MATRICES - DETERMINANTES

1. Dada la matriz $P=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$. Calcula $M=P^2-3P-2I_2$

Solución:

$$P^2=P.\,P=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 0\\ 0 & 7\end{pmatrix}\qquad 3P=3\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 9\\ 6 & 3\end{pmatrix}$$

$$M=P^2-3P-2I_2=\begin{pmatrix}7 & 0\\ 0 & 7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3 & 9\\ 6 & 3\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & -9\\ -6 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & -9\\ -6 & 2\end{pmatrix}$$

2. Determina a y b de forma que la matriz $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ a & b\end{pmatrix}$ verifique $A^2=A$

Solución:

$$A^2=A.\,A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ a & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ a & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-a & -2-b\\ 2a+ab & -a+b^2\end{pmatrix}$$

$$A^2=A\ \mapsto\ \begin{pmatrix}4-a & -2-b\\ 2a+ab & -a+b^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ a & b\end{pmatrix}\ \mapsto\ \begin{cases}4-a=2 & \mapsto\ \boxed{a=2}\\ -2-b=-1 & \mapsto\ \boxed{b=-1}\\ 2a+ab=a & \mapsto\ 4-2=2\\ -a+b^2=b & \mapsto\ -2+1=-1\end{cases}$$

3. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}4 & 5 & -1\\ -3 & -4 & 1\\ -3 & -4 & 0\end{pmatrix}$, calcula $A^2, A^3, \cdots, A^{128}$

Solución:

$$A^2=A.\,A=\begin{pmatrix}4 & 5 & -1\\ -3 & -4 & 1\\ -3 & -4 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 5 & -1\\ -3 & -4 & 1\\ -3 & -4 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 4 & 1\\ -3 & -3 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2.\,A=\begin{pmatrix}4 & 4 & 1\\ -3 & -3 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 5 & -1\\ -3 & -4 & 1\\ -3 & -4 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=I$$

$$A^4=A^3.\,A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 5 & -1\\ -3 & -4 & 1\\ -3 & -4 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 5 & -1\\ -3 & -4 & 1\\ -3 & -4 & 0\end{pmatrix}=A$$

Teniendo en cuenta que $A^3=I$ se tiene:

$$A^{128}=A^{3.42+2}=(A^3)^{42}.\,A^2=I^{42}.\,A^2=A^2=\begin{pmatrix}4 & 4 & 1\\ -3 & -3 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

4. Resuelve $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & x\\ y & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}$

Solución:

$$\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & x\\ y & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}\leftrightarrow\begin{pmatrix}x-y\\ 3x+2y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+2x\\ 3y-2\end{pmatrix}\mapsto\begin{cases}x-y=3+2x\\ 3x+2y=3y-2\end{cases}\mapsto$$

$$\mapsto\begin{cases}x+y=-3\\ 3x-y=-2\end{cases}\mapsto\quad x=\frac{-5}{4}\ ,\quad y=\frac{-7}{4}$$

5. Determina las matrices A y B que son solución del siguiente sistema matricial:

$$3A-2B=\begin{pmatrix}0 & 5 & -4\\ 5 & 9 & 0\\ 15 & -4 & 4\end{pmatrix} \qquad 2A+B=\begin{pmatrix}7 & 1 & 2\\ -6 & 6 & 7\\ 10 & -5 & -2\end{pmatrix}$$

Solución:

Denotando $X=\begin{pmatrix}0 & 5 & -4\\ 5 & 9 & 0\\ 15 & -4 & 4\end{pmatrix}$ e $Y=\begin{pmatrix}7 & 1 & 2\\ -6 & 6 & 7\\ 10 & -5 & -2\end{pmatrix}$ se tiene:

$$\begin{cases}3A-2B=X\\ 2A+B=Y\end{cases} \mapsto \begin{cases}3A-2B=X\\ 4A+2B=2Y\end{cases} \mapsto 7A=X+2Y$$

$$A=\frac{1}{7}(X+2Y)=\frac{1}{7}\left[\begin{pmatrix}0 & 5 & -4\\ 5 & 9 & 0\\ 15 & -4 & 4\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}7 & 1 & 2\\ -6 & 6 & 7\\ 10 & -5 & -2\end{pmatrix}\right]=$$

$$=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}14 & 7 & 0\\ -7 & 21 & 14\\ 35 & -14 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 2\\ 5 & -2 & 0\end{pmatrix}$$

$$2A+B=\begin{pmatrix}7 & 1 & 2\\ -6 & 6 & 7\\ 10 & -5 & -2\end{pmatrix} \mapsto B=\begin{pmatrix}7 & 1 & 2\\ -6 & 6 & 7\\ 10 & -5 & -2\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 2\\ 5 & -2 & 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ -4 & 0 & 3\\ 0 & -1 & -2\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 2\\ 5 & -2 & 0\end{pmatrix} \quad , \quad B=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ -4 & 0 & 3\\ 0 & -1 & -2\end{pmatrix}$$

6. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}3&2&0\\1&0&-1\\1&1&1\end{pmatrix}$

a) Calcúlese A^{-1}

b) Resuélvase el sistema de ecuaciones: $A.\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

Solución:

a) $A=\begin{pmatrix}3&2&0\\1&0&-1\\1&1&1\end{pmatrix} \mapsto A^t=\begin{pmatrix}3&1&1\\2&0&1\\0&-1&1\end{pmatrix}$

$$|A|=|A^t|=\begin{vmatrix}3&2&0\\1&0&-1\\1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&1&1\\2&0&1\\0&-1&1\end{vmatrix}=-1$$

$A^t_{11}=\begin{vmatrix}0&1\\-1&1\end{vmatrix}=1$ $\quad (-)A^t_{12}=\begin{vmatrix}2&1\\0&1\end{vmatrix}=-2$ $\quad A^t_{13}=\begin{vmatrix}2&0\\0&-1\end{vmatrix}=-2$

$(-)A^t_{21}=\begin{vmatrix}1&1\\-1&1\end{vmatrix}=-2$ $\quad A^t_{22}=\begin{vmatrix}3&1\\0&1\end{vmatrix}=3$ $\quad (-)A^t_{23}=\begin{vmatrix}3&1\\0&-1\end{vmatrix}=3$

$A^t_{31}=\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}=1$ $\quad (-)A^t_{32}=\begin{vmatrix}3&1\\2&1\end{vmatrix}=-1$ $\quad A^t_{33}=\begin{vmatrix}3&1\\2&0\end{vmatrix}=-2$

$$A^{-1}=\left(\frac{1}{-1}\right)\begin{pmatrix}1&-2&-2\\-2&3&3\\1&-1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2&2\\2&-3&-3\\-1&1&2\end{pmatrix}$$

b) $A.\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \mapsto A^{-1}.A.\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=A^{-1}.\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=A^{-1}.\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=A^{-1}.\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2&2\\2&-3&-3\\-1&1&2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}x=1\\y=-1\\z=1\end{cases}$$

7. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}5&3\\3&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&x\\x&1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&4\end{pmatrix}$

a) Determinar el valor de x para que se verifique $B^2=A$

b) Calcular el valor de x para que $B+C=A^{-1}$

c) Calcular el valor de x para que se verifique $A-B+\frac{1}{2}C=3I$

Solución:

a) $B^2=\begin{pmatrix}2&x\\x&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&x\\x&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+x^2&3x\\3x&x^2+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&3\\3&2\end{pmatrix}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\begin{cases}4+x^2=5 & \mapsto\quad x=\pm1\\ 3x=3 & \mapsto\quad x=1 \quad\mapsto\quad x=1\\ x^2+1=2 & \mapsto\quad x=\pm1\end{cases}$$

b) $A=\begin{pmatrix}5&3\\3&2\end{pmatrix}\mapsto A^t=\begin{pmatrix}5&3\\3&2\end{pmatrix}\mapsto |A|=\begin{vmatrix}5&3\\3&2\end{vmatrix}=1$

