ANÁLISIS

1. Sabiendo que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a\,.\,\text{sen}(x) - x\,e^x}{x^2}$ es finito, calcula el valor de a y el de dicho límite.

Solución:

$$\lim_{x\to 0} \frac{a\,.\,\text{sen}(x) - x\,e^x}{x^2} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{a\,.\cos x - (e^x + x\,e^x)}{2x} \overset{\text{L'Hôpital}}{=}$$

$$\overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-a\,.\,\text{sen}\,x - e^x - (e^x + x\,e^x)}{2} = \lim_{x\to 0} \frac{-a\,.\,\text{sen}\,x - 2e^x - x\,e^x}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

El parámetro a puede ser cualquier número real.

2. Sea la función f definida por $f(x) = \dfrac{2}{x^2 - 1}$ para $x \neq -1$ y $x \neq 1$

a) Halla una primitiva de f.

b) Calcula el valor de k para que el área del recinto limitado por el eje de abscisas y la gráfica de f en el intervalo [2, k] sea ln(2), donde ln denota el logaritmo neperiano.

Solución:

a) Se trata de integrar una función racional cuyo denominador tiene raíces reales simples. Por tanto, se descompone en fracciones simples:

$$\frac{2}{x^2 - 1} = \frac{2}{(x-1)\,(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A\,(x+1) + B\,(x-1)}{(x-1)\,(x+1)}$$

$2 = A(x+1) + B(x-1) \quad \mapsto \quad 2 = (A+B)\,x + (A-B)$

Identificando coeficientes: $\begin{cases} A+B=0 \\ A-B=2 \end{cases} \quad \mapsto \quad A=1 \ , \ B=-1$

Por tanto:

$$\int \frac{2}{x^2-1}\,dx = \int \frac{1}{x-1}\,dx - \int \frac{1}{x+1}\,dx = \ln|x-1| - \ln|x+1| = \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$$

es una primitiva de $f(x)$.

b) En el intervalo [2, k] la función $f(x)$ es positiva:

$$A = \int_2^k \frac{2}{x^2-1}\,dx = \ln 2 \quad \mapsto \quad \big[\ln(x-1) - \ln(x+1)\big]_2^k = \ln 2 \quad \mapsto$$

$$\mapsto \quad \big[\ln(k-1) - \ln(k+1)\big] - \big[\ln(2-1) - \ln(2+1)\big] = \ln 2$$

$$\mapsto \quad \ln(k-1) - \ln(k+1) + \ln 3 = \ln 2 \quad \mapsto \quad \cancel{\ln}\,\frac{k-1}{k+1} = \cancel{\ln}\,\frac{2}{3}$$

$$3k-3 = 2k+2 \quad \mapsto \quad \boxed{k=5}$$

3. Calcule la siguiente integral indefinida $\displaystyle\int \frac{x^2+11x}{x^3-2x^2-2x+12}\,dx$

Solución:

Se trata de una integral racional. Se hallan las raíces del denominador utilizando la regla de Ruffini.

	1	−2	−2	12
−2		−2	8	−12
	1	−4	6	0

$$x^3-2x^2-2x+12 = \\ = (x+2)\,(x^2-4x+6)$$

Descomponiendo en fracciones simples:

$$\frac{x^2+11x}{x^3-2x^2-2x+12} = \frac{x^2+11x}{(x+2)\,(x^2-4x+6)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2-4x+6}$$

$$\frac{x^2+11x}{\cancel{(x+2)(x^2-4x+6)}}=\frac{A(x^2-4x+6)+(Bx+C)(x+2)}{\cancel{(x+2)(x^2-4x+6)}}$$

$$x^2+11x=A(x^2-4x+6)+(Bx+C)(x+2)$$

Identificando coeficientes:

$$\begin{cases}1=A+B\\ 11=-4A+2B+C\\ 0=6A+2C\end{cases}\mapsto\begin{cases}1=A+B\\ 11=-7A+2B\\ C=-3A\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1=A+B\\ 11=-7A+2B\end{cases}$$

$$\mapsto\begin{cases}-2=-2A-2B\\ 11=-7A+2B\end{cases}\qquad\mapsto\begin{cases}A=-1\\ B=2\\ C=3\end{cases}$$

$$\int\frac{x^2+11x}{x^3-2x^2-2x+12}dx=\int\frac{-1}{x+2}dx+\int\frac{2x+3}{x^2-4x+6}dx\quad \color{red}{(1)}$$

$$\int\frac{-1}{x+2}dx=-\ln|x+2|\qquad\qquad \int\frac{2x+3}{x^2-4x+6}dx=\int\frac{2x-4+7}{x^2-4x+6}dx$$

$$\int\frac{2x-4+7}{x^2-4x+6}dx=\int\frac{2x-4}{x^2-4x+6}dx+\int\frac{7}{x^2-4x+6}dx\quad \color{red}{(2)}$$

$$\int\frac{2x-4}{x^2-4x+6}dx=\ln\left|x^2-4x+6\right|$$

$$\int\frac{7}{x^2-4x+6}dx=\int\frac{7}{2+(x-2)^2}dx=\int\frac{7/2}{1+\left[(x-2)/\sqrt{2}\right]^2}dx\quad\mapsto$$

$$\mapsto\quad \color{blue}{\left(\begin{array}{c}u=\dfrac{x-2}{\sqrt{2}}\quad\mapsto\quad du=\dfrac{dx}{\sqrt{2}}\\ dx=\sqrt{2}\,du\end{array}\right)}\quad\mapsto\quad\frac{7}{2}\int\frac{\sqrt{2}\,du}{1+u^2}=\left(\frac{7}{2}\sqrt{2}\right)\operatorname{arc\,tg}u=$$

$$=\frac{7}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x-2}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\color{red}{(1)}\int\frac{x^2+11x}{x^3-2x^2-2x+12}dx=-\ln|x+2|+\ln\left|x^2-4x+6\right|+\frac{7}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x-2}{\sqrt{2}}\right)+C$$

$$\int \frac{x^2+11x}{x^3-2x^2-2x+12}\,dx = \ln\left|\frac{x^2-4x+6}{x+2}\right| + \frac{7}{\sqrt{2}}\,\text{arc tg}\left(\frac{x-2}{\sqrt{2}}\right)+C$$

4. Dadas las rectas $y=3x+b$ y la parábola $y=x^2$.

a) Calcula la abscisa del punto donde la recta tangente a la parábola es paralela a la recta dada.

b) Calcula el valor del parámetro b para que la recta sea tangente a la parábola.

Solución:

a) $y=3x+b \;\mapsto\; m=3 \qquad y=x^2 \;\mapsto\; y'=2x$

La pendiente de la recta tangente en un punto es la derivada de la función en dicho punto. De otra parte, por ser la tangente paralela a $y=3x+b$, deben tener la misma pendiente. Es decir:

$$y'=2x=3 \;\mapsto\; x=\frac{3}{2}$$

La abscisa del punto en el que la recta dada es paralela a la tangente es $x=\frac{3}{2}$

b) El punto de tangencia (x, x^2) es $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$. Sustituyendo en la ecuación de la recta, se obtiene:

$$y=3x+b \;\mapsto\; \frac{9}{4}=3.\frac{3}{2}+b \;\mapsto\; b=\frac{9}{4}-\frac{9}{2}=-\frac{9}{4}$$

5. Con el símbolo lnx se representa el logarítmo de un número positivo x cuando la base del logarítmo es el número e. Sea f la función que para un número positivo x está definida por la igualdad $f(x)=4x\ln x$

Obtener razonadamente:

a) El valor de x donde la función f alcanza el mínimo relativo.

b) La ecuación de la recta tangente a la curva $y=4x\ln x$ en el punto (1, 0)

c) El área limitada entre las rectas $y=0$, $x=e$ y $x=e^2$ y la curva $y=4x\ln x$

Solución:

a) $f(x)=4x\ln x$

Para hallar los extremos relativos se iguala a 0 la primera derivada:

$$f'(x)=4\ln x+4x.\frac{1}{x}=4(\ln x+1)=0 \ \mapsto\ \ln x=-1 \ \mapsto\ x=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

Con la derivada segunda se verifica que se trata de un mínimo.

