2 y'' + b x y' + c y = f(x)$

Ecuación $a x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + b x \frac{dy}{dx} + c y = f(x)$

Con el cambio de variable $x = \delta e^t$, donde $\delta = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$, esto es $|x| = e^t$,

conduce a una ecuación lineal con coeficientes constantes.

$$x = \delta e^t \quad \rightarrow \quad dx = \delta e^t\, dt \quad \rightarrow \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\delta e^t}$$

entonces,

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\delta e^t}\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\delta e^t} y_t'$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = e^{-t}\frac{dy'}{dt} = \frac{1}{\delta e^t}\left(-\frac{1}{\delta e^t} y_t' + \frac{1}{\delta e^t} y_t''\right) = -\frac{1}{e^{2t}} y_t' + \frac{1}{e^{2t}} y_t''$$

Sustituyendo en la ecuación: $a x^2 y'' + b x y' + y = f(x)$

$$a e^{2t}\left(-\frac{1}{e^{2t}} y_t' + \frac{1}{e^{2t}} y_t''\right) + b\delta e^t \frac{1}{\delta e^t} y_t' + c y = f(\delta e^t)$$

$$-a y_t' + a y_t'' + b y_t' + c y = f(\delta e^t) \quad \mapsto \quad a y_t'' + (b - a) y_t' + c y = f(\delta e^t)$$

$$a \frac{d^2 y}{dt^2} + (b - a)\frac{dy}{dt} + c y = f(\delta e^t)$$

Resolver: $x^2\, y'' + x\, y' + y = L\, x$

$x > 0$ por la función logaritmo, el cambio es $x = e^t$

$$dx = e^t dt \quad \mapsto \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{e^t} = e^{-t}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = e^{-t} \frac{dy}{dt} = e^{-t}\, y_t'$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = e^{-t} \frac{dy'}{dt} = e^{-t} \left(-\, e^{-t}\, y_t' + e^{-t}\, y_t'' \right) = -e^{-2t}\, y_t' + e^{-2t}\, y_t''$$

Sustituyendo en la ecuación: $x^2\, y'' + x\, y' + y = L\, x$

$$e^{2t} \left(-e^{-2t}\, y_t' + e^{-2t}\, y_t'' \right) + e^t\, e^{-t}\, y_t' + y = L\, e^t$$

$$-y_t' + y_t'' + y_t' + y = t \quad \mapsto \quad y_t'' + y = t \quad \mapsto \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + y = t$$

Se tiene la ecuación lineal $\boxed{y_t'' + y = t}$

La ecuación sin segundo miembro $y_t'' + y = 0$

ecuación característica $r^2 + 1 = 0 \ \rightarrow \ r = \pm 1 \ \rightarrow \ \begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \beta = 1 \end{array}$

integral general sin segundo miembro: $y = C_1 \cos t + C_2\, \text{sen} t$

se busca un polinomio de grado uno para la solucion particular:

$y = a + b\, t \qquad y' = b \qquad y'' = 0$

$y_t'' + y = t \quad \mapsto \quad b\, t = t \quad \mapsto \quad b = 1$

solución particular: $y = t$

Solución general: $y = C_1 \cos t + C_2\, \text{sen} t + t$

Deshaciendo el cambio: $x = e^t \ \Rightarrow \ t = L\, x$

$$y = C_1 \cos(L\, x) + C_2\, \text{sen}\,(L\, x) + L\, x$$

Resolver: $x^2\,y''+5\,x\,y'+4\,y=x$

el cambio es $x=\delta\,e^t$ $\quad \delta=\begin{cases}-x & x<0\\ x & x>0\end{cases}$

$$dx=\delta\,e^t dt \;\mapsto\; \frac{dt}{dx}=\frac{1}{\delta\,e^t}$$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\delta\,e^t}\,\frac{dy}{dt}=\frac{1}{\delta\,e^t}\,y'_t$$

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dy'}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\delta\,e^t}\,\frac{dy'}{dt}=\frac{1}{\delta\,e^t}\left(-\frac{1}{\delta\,e^t}\,y'_t+\frac{1}{\delta\,e^t}\,y''_t\right)=-\frac{1}{e^{2t}}\,y'_t+\frac{1}{e^{2t}}\,y''_t$$

Sustituyendo en la ecuación: $x^2\,y''+5\,x\,y'+4\,y=x$

$$e^{2t}\left(-\frac{1}{e^{2t}}\,y'_t+\frac{1}{e^{2t}}\,y''_t\right)+5\,\delta\,e^t\,\frac{1}{\delta\,e^t}\,y'_t+4\,y=\delta\,e^t$$

$$-y'_t+y''_t+5\,y'_t+4\,y=\delta\,e^t \;\mapsto\; y''_t+4\,y'+4\,y=\delta\,e^t \;\mapsto\; \boxed{\frac{d^2y}{dt}+4\,\frac{dy}{dt}+4\,y=\delta\,e^t}$$

⊙ La ecuación sin segundo miembro: $y''_t+4\,y'+4\,y=0$

ecuación característica $r^2+4r+4=0 \;\rightarrow\; r=-2$ (doble)

solución sin segundo miembro: $\underline{y=(C_1+C_2\,t)\,e^{-2t}}$

⊙ Se busca una solución particular de la forma $y=\lambda\,e^t$

$y=\lambda\,e^t \qquad y'=\lambda\,e^t \qquad y''=\lambda\,e^t$

sustituyendo,

$$y''_t+4\,y'+4\,y=\delta\,e^t \;\mapsto\; \lambda\,e^t+4\lambda\,e^t+4\lambda\,e^t=\delta\,e^t$$

$$9\lambda\,e^t=\delta \;\rightarrow\; \lambda=\frac{\delta}{9\lambda} \;\rightarrow\; y=\lambda\,e^t=\frac{\delta}{9\lambda}\,e^t$$

solución particular: $\underline{y=\dfrac{\delta}{9\lambda}\,e^t}$

Solución de la ecuación completa: $y=(C_1+C_2\,t)\,e^{-2t}+\dfrac{\delta}{9\lambda}\,e^t$

Deshaciendo el cambio de variable: $x = \delta e^{t} \rightarrow \begin{cases} t = L|x| \\ x^2 = e^{2t} \end{cases}$

$$y = \frac{x}{9} + \frac{1}{x^2}\left[C_1 + C_2 L|x|\right]$$