$A^{-1}=\begin{pmatrix}2&-3\\-3&5\end{pmatrix}$

$B+C=A^{-1}\quad\mapsto\quad\begin{pmatrix}2&x\\x&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-1\\-1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&x-1\\x-1&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-3\\-3&5\end{pmatrix}$

$x-1=-3\quad\mapsto\quad x=-2$

c) $A-B+\frac{1}{2}C=3I\quad\mapsto\quad B=A+\frac{1}{2}C-3I$

$$\begin{pmatrix}2&x\\x&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&3\\3&2\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&-1\\-1&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&5/2\\5/2&1\end{pmatrix}\quad\mapsto\quad x=\frac{5}{2}$$

8. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ k & 0 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\\ k & 2\end{pmatrix}$

a) Razonar para qué valores de k la matriz $B^t A^t$ tiene inversa.

b) Resolver la ecuación $(AB)^t X = I$ para $k=0$

Solución:

a) $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ k & 0 & 1\end{pmatrix} \mapsto A^t=\begin{pmatrix}-1 & k\\ 1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ $\quad B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\\ k & 2\end{pmatrix} \mapsto B^t=\begin{pmatrix}0 & -1 & k\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$

$$C=B^t A^t=\begin{pmatrix}0 & -1 & k\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-1 & k\\ 1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2k-1 & k\\ 3 & k+2\end{pmatrix}$$

$$\text{Si } |C|\neq 0 \mapsto \exists C^{-1} \equiv \begin{vmatrix}2k-1 & k\\ 3 & k+2\end{vmatrix}=2k^2-2\neq 0 \mapsto k\neq \pm 1$$

La matriz C tiene inversa para $\forall\, k\neq \pm 1$

b) $(AB)^t X = I \mapsto X=\left[(AB)^t\right]^{-1}.\, I=\left[(AB)^t\right]^{-1}=\left[B^t A^t\right]^{-1}=C^{-1}$ $\boxed{X=C^{-1}}$

Para $k=0$: $C=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & 2\end{pmatrix} \mapsto C^t=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 0 & 2\end{pmatrix} \mapsto \begin{cases}C^t_{11}=2 & -C^t_{12}=0\\ -C^t_{21}=-3 & C^t_{22}=-1\end{cases}$

$$|C|=\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-2 \mapsto X=C^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 0\\ -3 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

9. ¿Para qué valores de x se anulan los determinantes siguientes?

a) $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & x & c \\ a & b & x \end{vmatrix} = 0$ c) $\begin{vmatrix} x & -1 & -1 & 0 \\ -x & x & -1 & 1 \\ 1 & -1 & x & 1 \\ 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$

Solución:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} = x \, . \, x^3 - 1 = x^4 - 1 = 0$$

$$x^4 - 1 = 0 \quad \mapsto \quad x = \pm\sqrt{1} \begin{cases} \nearrow x = -1 \\ \searrow x = 1 \end{cases}$$

$$\text{b)} \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & x & c \\ a & b & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & x-b & 0 \\ 0 & 0 & x-c \end{vmatrix} = a \, . \, (x-b) \, . \, (x-c) = 0 \begin{cases} \nearrow x = b \\ \searrow x = c \end{cases} \quad \text{con } a \neq 0$$

$$\text{c)} \begin{vmatrix} x & -1 & -1 & 0 \\ -x & x & -1 & 1 \\ 1 & -1 & x & 1 \\ 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix} \overset{C_1+C_2}{=} \begin{vmatrix} x-1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 & 1 \\ 0 & -1 & x & 1 \\ 0 & -1 & 0 & x \end{vmatrix} = (x-1) \begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ -1 & x & 1 \\ -1 & 0 & x \end{vmatrix} =$$

$$= (x-1) \, . \, (x^3 + 1 + x - x) = (x-1) \, . \, (x^3 + 1) = 0 \begin{cases} \nearrow x = 1 \\ \searrow x^3 + 1 = 0 \quad \mapsto \quad x = -1 \end{cases}$$