$$f''(x)=\frac{4}{x} \quad \mapsto \quad f''\left(\frac{1}{e}\right)=4e>0 \ \text{mínimo}$$

b) La pendiente de la recta tangente en un punto es la derivada de la función en dicho punto:

$$f'(x)=4(\ln x+1) \quad \mapsto \quad f'(1)=4=m$$

La ecuación de la tangente en (1, 0): $y-0=4(x-1) \ \mapsto \ y=4x-4$

c) En el intervalo $(e,\ e^2)$, la función f(x) es positiva, por tanto:

$$A=\int_e^{e^2} 4x\ln x\,dx=4\int_e^{e^2} x\ln x\,dx=\left(4I\right)_e^{e^2} \quad \text{donde} \quad I=\int x\ln x\,dx \qquad (1)$$

$$I=\int x\ln x\,dx=\left(\begin{array}{lll} u=\ln x & \mapsto & du=\frac{1}{x}dx \\ dv=x\,dx & \mapsto & \cancel{\int d}v=v=\int x\,dx=\frac{x^2}{2} \end{array}\right)=$$

$$=\left(\int u\,dv=u\,v-\int v\,du\right)=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x^{\cancel{2}}}{2}.\frac{1}{\cancel{x}}\,dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\int x\,dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}$$

(1) Finalmente, el área pedida:

$$A=\int_e^{e^2} 4x\ln x\,dx=4\left[\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}\right]_e^{e^2}=\left[2x^2\ln x-x^2\right]_e^{e^2}=$$

$$=\left[\left(2e^4\ln e^2-e^4\right)-\left(2e^2\ln e-e^2\right)\right]=2.\,e^4.\,2-e^4-2e^2+e^2$$

$$A=(3e^4-e^2)\ u^2$$

6. Calcula la siguiente integral de una función racional $\displaystyle\int\frac{x^2+1}{x^2-1}\,dx$

Solución:

Al ser del mismo grado numerador y denominador se divide:

$$\frac{x^2+1}{x^2-1}=1+\frac{2}{x^2-1}\quad\mapsto\quad\int\frac{x^2+1}{x^2-1}\,dx=\int\left(1+\frac{2}{x^2-1}\right)dx\quad\mapsto$$

$$\int\frac{x^2+1}{x^2-1}\,dx=\int\left(1+\frac{2}{x^2-1}\right)dx=\cancel{\int dx}+2\int\frac{2}{x^2-1}\,dx=x+I\qquad(1)$$

La integral $I=\displaystyle\int\frac{2}{x^2-1}\,dx$ es racional y su denominador tiene raíces simples, por lo que se descompone en fracciones simples:

$$\frac{2}{x^2-1}=\frac{2}{(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+B(x-1)}{x^2-1}$$

$$2=A(x+1)+B(x-1)$$

$$\begin{cases}\text{Si }\ x=1 & \mapsto\quad 2=2A\\ \text{Si }\ x=-1 & \mapsto\quad 2=-2B\end{cases}\quad\mapsto\quad A=1\qquad B=-1$$

En consecuencia:

$$I=\int \frac{2}{x^2-1}\,dx=\int \frac{1}{x-1}\,dx-\int \frac{1}{x+1}\,dx=\ln|x-1|-\ln|x+1|+C_1=\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C_1$$

Finalmente:

$$\color{red}{(1)}\ \int \frac{x^2+1}{x^2-1}\,dx=x+\left[\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C_1\right]=x+\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$$

6. Calcula la siguiente integral de una función racional $\int \frac{x^2+1}{x^2-1}\,dx$

Solución:

Al ser del mismo grado numerador y denominador se divide:

$$\frac{x^2+1}{x^2-1}=1+\frac{2}{x^2-1} \quad \mapsto \quad \int \frac{x^2+1}{x^2-1}\,dx=\int\left(1+\frac{2}{x^2-1}\right)dx \quad \mapsto$$

$$\int \frac{x^2+1}{x^2-1}\,dx=\int\left(1+\frac{2}{x^2-1}\right)dx=\cancel{\int d}x+2\int \frac{2}{x^2-1}\,dx=x+I \qquad \color{red}{(1)}$$

La integral $I=\int \frac{2}{x^2-1}\,dx$ es racional y su denominador tiene raíces simples, por lo que se descompone en fracciones simples:

$$\frac{2}{x^2-1}=\frac{2}{(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+B(x-1)}{x^2-1}$$

$$2=A(x+1)+B(x-1)$$

$$\begin{cases} \text{Si } x=1 & \mapsto \quad 2=2A \\ \text{Si } x=-1 & \mapsto \quad 2=-2B \end{cases} \quad \mapsto \quad A=1 \qquad B=-1$$

En consecuencia:

$$I=\int \frac{2}{x^2-1}\,dx=\int \frac{1}{x-1}\,dx-\int \frac{1}{x+1}\,dx=\ln|x-1|-\ln|x+1|+C_1=\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C_1$$

Finalmente:

$$\color{red}{(1)}\ \int \frac{x^2+1}{x^2-1}\,dx=x+\left[\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C_1\right]=x+\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$$

7. a) Dada la función $f(x)=\dfrac{a\,x+b}{c\,x-1}$ calcula los valores de a, b, c sabiendo que $x=\dfrac{1}{2}$ es una asíntota vertical y que $y=5x-6$ es la recta tangente a su gráfica en el punto correspondiente $x=1$.
Para los valores a, b, c calculados, ¿posee $f(x)$ más asíntotas?
b) Enuncia el teorema del valor medio del cálculo diferencial. ¿Se puede aplicar, en el intervalo [0, 1], este teorema a la función $f(x)=\dfrac{1}{2-x}$? En caso afirmativo, calcula el punto al que hace referencia el teorema.

Solución:

a) $f(x)=\dfrac{a\,x+b}{c\,x-1}$

• Si $x=\dfrac{1}{2}$ es una asíntota vertical de $f(x)$:

$$\lim_{x\to 1/2}\frac{a\,x+b}{c\,x-1}=\pm\infty \quad\mapsto\quad \frac{1}{2}c-1=0 \quad\mapsto\quad c=2 \quad\mapsto\quad f(x)=\frac{a\,x+b}{2x-1}$$

• Si $y=5x-6$ es tangente a $f(x)$ para $x=1$: $f'(x)=5 \quad\mapsto\quad \boxed{f'(1)=5}$

$$f(x)=\frac{a\,x+b}{2x-1}\ \mapsto\ f'(x)=\frac{a(2x-1)-2(a\,x+b)}{(2x-1)^2}=\frac{-a-2b}{(2x-1)^2}\ \mapsto\ \boxed{f'(1)=-a-2b}$$

$-a-2b=5 \qquad (1)$

Para $x=1$ el punto de tangencia: $\begin{cases} y=5x-6 & \mapsto\quad y=-1 \\ f(x)=\dfrac{a\,x+b}{2x-1} & \mapsto\quad f(1)=a+b \end{cases}$

$f(1)=a+b=-1 \qquad (2)$

Resolviendo el sistema: $\begin{cases} -a-2b=5 \\ a+b=-1 \end{cases} \quad\mapsto\quad b=-4 \qquad a=3$

$$f(x)=\frac{a\,x+b}{2x-1}\ \mapsto\ f(x)=\frac{3x-4}{2x-1}$$

Asíntota horizontal: $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x-4}{2x-1}=\frac{3}{2} \quad\mapsto\quad y=\frac{3}{2}$

Teorema de los incrementos finitos o de Lagrange o del valor medio

Sea f(x) una función continua en el intervalo cerrado [a, b] y derivable en el intervalo abierto (a, b), entonces existe, al menos, un punto $c \in (a, b)$ de modo que verifica:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

- $f(x) = \dfrac{1}{2 - x}$ es continua en $\mathbb{R}$-$\{2\}$ $\mapsto$ Es continua en [0, 1]
- $f'(x) = \dfrac{1}{(2 - x)^2}$ es derivable en $\mathbb{R}$-$\{2\}$ $\mapsto$ Es derivable en (0, 1)

Según el teorema del valor medio existe $c \in (0, 1)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} \quad \mapsto \quad \frac{1}{(2 - c)^2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \qquad \begin{cases} f(1) = \dfrac{1}{2 - 1} = 1 \\ f(0) = \dfrac{1}{2 - 0} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\frac{1}{(2 - c)^2} = \frac{1}{2} \quad \mapsto \quad (2 - c)^2 = 2 \quad \mapsto \quad c^2 - 4c + 2 = 0 \quad \mapsto \quad c = 2 \pm \sqrt{2}$$

Como $c \in (0, 1)$ $\mapsto$ $\boxed{c = 2 - \sqrt{2}}$

8. Dibuja y calcula el área de la región limitada por la gráfica de la parábola $f(x) = -x^2$ y la recta normal a la gráfica de f(x) en el punto correspondiente a $x = 1$.
(Nota: para el dibujo de las gráficas, indicar los puntos de corte con los ejes, el vértice de la parábola y concavidad o convexidad).

Solución:

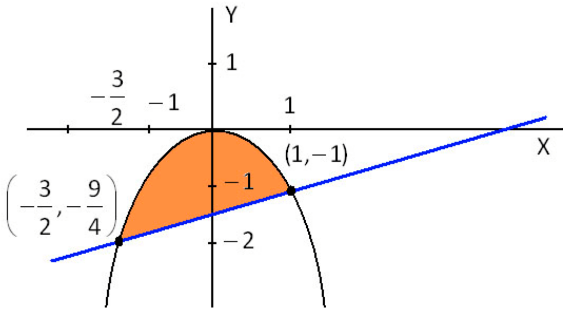
a) La pendiente de la recta tangente a la parábola $f(x) = -x^2$ es la derivada $f'(x) = -2x$ $\mapsto$ $f'(1) = -2$

La normal es perpendicular a la tangente, por tanto la pendiente de la normal es: $-2\,.\,m' = -1 \quad \mapsto \quad m' = \dfrac{1}{2}$

El punto de corte para $x = 1$ es $(1, -1)$

La ecuación de la recta normal: $y + 1 = \dfrac{1}{2}(x-1) \quad \mapsto \quad y = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}x$

La normal $y = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}x$ corta a los ejes $\begin{cases} x = 0 \quad \mapsto \quad y = -\dfrac{3}{2} & \left(0, -\dfrac{3}{2}\right) \\ y = 0 \quad \mapsto \quad x = 3 & (3, 0) \end{cases}$



Igualando las ecuaciones se calculan los puntos de corte:

$$-x^2 = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}x \quad \mapsto \quad 2x^2 + x - 3 = 0$$

Los puntos de corte son: $(1, -1)$ y $\left(-\dfrac{3}{2}, -\dfrac{9}{2}\right)$

El área de la zona sombreada:

$$A = \int_{-\frac{3}{2}}^{1} \left[-x^2 - \left(-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}x\right)\right] dx = \int_{-\frac{3}{2}}^{1} \left(-x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\right) dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{4} + \frac{3}{2}x\right]_{-\frac{3}{2}}^{1} = \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{27}{24} - \frac{9}{16} - \frac{9}{4}\right) = \frac{125}{48}\,u^2$$

9. Dada la función $f(x)=\begin{cases} a+\ln(1-x) & \text{si } x<0 \\ x^2 e^{-x} & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$

(donde ln denota logaritmo neperiano) se pide:

a) Calcular $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b) Calcular el valor de a, para que f(x) sea continua en todo $\mathbb{R}$.

c) Estudiar la derivabilidad de f y calcular f', donde sea posible.

Solución:

a) $f(x)=\begin{cases} a+\ln(1-x) & \text{si } x<0 \\ x^2 e^{-x} & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[a+\ln(1-x)\right]=a+\infty=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[x^2 e^{-x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}\underset{\text{L'Hôpital}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}\underset{\text{L'Hôpital}}{=}$$
$$\underset{\text{L'Hôpital}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=\frac{2}{+\infty}=0$$

b) Para que f(x) sea continua en todo $\mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to 0}\left[a+\ln(1-x)\right]=\lim_{x\to 0}\left[x^2 e^{-x}\right]=f(0)=0 \quad\mapsto\quad a=0$$

c) Si $a=0 \;\mapsto\; f(x)=\begin{cases} \ln(1-x) & \text{si } x<0 \\ x^2 e^{-x} & \text{si } x\geq 0 \end{cases} \;\mapsto\; f'(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{1-x} & \text{si } x<0 \\ \dfrac{x(2-x)}{e^x} & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$

La derivabilidad en $x=0$: $f'(0^-)=-1\neq f'(0^+)=0 \;\mapsto\; f(x)$ no es derivable en $x=0$, es derivable en $\mathbb{R}-\{0\}$

- Si $a\neq 0$ tampoco es derivable en $x=0$ por no ser continua en dicho punto.

10. a) Enuncie el teorema de Bolzano.

b) Aplique el teorema de Bolzano para probar que la ecuación $\cos x = x^2 - 1$ tiene soluciones positivas.

c) ¿Tiene la ecuación $\cos x = x^2 - 1$ alguna solución negativa? Razone la respuesta.

Solución:

Teorema de Bolzano o teorema de la existencia de raíces

Si una función f es continua en el intervalo cerrado [a, b] y el signo de f(a) es distinto del signo de f(b), entonces existe, al menos, un $c \in (a, b)$ de modo que $f(c) = 0$

f es continua en [a, b] y signo $[f(a)] \neq$ signo $[f(b)]$ $\Rightarrow \exists c \in (a, b) / f(c) = 0$

b) Las soluciones de la ecuación $\cos x = x^2 - 1$ coinciden con los valores de x que hacen cero la función $F(x) = x^2 - 1 - \cos x$

$F(x) = x^2 - 1 - \cos x$ es continua en $\mathbb{R}$ por ser composición de funciones continuas.

$$F\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi^2}{36} - 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} < 0 \qquad F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} - 1 < 0$$

Por el teorema de Bolzano $\exists\, c \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$ tal que $F(c) = 0$, c es una solución positiva de la ecuación dada.

c) $\begin{cases} F(-\pi) = (-\pi)^2 - 1 - \cos(-\pi) = \pi^2 - 1 - (-1) = \pi^2 > 0 \\ F(0) = -1 - 1 = -2 < 0 \end{cases}$

Por el teorema de Bolzano $\exists\, c' \in (-\pi, 0)$ tal que $F(c') = 0$, c' es una solución negativa de la ecuación dada. En consecuencia, dicha ecuación sí tiene alguna solución negativa.

11. Un agricultor hace un estudio para plantar árboles en una finca. Sabe que si planta 24 árboles la producción media de cada uno de ellos será de 600 frutos. Estima que por cada árbol adicional plantado, la producción de cada árbol disminuye en 15 frutos.

a) ¿Cuál debe ser el número total de árboles que debe tener la huerta para que la producción sea máxima?

b) ¿Cuál es esa producción?

Solución:

a) Se trata de optimizar: $\begin{cases} \text{nº árboles} & & \text{frutos del árbol} \\ 24 & \mapsto & 600 \\ 24+x & \mapsto & 600-15x \end{cases}$

Función de producción: $y=(24+x).(600-15x)=-15x^2+240x+14400$

Para calcular el máximo se iguala a cero la derivada primera:

$y'=-30x+240=0 \quad \mapsto \quad x=8$

Con la derivada segunda se verifica que se trata de un máximo:

$y''=-30<0 \quad \mapsto \quad \text{máximo}$

b) $y=(24+8).(600-15.8)=15360$

La producción máxima es de 15360 frutos.

12. a) Enuncie el teorema de Bolzano. Probar que la función $f(x)=x^3+2x-4$ corta al eje OX en algún punto del intervalo [1, 2]. ¿Puede cortarlo en más de un punto?

b) Calcula $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{x+2}{x^2+x+2}\right)^{1/x^2}$

Solución:

Teorema de Bolzano o teorema de la existencia de raíces

Si una función f es continua en el intervalo cerrado [a, b] y el signo de f(a) es distinto del signo de f(b), entonces existe, al menos, un $c\in(a,b)$ de modo que $f(c)=0$

$$f \text{ es continua en } [a,b] \text{ y signo } [f(a)] \neq \text{signo } [f(b)] \;\Rightarrow\; \exists\, c\in(a,b)\,/\,f(c)=0$$

$f(x)=x^3+2x-4$ es continua y derivable en $\mathbb{R}$.