10. Estudia el rango de la siguiente matriz para los distintos valores de a, b y c:

$$M=\begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{pmatrix}$$

Solución:

$$|M|=\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} \overset{F_2+F_3}{=} \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix}=$$

$$=5.(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix}=0 \quad \mapsto \quad rango(M)\leq 2$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix}= \mapsto \begin{cases} \nearrow \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ a & b \end{vmatrix}=5b-5a=0 \quad \mapsto \quad b=a \\ \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ a & c \end{vmatrix}=5c-5a=0 \quad \mapsto \quad c=a \\ \searrow \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ b & c \end{vmatrix}=5c-5b=0 \quad \mapsto \quad c=b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bullet \ \text{Si } a=b=c \quad \Rightarrow \quad rango(M)=1 \\ \bullet \ \text{Si } a\neq b \ \text{ o } \ a\neq c \ \text{ o } \ b\neq c \quad \Rightarrow \quad rango(M)=2 \end{cases}$$

11. Demuestra, sin desarrollar el determinante, que: $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(a-b)^3$

Solución:

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{C_1-C_3}{\underset{C_2-C_3}{=}} \begin{vmatrix} a^2-b^2 & ab-b^2 & b^2 \\ 2(a-b) & a-b & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} (a+b)(a-b) & b(a-b) & b^2 \\ 2(a-b) & a-b & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=$$

$$=(a-b)(a-b)\begin{vmatrix} a+b & b & b^2 \\ 2 & 1 & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=(a-b)(a-b)\begin{vmatrix} a+b & b \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\overset{C_1-C_2}{=}(a-b)(a-b)\begin{vmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=(a-b)^3$$

12. Calcula una matriz X que conmuta con la matriz A, esto es, $A.X=X.A$, siendo $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, y calcula $A^2+2A^{-1}X$

Solución:

$$\text{Sea } X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} A.X=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} \\ X.A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$A.X=X.A \mapsto \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} a+c=a \\ b+d=a+b \\ d=c+d \end{cases} \mapsto$$

$$\mapsto \begin{cases} c=0 \\ d=a \\ c=0 \end{cases} \Rightarrow X=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} |A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1 \\ A^t=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{cases} \mapsto A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2+2A^{-1}X=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+2.\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+2.\begin{pmatrix} a & b-a \\ 0 & a \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1+2a & 2+2b-2a \\ 0 & 1+2a \end{pmatrix}$$ La matriz obtenida también conmuta con la matriz A

13. Calcula la inversa de la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -3 & -2\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 3 & 1\\ 3 & -2 & 0 & 1\end{pmatrix}$

Solución:

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -2 & -3 & -2\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 3 & 1\\ 3 & -2 & 0 & 1\end{vmatrix}\overset{F_4-3F_1}{=}\begin{vmatrix}1 & -2 & -3 & -2\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 3 & 1\\ 0 & 4 & 9 & 7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 3 & 1\\ 4 & 9 & 7\end{vmatrix}\overset{C_2-2C_1}{=}\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 1\\ 4 & 1 & 7\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 7\end{vmatrix}=-8\neq 0 \quad\mapsto\quad \exists\, A^{-1}$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -3 & -2\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 3 & 1\\ 3 & -2 & 0 & 1\end{pmatrix}\quad\mapsto\quad A^t=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 3\\ -2 & 1 & 2 & -2\\ -3 & 2 & 3 & 0\\ -2 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

- Adjuntos de la matriz traspuesta A^t:

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=-5 \qquad (-)\begin{vmatrix}-2 & 2 & -2\\ -3 & 3 & 0\\ -2 & 1 & 1\end{vmatrix}=6 \qquad \begin{vmatrix}-2 & 1 & -2\\ -3 & 2 & 0\\ -2 & 0 & 1\end{vmatrix}=-9 \qquad (-)\begin{vmatrix}-2 & 1 & 2\\ -3 & 2 & 3\\ -2 & 0 & 1\end{vmatrix}=-1$$

$$(-)\begin{vmatrix}0 & 0 & 3\\ 2 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=-6 \qquad \begin{vmatrix}1 & 0 & 3\\ -3 & 3 & 0\\ -2 & 1 & 1\end{vmatrix}=12 \qquad (-)\begin{vmatrix}1 & 0 & 3\\ -3 & 2 & 0\\ -2 & 0 & 1\end{vmatrix}=-14 \qquad \begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ -3 & 2 & 3\\ -2 & 0 & 1\end{vmatrix}=2$$

$$\begin{vmatrix}0 & 0 & 3\\ 1 & 2 & -2\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=3 \qquad (-)\begin{vmatrix}1 & 0 & 3\\ -2 & 2 & -2\\ -2 & 1 & 1\end{vmatrix}=-10 \qquad \begin{vmatrix}1 & 0 & 3\\ -2 & 1 & -2\\ -2 & 0 & 1\end{vmatrix}=7 \qquad (-)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 2\\ -2 & 0 & 1\end{vmatrix}=-1$$

$$(-)\begin{vmatrix}0 & 0 & 3\\ 1 & 2 & -2\\ 2 & 3 & 0\end{vmatrix}=3 \qquad \begin{vmatrix}1 & 0 & 3\\ -2 & 2 & -2\\ -3 & 3 & 0\end{vmatrix}=6 \qquad (-)\begin{vmatrix}1 & 0 & 3\\ -2 & 1 & -2\\ -3 & 2 & 0\end{vmatrix}=-1 \qquad \begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 2\\ -3 & 2 & 3\end{vmatrix}=-1$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\mathrm{Adj}(A^t)=-\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-5 & 6 & -9 & -1\\ -6 & 12 & -14 & 2\\ 3 & -10 & 7 & -1\\ 3 & 6 & -1 & -1\end{pmatrix}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}5 & -6 & 9 & 1\\ 6 & -12 & 14 & -2\\ -3 & 10 & -7 & 1\\ -3 & -6 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

14. Determina si las siguientes ecuaciones tienen solución y hállala si es posible:

$$\text{a) } X\begin{pmatrix}1 & 0 & 4\\ 0 & 1 & 4\\ -1 & 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\text{b) }\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 3 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -2\\ 3 & 0 & -1\end{pmatrix} \qquad \text{c) }\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -2\\ 3 & 0 & -1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 3 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

Solución:

$$\text{a) } X\overbrace{\begin{pmatrix}1 & 0 & 4\\ 0 & 1 & 4\\ -1 & 3 & 1\end{pmatrix}}^{A}=\overbrace{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}^{B\,=\,I} \mapsto \boxed{X=B.A^{-1}=A^{-1}} \quad \text{tiene solución si } |A|\neq 0$$

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 4\\ 0 & 1 & 4\\ -1 & 3 & 1\end{vmatrix}=-7\neq 0 \quad \text{tiene solución}$$

$$A^t=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 3\\ 4 & 4 & 1\end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} A^t_{11}=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 4 & 1\end{vmatrix}=-11 & -A^t_{12}=-\begin{vmatrix}0 & 3\\ 4 & 1\end{vmatrix}=12 & A^t_{13}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 4 & 4\end{vmatrix}=-4\\ -A^t_{21}=-\begin{vmatrix}0 & -1\\ 4 & 1\end{vmatrix}=-4 & A^t_{22}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 4 & 1\end{vmatrix}=5 & -A^t_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 0\\ 4 & 4\end{vmatrix}=-4\\ A^t_{31}=\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=1 & -A^t_{32}=-\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 3\end{vmatrix}=-3 & A^t_{33}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1\end{cases}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}(\mathrm{Adj}\,A^t)=-\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-11 & 12 & -4\\ -4 & 5 & -4\\ 1 & -3 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}11 & -12 & 4\\ 4 & -5 & 4\\ -1 & 3 & -1\end{pmatrix}$$