$f(1)=-1<0 \qquad\qquad f(2)=8>0$

Por el teorema de Bolzano $\exists\, c\in(1,2)$ tal que $f(c)=0$, es decir, f(x) corta en c al eje OX.

Como $f'(x)=3x^2+2>0$ para todo valor de x $\mapsto$ f(x) siempre es creciente, luego no puede cortar al eje OX más que en un punto.

b) $E=\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{x+2}{x^2+x+2}\right)^{1/x^2}=e^{\lambda}$ es una indeterminación del tipo 1^{∞}

donde $\lambda=\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{x+2}{x^2+x+2}-1\right).\dfrac{1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\dfrac{-1}{x^2+x+2}=-\dfrac{1}{2}$

$$E=e^{-1/2}=\frac{1}{e^{1/2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$$

13. De una función, f, se sabe que es derivable en todos los puntos de la recta real y que su derivada verifica $f'(x) \geq 3$ para todo x.
Además $f(1) = 1$. ¿Hay suficientes datos para asegurar que $f(21) \geq 61$?
Razona la respuesta.

Solución:

Teorema de los incrementos finitos o de Lagrange o del valor medio

Sea f(x) una función continua en el intervalo cerrado [a, b] y derivable en el intervalo abierto (a, b), entonces existe, al menos, un punto $c \in (a, b)$ de modo que verifica:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Como la función f es derivable en todos los puntos de la recta real, también es continua, luego cumple las hipótesis del teorema de los incrementos finitos o de Lagrange en el intervalo [1, 21]:

- f es continua en [1, 21]
- f es derivable en (1, 21)

Se puede afirmar que existe un número $c \in (1,\ 21)$ que verifica:

$$f'(c) = \frac{f(21) - f(1)}{21 - 1} \quad \Leftrightarrow \quad 20.f'(c) = f(21) - f(1) \quad \mapsto \quad \boxed{f(21) = 1 + 20.f'(c)}$$

Siendo $f'(c) \geq 3 \quad \mapsto \quad 20.f'(c) \geq 60$

Así se obtiene: $f(21) = 1 + 20.f'(c) \geq 1 + 60 \quad \mapsto \quad \boxed{f(21) \geq 61}$

14. Demuestra que $\forall x > 1$ se verifica la siguiente desigualdad:

$$\ln x > \frac{2(x-1)}{x+1}$$

Solución:

Se estudia la monotonía de la función: $f(x) = \ln x - \dfrac{2(x-1)}{x+1}$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2(x+1) - 2(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x + 1 - 4x}{x\,(x+1)^2} = \frac{(x-1)^2}{x\,(x+1)^2}$$

La función es estrictamente creciente $\forall x > 1$, dado que para estos valores f'(x) es positiva, con lo cual:

$$x > 1 \;\mapsto\; f(x) > f(1) = 0 \;\mapsto\; \ln x - \frac{2(x-1)}{x+1} > 0 \;\mapsto\; \boxed{\ln x > \frac{2(x-1)}{x+1}}$$

15. a) Enuncia el teorema de Rolle.

b) Calcula b para que $f(x) = x^3 - 4x + 3$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [0, b]. ¿Dónde cumple la tesis?

Solución:

Teorema de Rolle

Si f es una función continua en [a, b] y derivable en (a, b) con $f(a) = f(b)$, entonces existe algún punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

b) f(x) es continua y derivable en $\mathbb{R}$, por tanto, es continua en [0, b] y derivable en (0, b), cualquiera que sea el valor de b.

Para que se verifique la hipótesis del teorema de Rolle en [0, b], ha de tenerse que $f(a) = f(b)$:

$$f(x) = x^3 - 4x + 3 \equiv \begin{cases} f(0) = 3 \\ f(b) = b^3 - 4b + 3 \end{cases} \;\mapsto\; \begin{array}{l} b^3 - 4b + 3 = 3 \\ b^3 - 4b = 0 \end{array}$$

$$b^3-4b=0 \quad \mapsto \quad b(b^2-4)=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} b=0 & \text{no vale} \\ b=-2 & \text{no vale} \\ b=2 \end{cases}$$

Como se considera el intervalo [0, b], ha de ser $b>0$.

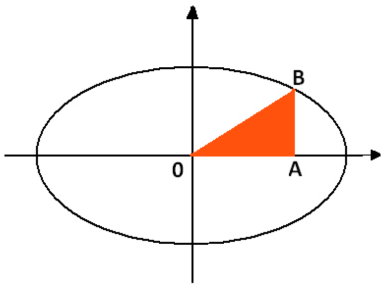
Por tanto, el teorema de Rolle se cumple en [0, 2].

∘ Las hipótesis del teorema se verifican:

$$f'(x)=3x^2-4=0 \quad \mapsto \quad x^2=\frac{4}{3} \quad \mapsto \quad x=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Se cumple en $c=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\in(0,2)$

16. Sea el triángulo rectángulo, en $\mathbb{R}^2$, de vértices $O(0,\ 0)$; $A(x,\ 0)$ y $B(x,\ y)$, $x>0$ e $y>0$, estando el vértice $(x,\ y)$ sobre la elipse de ecuación $x^2+2y^2=2$ tal como indica la figura. Calcula cuál ha de ser el vértice $(x,\ y)$ para que el triángulo rectángulo tenga área máxima.



Solución:

La función a optimizar es $S=\dfrac{1}{2}\,xy$

Utilizando la relación $x^2+2y^2=2$, se obtiene la expresión:

$$x=\sqrt{2-2y^2} \quad \mapsto \quad S=\frac{y\sqrt{2-2y^2}}{2}=\frac{\sqrt{2y^2-2y^4}}{2}$$

Optimizando la función:

$$S'(y)=\frac{4y-8y^3}{4\sqrt{2y^2-2y^4}}=\frac{\cancel{4y}\,(1-2y^2)}{\cancel{4y}\,\sqrt{2-2y^2}}=\boxed{\frac{(1-2y^2)}{\sqrt{2-2y^2}}}$$

$$S'(y)=0 \quad \mapsto \quad 1-2y^2=0 \quad \mapsto \quad y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Solo se considera $y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, dado que ha de ser positiva.

La segunda derivada S'':

$$S''(y)=\frac{-4y\sqrt{2-2y^2}-\dfrac{\left[-4y(1-2y^2)\right]}{2\sqrt{2-2y^2}}}{\left(\sqrt{2-2y^2}\right)^2}=\boxed{\frac{4y^3-6y}{(2-2y^2)\sqrt{2-2y^2}}}$$

$$S''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)<0 \quad \mapsto \quad \text{La función } S(y) \text{ presenta un máximo para } y=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{El vértice } (x,\ y)=\left(\sqrt{2-2y^2},\ y\right)=\left(1,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

17. Se considera la función $f(x)=e^x+\ln x,\ x\in(0,\ \infty)$ donde $\ln$ denota el logaritmo neperiano.

a) Estudiar la monotonía y las asíntotas de f(x).

b) Demostrar que la ecuación x^2e^x-1 tiene una única solución c en el intervalo [0, 1].

c) Deducir que f presenta un punto de inflexión en c. Esbozar la gráfica de f.

Solución:

a) $f(x)=e^x+\ln x \qquad \forall x\in(0,\ \infty)$

Para estudiar la monotonía se utiliza la derivada primera:

$$f'(x)=e^x+\frac{1}{x}=\frac{xe^x+1}{x}>0 \quad \text{pues } x\in(0,\ \infty) \quad \mapsto \quad \boxed{f(x) \text{ es siempre creciente}}$$

∘ Estudio de las asíntotas:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(e^x+\ln x)=-\infty \qquad \mapsto \quad \text{Hay } \underline{\text{asíntota vertical en } x=0}$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}(e^x+\ln x)=\infty \qquad \mapsto \quad \underline{\text{No hay asíntotas horizontales}}$$

Como no hay asíntotas horizontales se analiza si existen asíntotas oblicuas:

Asíntotas oblicuas: $y = f(x) = n + mx$

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x + \ln x}{x} \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x + \dfrac{1}{x}}{1} = \infty \quad \mapsto \quad \underline{\text{No hay asíntotas oblicuas}}$$

b) Sea $F(x) = x^2 e^x - 1$ una función continua y derivable en $\mathbb{R}$, por tanto en $[0, 1]$

Siendo $F(0) = -1 < 0$ y $F(1) = e - 1 > 0 \xrightarrow{\text{Teorema Bolzano}} \exists\, c \in (0,1)$ tal que $F(c) = 0$, es decir, c es solución de la ecuación $x^2 e^x - 1 = 0$

⊗ Falta probar que es solución única:

Suponiendo que $h > c$ fuera otra solución de la ecuación $x^2 e^x - 1 = 0$, se tendría $F(h) = 0$. Aplicando el <u>teorema de Rolle</u> en el intervalo $[c, h]$, existiría un punto $d \in (c, h)$, y en consecuencia, $d \in (0, 1)$ tal que $F'(d) = 0$

$$F'(x) = 2x e^x + x^2 e^x = x e^x (2 + x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \notin (0, 1) \\ x = -2 \notin (0, 1) \end{cases}$$

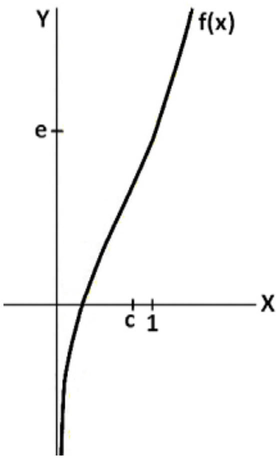
Hay un razonamiento análogo para $h < c$

En consecuencia, <u>c es solución única</u>

c) $f(x) = e^x + \ln x \quad \mapsto \quad f'(x) = e^x + \dfrac{1}{x}$

$$f''(x) = e^x - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 e^x - 1}{x^2} = 0 \quad \mapsto \quad x^2 e^x - 1 = 0$$

Por el apartado anterior $\exists\, c \in (0,1)$ tal que $c^2 e^c - 1 = 0$, es por tanto un punto de inflexión de $f(x)$.



18. Calcula el dominio y representa gráficamente la función $f(x)=\ln\frac{x}{x+1}$

Solución:

- Dominio de $f(x)$: La función $f(x)$ existe si $\frac{x}{x+1}>0$

Un punto conflictivo es $x=-1$, pues anula al denominador de $\frac{x}{x+1}$

Otro punto conflictivo es $\frac{x}{x+1}=0 \quad \mapsto \quad x=0$

El signo de $\frac{x}{x+1}$ en los intervalos que determinan los puntos hallados:

	x	$x+1$	$\frac{x}{x+1}$
$(-\infty,-1)$	$-$	$-$	$+$
$(-1,0)$	$-$	$+$	$-$
$(0,\infty)$	$+$	$+$	$+$

$\boxed{\text{Dominio } f(x)=(-\infty,\,-1)\cup(0,+\infty)}$

- Cortes con el eje OX:

$y=0 \quad \mapsto \quad \ln\frac{x}{x+1}=0 \quad \mapsto \quad \frac{x}{x+1}=1 \quad \mapsto \quad x=x+1 \quad \mapsto \quad 0=1$ absurdo

No corta al eje OX

- Asíntotas horizontales $\begin{cases} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\frac{x}{x+1}=\ln 1=0 \\ y=\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\frac{x}{x+1}=\ln 1=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{y=0}$

- Asíntotas verticales $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-1^-}\ln\frac{x}{x+1}=\ln\lim\limits_{x\to-1^-}\frac{x}{x+1}=\ln\left(\frac{-1}{0^-}\right)=\infty \\ \lim\limits_{x\to0^+}\ln\frac{x}{x+1}=\ln\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x}{x+1}=\ln(0^+)=-\infty \end{cases}$

Hay asíntotas verticales en $\boxed{x=-1}$ y en $\boxed{x=0}$

- Crecimiento y decrecimiento de $y = \ln\dfrac{x}{x+1} = \ln x - \ln(x+1)$

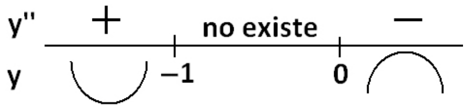
$$y' = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)} > 0 \;\text{ si }\; x \in \text{Dom } f(x)$$

Por tanto, f(x) es siempre creciente, no hay máximos ni mínimos relativos.

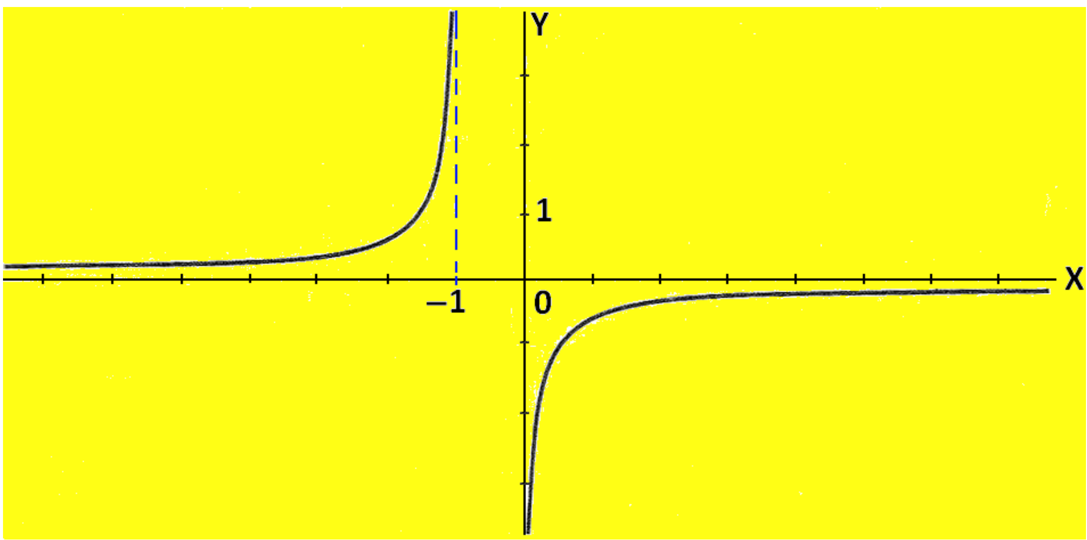
- Concavidad y puntos de inflexión:

$$y' = \frac{1}{x^2+x} \quad \mapsto \quad y'' = \frac{-(2x+1)}{(x^2+x)^2} = 0 \quad \mapsto \quad 2x+1=0 \quad \mapsto \quad x = \frac{-1}{2} \notin \text{Dom } f(x)$$

No hay puntos de inflexión.



- Representación gráfica:



20. Sea f la función de variable real definida mediante la expresión

$$f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$$

a) Determine el dominio de continuidad, simetrías, corte con los ejes y asíntotas de la función f.

b) Calcule, si existen, los extremos relativos y absolutos, e intervalos de crecimiento y decrecimiento.

c) Calcule, si existen, los puntos de inflexión de f.

d) Dibuje la gráfica de f.