$$X = B.A^{-1} \quad \mapsto \quad X = \frac{1}{7}.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 11 & -12 & 4 \\ 4 & -5 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 11 & -12 & 4 \\ 4 & -5 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

b) $$\overbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}^{A} X = \overbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}}^{B} \quad \mapsto \quad \boxed{X = A^{-1}.B} \quad \text{tiene solución si } |A| \neq 0$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad \mapsto \quad \text{No existe inversa, } A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{Adj}\, A^t)$$

La ecuación no tiene solución.

c) $$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{A} X = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{B} \quad \mapsto \quad \boxed{X = A^{-1}.B} \quad \text{tiene solución si } |A| \neq 0$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \quad \text{tiene solución}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} A^t_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -1 & -A^t_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 & A^t_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2 \\ -A^t_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -6 & A^t_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 & -A^t_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 \\ A^t_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 & -A^t_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -3 & A^t_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \end{cases}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{Adj}\, A^t) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -6 & -2 & 4 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}.B \quad \mapsto \quad X = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -6 & -2 & 4 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 2 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}0 & 3/4 & 5/4\\ 1 & 1/2 & 1/2\\ -1 & 1/4 & 3/4\end{pmatrix}$$

15. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & \lambda\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ \lambda & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$

donde λ es cualquier número real.

a) Encuentra los valores de λ para los que $A.B$ es invertible

b) Determina los valores de λ para los que $B.A$ es invertible

c) Dados a y b, números reales cualesquiera, ¿puede ser el siguiente sistema compatible determinado?

$$A.\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$$

Solución:

$$\text{a) } A\,.\,B=\begin{pmatrix}1 & 2 & \lambda\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1 & 3\\ \lambda & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2\lambda & 3+2\lambda\\ 1-\lambda & 1\end{pmatrix}$$

$$|A\,.\,B|=\begin{vmatrix}1+2\lambda & 3+2\lambda\\ 1-\lambda & 1\end{vmatrix}=(1+2\lambda)-(3+2\lambda)\,.\,(1-\lambda)=2\lambda^2+3\lambda-2=0 \quad\mapsto\quad \begin{cases}\lambda=1/2\\ \lambda=-2\end{cases}$$

$A\,.\,B$ es invertible $\forall\,\lambda\in\mathbb{R}-\left\{-2,\dfrac{1}{2}\right\}$

$$\text{b) } B\,.\,A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ \lambda & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1 & 2 & \lambda\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -1 & \lambda-3\\ \lambda & 2\lambda & \lambda^2\\ 2 & -2 & -2\end{pmatrix}$$

$$|B\,.\,A|=\begin{vmatrix}4 & -1 & \lambda-3\\ \lambda & 2\lambda & \lambda^2\\ 2 & -2 & -2\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}4 & -1 & \lambda-3\\ 1 & 2 & \lambda\\ 2 & -2 & -2\end{vmatrix}=2\lambda\begin{vmatrix}4 & -1 & \lambda-3\\ 1 & 2 & \lambda\\ 1 & -1 & -1\end{vmatrix}=0$$

Siendo $|B\,.\,A|=0 \quad\mapsto\quad B\,.\,A$ no es invertible

c) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad A'=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \lambda & a \\ 1 & -1 & -1 & b \end{array}\right)$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-3 \mapsto$ rango(A) = rango(A') = 2 < nº incógnitas

El sistema es compatible indeterminado, para cualquier valor de a y b.
En consecuencia, no puede ser compatible determinado.