Solución:

a) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1} \quad \mapsto \quad x^2+1\neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Dom } f(x)=\mathbb{R}$

$$\bullet\ \text{Asíntotas}\begin{cases}\text{La función f(x) es continua en todo } \mathbb{R}\text{, por tanto} \\ \text{no tiene asíntotas verticales.} \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x^2+1}=0 \quad \mapsto \quad y=0 \text{ es una asíntota horizontal}\end{cases}$$

$\bullet$ Simetrías: $f(-x)=\dfrac{2(-x)}{(-x)^2+1}=\dfrac{-2x}{x^2+1}=-f(x) \quad \mapsto \quad$ Como $f(x)=-f(x)$ la función es simétrica respecto al origen.

$$\bullet\ \text{Corte con los ejes}\begin{cases}\text{eje OX:} \quad y=0 \ \mapsto \ x=0 \\ \text{eje OY:} \quad x=0 \ \mapsto \ y=0\end{cases} \quad \Rightarrow \quad (0,\,0) \text{ punto corte}$$

b) Para estudiar el crecimiento y los extremos relativos se iguala a cero la derivada primera:

$$f'(x)=\frac{2(x^2+1)-2x.2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}=0 \quad \mapsto \quad -2x^2+2=0 \quad \mapsto \quad x=\pm 1$$

f'(x)	−		+		−
f(x)	↘	−1	↗	1	↘

La función decrece en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ y crece en $(-1,1)$

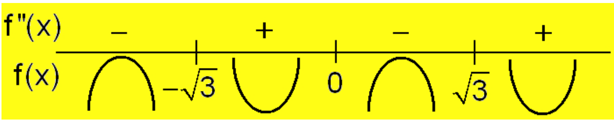
Presenta un mínimo relativo en $(-1,-1)$ y un máximo relativo en $(1,1)$, ya que coinciden con los extremos absolutos.

c) Para calcular los puntos de inflexión se iguala a cero la derivada segunda:

$$f'(x)=\frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2} \quad \mapsto \quad f''(x)=\frac{-4.x.(x^2+1)^2-(-2x^2+2).2.(x^2+1).2.x}{(x^2+1)^4}=$$

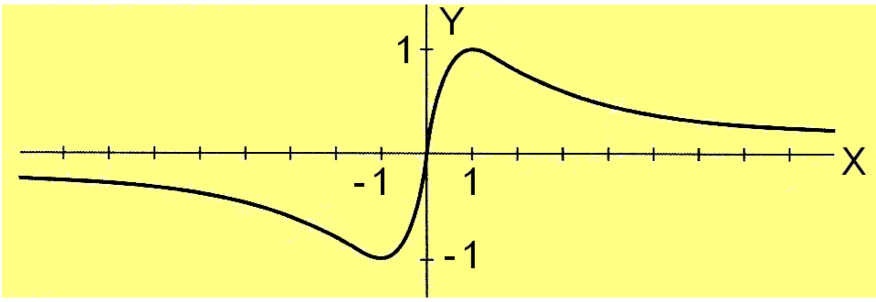
$$=\frac{\cancel{(x^2+1)}\left[-4x(x^2+1)-4x(-2x^2+2)\right]}{(x^2+1)^{\cancel{4}}}=\frac{-4x^3-4x+8x^3-8x}{(x^2+1)^3}=$$

$$=\frac{4x^3-12x}{(x^2+1)^3}=0 \quad \mapsto \quad 4x^3-12x=4x(x^2-3)=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x=0 \\ x=\pm\sqrt{3} \end{cases}$$



Hay puntos de inflexión en $(0,\ 0)$, $\left(-\sqrt{3},\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$ y $\left(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

La gráfica de la función:



21. a) Enuncie la regla de Barrow.

b) Determine el área comprendida entre las curvas $y=x^2$ e $y=\sqrt{x}$ y la recta que pasa por los puntos $(2,\ 4)$ y $(4,\ 2)$.

Solución:

Si f es continua en el intervalo [a, b] y F es cualquier primitiva de f, $F'(x)=f(x)$, entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\left[F(x)\right]_a^b=F(b)-F(a)$$

b) La ecuación de la recta que pasa por los puntos (2, 4) y (4, 2):

$$\frac{x-2}{4-2}=\frac{y-4}{2-4} \quad \mapsto \quad y=6-x$$

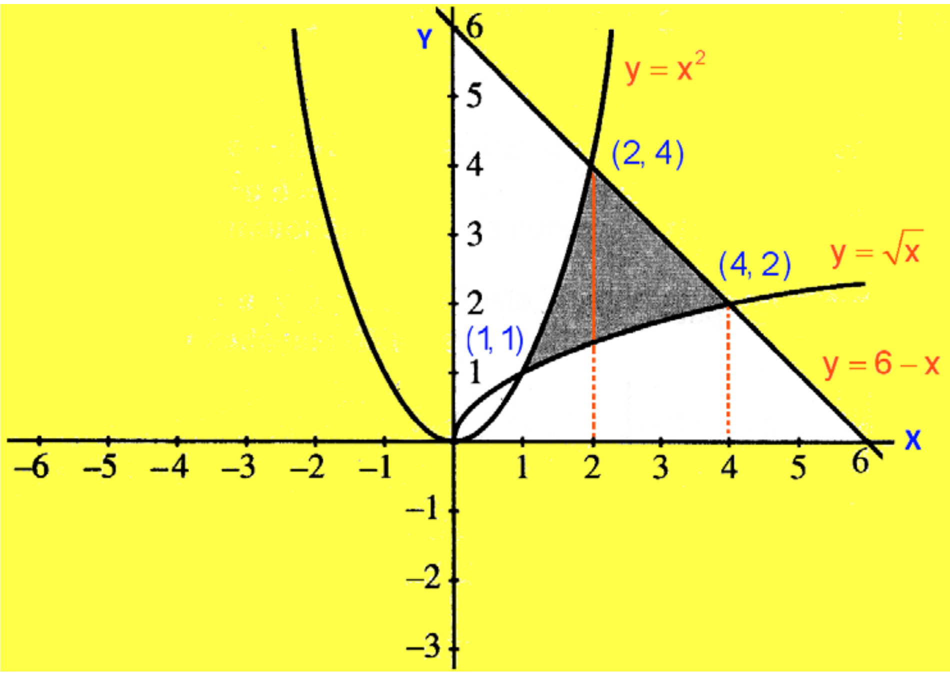
Los puntos de corte entre las dos curvas y la recta:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = \sqrt{x} \end{cases} \mapsto \; x^2 = \sqrt{x} \; \mapsto \; x^2(x^2-1)=0 \; \mapsto \begin{cases} \text{puntos} \\ (0,0) \text{ y } (1,1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 6-x \end{cases} \mapsto \; x^2 + x - 6 = 0 \; \mapsto \begin{cases} \text{puntos} \\ (2,4) \text{ y } (-3,9) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = 6-x \end{cases} \mapsto \; x^2 - 13x + 36 = 0 \; \mapsto \begin{cases} \text{puntos} \\ (9,-3) \text{ y } (4,2) \end{cases}$$

El área pedida es la zona rayada:



$$A = \int_1^2 \left[x^2 - \sqrt{x}\right] dx \; + \int_2^4 \left[(6-x) - \sqrt{x}\right] dx =$$

$$= \int_1^2 x^2\, dx - \int_1^2 \sqrt{x}\, dx + \int_2^4 (6-x)\, dx - \int_2^4 \sqrt{x}\, dx =$$

$$= \int_1^2 x^2\,dx + \int_2^4 (6-x)\,dx - \int_1^4 \sqrt{x}\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 + \left[6x - \frac{x^2}{2}\right]_2^4 - \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_1^4 = \frac{7}{3} + 6 - \frac{14}{3} = \frac{11}{3}\,u^2$$

22. Calcula el área de la región limitada por la gráfica de la parábola de ecuación $y^2 = x$ y el segmento cuyos extremos son los puntos $P(1,-1)$ y $Q(4,\ 2)$.

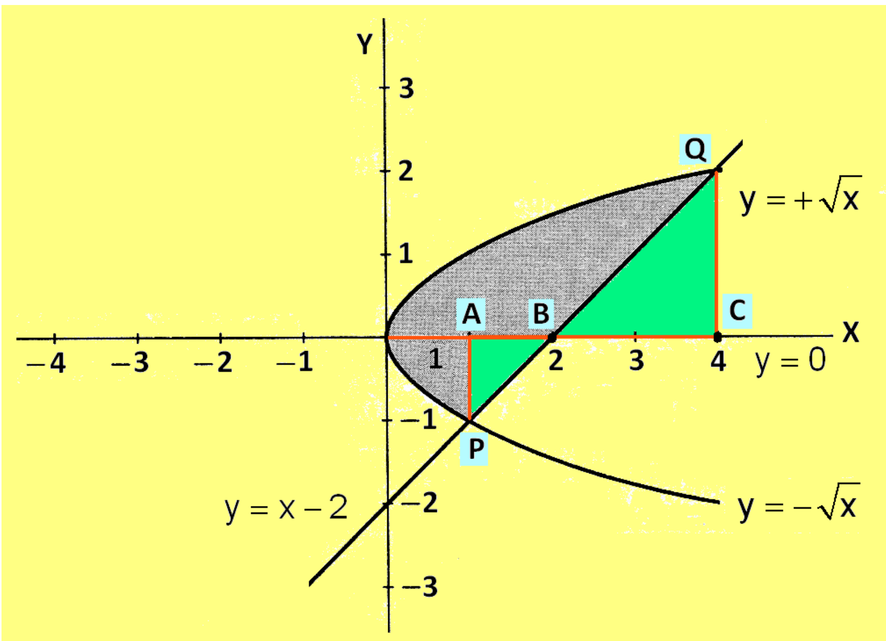
Solución:

La ecuación de la recta que pasa por los puntos $P(1,-1)$ y $Q(4,\ 2)$:

$$\frac{x-1}{4-1} = \frac{y+1}{2+1} \quad \mapsto \quad y = x-2$$

Los puntos P y Q pertenecen a la parábola $y^2 = x \begin{cases} P(1,-1) & (-1)^2 = 1 \\ Q(4,\ 2) & 2^2 = 4 \end{cases}$

La gráfica de la parábola y la recta:



El área de la zona pedida es:

$$A = \left(\int_0^4 (\sqrt{x} - 0)\,dx - A_{\underset{QCB}{\triangle}}\right) + \left(\int_0^1 \left[0 - (-\sqrt{x})\right] dx + A_{\underset{PAB}{\triangle}}\right) =$$

$$=\left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^4-\frac{2x2}{2}+\left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^1+\frac{1x1}{2}=\frac{16}{3}-2+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{27}{6}=4,5\ u^2$$

23. Estudiar la continuidad y derivabilidad de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{1}{1+|x|}$ b) $f(x)=\dfrac{|x|}{x^2-1}$

Solución:

a) $f(x)=\dfrac{1}{1+|x|}=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x} & \text{si } x<0\\[2ex] \dfrac{1}{1+x} & \text{si } x\geq 0\end{cases}$

Continuidad:

• Si $x\neq 0$ $\mapsto$ f(x) es continua al estar formada por dos funciones continuas en los intervalos en los que están definidas.

• Si $x=0$ $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1-x}=1\\[2ex] \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+x}=1\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$ $\mapsto$ es continua en $x=0$. Por tanto, es continua en $\mathbb{R}$

Derivabilidad:

• Si $x\neq 0$ es derivable.

$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x} & \text{si } x<0\\[2ex] \dfrac{1}{1+x} & \text{si } x\geq 0\end{cases}$ $\mapsto$ $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(1-x)^2} & \text{si } x<0\\[2ex] \dfrac{-1}{(1+x)^2} & \text{si } x>0\end{cases}$

• Si $x=0$: $f'(0^-)=1\neq f'(0^+)=-1$ $\mapsto$ No es derivable en $x=0$

La función f(x) es derivable en $\mathbb{R}-\{0\}$

b) $f(x)=\dfrac{|x|}{x^2-1}=\begin{cases}\dfrac{-x}{x^2-1} & \text{si } x<0\\[2mm] \dfrac{x}{x^2-1} & \text{si } x\geq 0\end{cases}$

El dominio de la función: $\text{Dom } f(x)=\mathbb{R}-\{-1,1\}$

Continuidad:

- Si $x\neq 0$, $x\neq -1$, $x\neq 1$ la función es continua, dado que está formada por funciones continuas en estos puntos.

- En $x=-1$ y $x=1$ la función no es continua, no se encuentra definida en estos puntos.

- En $x=0\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x}{x^2-1}=0\\[2mm] \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x^2-1}=0\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0) \quad \mapsto \quad$ es continua en $x=0$.

Por tanto, es una función continua en $\mathbb{R}-\{-1,1\}$

Derivabilidad:

- Si $x\neq 0$, $x\neq -1$, $x\neq 1$ la función es derivable, siendo:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{-x}{x^2-1} & \text{si } x<0\\[2mm] \dfrac{x}{x^2-1} & \text{si } x\geq 0\end{cases} \quad \mapsto \quad f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{(x^2-1)^2} & \text{si } x<0\\[2mm] \dfrac{-x^2-1}{(x^2-1)^2} & \text{si } x>0\end{cases}$$

- En $x=-1$ y en $x=1$ la función no es derivable, no se encuentra definida.

- En $x=0$: $f'(0^-)=1 \neq f'(0^+)=-1 \quad \mapsto \quad$ No es derivable en $x=0$

La función f(x) es derivable en $\mathbb{R}-\{-1,0,1\}$

24. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{n^2-3}{n^2+2n}\right)^{2n}$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} x\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{2}{x}\right)$

Solución:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{n^2-3}{n^2+2n}\right)^{2n}$ es una indeterminación del tipo 1^{∞}

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{n^2-3}{n^2+2n}\right)^{2n} = e^{\lambda}$$

donde, $\lambda = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{n^2-3}{n^2+2n}-1\right)2n = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-4n^2-6n}{n^2+2n} = -4$

Por tanto: $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{n^2-3}{n^2+2n}\right)^{2n} = e^{-4} = \dfrac{1}{e^4}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} x\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{2}{x}\right)$ es una indeterminación del tipo $\infty.0$

$$\lim_{x \to +\infty} x\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{-2}{\cancel{x^2}}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{x}\right)}{\frac{-1}{\cancel{x^2}}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{x}\right) = 2$$

25. Dada la función $f(x)=x\,e^{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$, demuestra que existe un valor $\alpha\in(1,\,3)$ tal que $f''(\alpha)=\pi$. Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

Solución:

$$f(x)=x\,e^{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$$

$$f'(x)=e^{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}-\frac{\pi}{2}x\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)e^{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}=\boxed{e^{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}\left[1-\frac{\pi x}{2}\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]}$$

$$f''(x)=-\frac{\pi}{2}\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)e^{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}\left[1-\frac{\pi x}{2}\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]+$$

$$+e^{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}\left[-\frac{\pi}{2}\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)-\frac{\pi^2 x}{4}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]=$$

$$=e^{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}\left[-\frac{\pi}{2}\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\left\{1-\frac{\pi x}{2}\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right\}-\frac{\pi}{2}\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)-\frac{\pi^2 x}{4}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]=$$

$$=e^{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}\left[\overbrace{-\frac{\pi}{2}\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)}+\frac{\pi^2 x}{4}\mathrm{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)\overbrace{-\frac{\pi}{2}\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)}-\frac{\pi^2 x}{4}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]\;\mapsto$$

$$\mapsto\;\boxed{f''(x)=e^{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}\left[-\pi\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)+\frac{\pi^2 x}{4}\mathrm{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)-\frac{\pi^2 x}{4}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]}$$

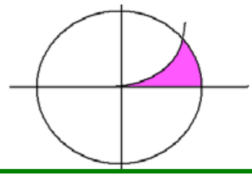
$$\alpha\in(1,\,3)\;\equiv\;\begin{cases} f(1)=-\pi+\dfrac{\pi^2}{4}\approx-0{,}67 \\[2ex] f(3)=\pi+\dfrac{3\pi^2}{4}\approx 10{,}54\end{cases}$$

Como $f''(x)$ es continua por ser composición de funciones continuas, verifica el teorema de los valores intermedios o teorema de Darboux.

- Es decir, $f''(x)$ en el intervalo (1, 3) toma todos los valores intermedios entre $f(1)=-\pi+\dfrac{\pi^2}{4}$ y $f(3)=\pi+\dfrac{3\pi^2}{4}$

Como $-\pi+\dfrac{\pi^2}{4}<\pi<\pi+\dfrac{3\pi^2}{4}\;\mapsto\;\exists\,\alpha\in(1,\,3)\;/\;f''(\alpha)=\pi$

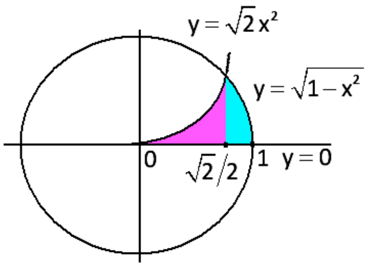
26. Calcula el área limitada por la parábola $y=\sqrt{2}\,x^2$, la circunferencia $x^2+y^2=1$ y el eje OX, que aparece rayada en la figura.