16. a) Si la matriz $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ tiene un determinante n, averigua el valor del determinante de las siguiente matrices:

$B=\begin{pmatrix} 6d & 4e & 2f \\ 3g & 2h & i \\ 9a & 6b & 3c \end{pmatrix}$ $\quad C=\begin{pmatrix} d+f & e & f+e \\ a+c & b & c+b \\ g+i & h & i+h \end{pmatrix}$

b) Se considera la función: $f(x)=\begin{vmatrix} a & b & -2a & 3b \\ -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$

Sabiendo que $f(0)=-3$ y $f(1)=f(-1)$, determinar a y b.

Solución:

a) $|A|=\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}=n$

• $|B|=\begin{vmatrix} 6d & 4e & 2f \\ 3g & 2h & i \\ 9a & 6b & 3c \end{vmatrix} \overset{F_1 \mapsto F_3}{=} -\begin{vmatrix} 9a & 6b & 3c \\ 3g & 2h & i \\ 6d & 4e & 2f \end{vmatrix} \overset{F_2 \mapsto F_3}{=} \begin{vmatrix} 9a & 6b & 3c \\ 6d & 4e & 2f \\ 3g & 2h & i \end{vmatrix} =$

$=\begin{vmatrix} 9a & 6b & 3c \\ 6d & 4e & 2f \\ 3g & 2h & i \end{vmatrix} = 3.\begin{vmatrix} 3a & 6b & 3c \\ 2d & 4e & 2f \\ g & 2h & i \end{vmatrix} = 3.2.\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 2d & 2e & 2f \\ g & h & i \end{vmatrix} =$

$$=3.2.3.\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ g & h & i \end{vmatrix}=3.2.3.2.\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}=\boxed{36n}$$

$$\bullet\ |C|=\begin{vmatrix} d+f & e & f+e \\ a+c & b & c+b \\ g+i & h & i+h \end{vmatrix}\overset{F_2\mapsto F_1}{=}-\begin{vmatrix} a+c & b & c+b \\ d+f & e & f+e \\ g+i & h & i+h \end{vmatrix}\overset{C_3-C_2}{=}-\begin{vmatrix} a+c & b & c \\ d+f & e & f \\ g+i & h & i \end{vmatrix}\overset{C_1-C_3}{=}$$

$$\overset{C_1-C_3}{=}-\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}=\boxed{-n}$$

$$\text{b) } f(x)=\begin{vmatrix} a & b & -2a & 3b \\ -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix}\qquad f(0)=-3\ \text{ y }\ f(1)=f(-1)$$

$$\bullet\ f(0)=\begin{vmatrix} a & b & -2a & \boxed{3b} \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}=-3b\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}=3b=-3\ \mapsto\ \boxed{b=-1}$$

De otra parte,

$$f(1)=\begin{vmatrix} a & -1 & -2a & -3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}\overset{F_1+3F_4}{=}\begin{vmatrix} a & -1 & -2a-3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \boxed{1} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & -1 & -2a-3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-a-4$$

$$f(-1)=\begin{vmatrix} a & -1 & -2a & -3 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}\overset{F_1-3F_4}{=}\begin{vmatrix} a & -1 & -2a+3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \boxed{-1} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a & -1 & -2a+3 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}=a-4$$

$$\bullet\ f(1)=f(-1)\ \Leftrightarrow\ -a-4=a-4\ \mapsto\ \boxed{a=0}$$

17. a) Comprobar que la matriz $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$ cumple que $A^3=-A-I$

y calcular la matriz inversa de A.

b) Si A es cualquier matriz con n filas y n columnas tal que $A^3=-A-I$ y se sabe que $\det(A)=m$, calcular el valor del determinante de $A+I$ en función de m.