Solución:

Se calculan los puntos de corte de la circunferencia y la parábola:

$$\begin{cases} y=\sqrt{2}\,x^2 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \mapsto \quad x^2+2x^4=1 \quad \mapsto \quad 2x^4+x^2-1=0 \quad \mapsto \quad \begin{cases} x^2=1/2 \\ \cancel{x^2=-1} \end{cases}$$



El punto de corte es $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$A=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (\sqrt{2}\,x^2-0)\,dx+\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\left(\sqrt{1-x^2}-0\right)dx \qquad (1)$$

- $$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{2}\,x^2\,dx=\sqrt{2}\left(\frac{x^3}{3}\right)_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3=\frac{4}{24}=\frac{1}{6}$$

- $$\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx \quad \text{con el cambio de variable } x=\operatorname{sen}t$$

$$x=\operatorname{sen}t \quad \mapsto \quad \begin{cases} dx=\cos t\,dt \\ x=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \quad \mapsto \quad t=\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{\pi}{4} \\ x=1 \quad \mapsto \quad t=\operatorname{arcsen}(1)=\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\,\cos t\,dt=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\cos 2t\right)dt=\frac{1}{2}\left[t+\frac{\operatorname{sen}2t}{2}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)\right]=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$$

(1) $$A=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\sqrt{2}\,x^2\,dx+\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{1}{6}+\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}=\boxed{\frac{\pi}{8}-\frac{1}{12}\;u^2}$$

27. A) Enunciado de la regla de Barrow.

B) Sea $f(x)=\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$, y sean $a,b\in\mathbb{R}^+$

Demuestre que $f(a\,.\,b)=f(a)+f(b)$

Solución:

Si f es continua en el intervalo [a, b] y F es cualquier primitiva de f, $F'(x)=f(x)$, entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\left[F(x)\right]_a^b=F(b)-F(a)$$

B) $f(x)=\int_1^x \frac{1}{t}\,dt=\left(\ln|t|\right)_1^x=\ln x$

Se tiene que demostrar: $\ln(a\,.\,b)=\ln a+\ln b$

Sea $\begin{cases}A=\ln a\\ B=\ln b\end{cases}\;\mapsto\;\begin{matrix}a=e^A\\ b=e^B\end{matrix}\;\mapsto\; a.b=e^A\,.\,e^B=e^{A+B}\;\mapsto\;\ln\,(a.b)=A+B$

entonces: $\ln(a\,.\,b)=\ln a+\ln b$

28. A) Definición de función continua en un punto. Definición de derivada de una función en un punto.

B) Estudie la continuidad y la derivabilidad de la función:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x-3} & \text{si } x\neq 3\\ 6 & \text{si } x=3\end{cases}\qquad \text{en el punto } x=3$$

Solución:

Una función es continua en un punto $x=a$ si se verifican las condiciones siguientes:

Que exista $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ Que exista $f(a)$ Que $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

La derivada de una función f en el punto $x=a$ se representa por $f'(a)$ y es igual al límite

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Si dicho límite es un número real, existe y es finito, se dice que *f es derivable en a.*

B) Para que $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x-3} & \text{si } x\neq 3\\ 6 & \text{si } x=3\end{cases}$ sea continua en $x=3$

debe verificarse: $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=f(3)$

$$\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x+3)\,\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}}=\lim_{x\to 3}(x+3)=6=f(3)$$

$f(x)$ es continua, $y=x+3$. En consecuencia, es derivable para todo $x\in\mathbb{R}$, su derivada es $y'=1$

29. a) Calcular el valor de los parámetros p y q para que la curva de ecuación $f(x)=x^3+px+q$, presente un mínimo relativo en $x=1$ y pase por el punto $(-2, 0)$.
Hallar, si los hubiere, otros puntos extremos de la función, indicando si son máximos o mínimos.

b) Esbozar la gráfica de la función anterior y hallar el área de la región finita limitada por dicha función y el eje OX.

Solución:

a) $f(x)=x^3+px+q \quad \mapsto \quad f'(x)=3x^2+p$

- Con un mínimo relativo en $x=1$ se tiene $f'(1)=0$:

$$f'(x)=3x^2+p \quad \mapsto \quad f'(1)=3+p=0 \quad \mapsto \quad p=-3$$

• Como $f(x) = x^3 - 3x + q$ pasa por el punto (−2, 0):

$0 = -8 + 6 + q \quad \mapsto \quad q = 2$

Sea la función $f(x) = x^3 - 3x + 2 \quad \mapsto \quad f'(x) = 3x^2 - 3$

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1$ puede tener extremos.

$$f''(x) = 6x \begin{cases} f''(-1) = -6 < 0 \quad \mapsto \quad \text{en } (-1, 4) \text{ tiene un máximo} \\ f''(1) = 6 > 0 \quad \mapsto \quad \text{en } (1, 0) \text{ tiene un mínimo} \end{cases}$$

b) Para calcular los puntos de corte con el eje X de la función $f(x) = x^3 - 3x + 2$, hay que resolver $0 = x^3 - 3x + 2$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & & 1 & 2 & \\ \hline & 1 & 2 & 0 & \\ -2 & & -2 & & \\ \hline & 1 & 0 & & \end{array}$$

Corte con el eje OX: $(1, 0)$ y $(-2, 0)$

Corte con el eje OY: $(0, 2)$

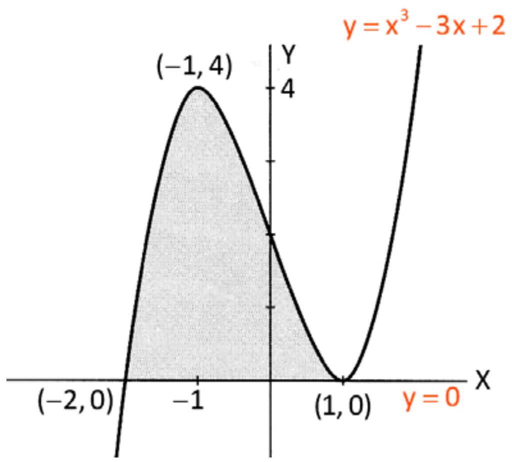
Área región sombreada:

$$A = \int_{-2}^{1} \left[(x^3 - 3x + 2) - 0 \right] dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 2x \right]_{-2}^{1} =$$

$$= \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2 \right) - (4 - 6 - 4) =$$

$$= \frac{27}{4} \, u^2$$



30. En los juzgados centrales de una determinada región ha comenzado una campaña para ahorrar papel concretada en la función:

$$A(x)=\begin{cases} e^{0,02x} & \text{si } 1\le x\le 100 \\ -\dfrac{1}{50}x+8 & \text{si } 100<x\le 390 \end{cases}$$

Donde x es el número de días transcurridos desde el inicio de la campaña y A es el número de miles de hojas ahorradas:

a) Estudiar si la función es creciente o decreciente.

b) ¿Qué sucede cuando han transcurrido 100 días desde el inicio de la campaña?

c) ¿En qué momento el ahorro es de cinco mil hojas?

Solución:

$$\text{a) } A'(x)=\begin{cases} 0,02\,e^{0,02x} & \text{si } 1<x<100 \\ -\dfrac{1}{50} & \text{si } 100<x<390 \end{cases} \equiv \begin{cases} A'(x)>0 \text{ en } (1,100) \text{ creciente} \\ A'(x)<0 \text{ en } (100,390) \text{ decreciente} \end{cases}$$

b) Para $x=100$ la función $A(x)$ es discontinua, dado que:

$$\lim_{x\to 100^-} e^{0,02x}=e^2 \neq \lim_{x\to 100^+}\left(-\frac{1}{50}x+8\right)=6$$

La discontinuidad es de salto finito: $e^2=7,389$

Transcurridos 100 días desde el inicio de la campaña, la bajada de hojas ahorradas es de $7389-6000=1389$ hojas

$$\text{c) } A(5)=\begin{cases} e^{0,02x}=5 & \mapsto\ 0,02x=\ln 5 \ \mapsto\ x=\dfrac{\ln 5}{0,02}=80,47 \\ -\dfrac{1}{50}x+8=5 & \mapsto\ \dfrac{1}{50}x=3 \ \mapsto\ x=150 \end{cases}$$

Desde el comienzo de la campaña, entre los días 81 y 150 hay un ahorro de 5000 hojas.