Solución:

a) $A^2=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-1 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$

$\otimes\quad A^3=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-1 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ -2 & 1 & -2\end{pmatrix}$

$\otimes\quad -A-I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ -2 & 1 & -2\end{pmatrix}$

Queda probado que $A^3=-A-I$

• Para calcular la matriz inversa de A se utiliza que $A^3=-A-I$

$A\,.\,A^2=-A-I \quad\mapsto\quad A^{-1}.\,A\,.\,A^2=A^{-1}.(-A-I) \quad\mapsto\quad A^2=A^{-1}.(-A-I) \quad\mapsto$

$\mapsto\quad A^2=-I-A^{-1} \quad\mapsto\quad \boxed{A^{-1}=-I-A^2}$

$A^{-1}=-I-A^2=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ -1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$

b) $A^3=-A-I \quad\mapsto\quad A^3=-(A+I) \quad\mapsto\quad -A\,.\,A\,.\,A=(A+I) \quad\mapsto$

$\mapsto\quad -|A|\,.\,|A|\,.\,|A|=|A+I| \quad\mapsto\quad |A+I|=-|A|^3=-m^3$

18. Sean A, B y X tres matrices cuadradas del mismo orden que verifican la relación $A.X.B=I$, siendo I la matriz unidad.

a) Si el determinante de A vale -1 y el de B vale 1, calcular razonadamente el determinante de X.

b) Calcular de forma razonada la matriz de X si $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $A.X.B=I \quad \mapsto \quad \underbrace{A^{-1}.A}_{I}.X.\underbrace{B.B^{-1}}_{I}=A^{-1}.I.B^{-1} \quad \mapsto \quad X=A^{-1}.I.B^{-1} \quad \mapsto \quad X=A^{-1}.B^{-1}$

$$X=A^{-1}.B^{-1} \quad \mapsto \quad |X|=\left|A^{-1}.B^{-1}\right|=\left|A^{-1}\right|.\left|B^{-1}\right|=\frac{1}{|A|}.\frac{1}{|B|}=\frac{1}{-1.1}=-1$$

b) $X=A^{-1}.B^{-1}=(B.A)^{-1}$

$$B.A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & -5 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad |B.A|=\begin{vmatrix} -4 & -5 \\ -5 & -6 \end{vmatrix}=-1$$

$$X=(B.A)^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$$

19. Para una matriz cuadrada, se define una traza como la suma de los elementos de la diagonal principal. En lo que sigue, A y B son matrices cuadradas $2x2$.

a) Comprobar que se verifica: $\text{Traza}(A+B)=\text{Traza}(A)+\text{Traza}(B)$

b) Comprobar que $\text{Traza}(AB)=\text{Traza}(BA)$

c) Utilizando los resultados anteriores, demostrar que es imposible tener $AB-BA=I$, donde I denota la matriz identidad.

d) Encontrar dos matrices A y B para las que: $\text{Traza}(AB)\neq\text{Traza}(A).\text{Traza}(B)$

Solución:

a) Sea $A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \begin{array}{l} \text{Traza } A = a_1+a_4 \\ \text{Traza } B = b_1+b_4 \end{array}$

$$A+B=\begin{pmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 \\ a_3+b_3 & a_4+b_4 \end{pmatrix}$$

$\text{Traza}(A+B)=a_1+b_1+a_4+b_4=(a_1+a_4)+(b_1+b_4)=\text{Traza}(A)+\text{Traza}(B)$

b) $\begin{cases} A\,.\,B=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1 b_1+a_2 b_3 & a_1 b_2+a_2 b_4 \\ a_3 b_1+a_4 b_3 & a_3 b_3+a_4 b_4 \end{pmatrix} \\ B\,.\,A=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 a_1+b_2 a_3 & b_1 a_2+b_2 a_4 \\ b_3 a_1+b_4 a_3 & b_3 a_3+b_4 a_4 \end{pmatrix} \end{cases}$

$\begin{matrix} \text{Traza}(A\,.\,B)=a_1 b_1+a_2 b_3+a_3 b_3+a_4 b_4 \\ \text{Traza}(B\,.\,A)=b_1 a_1+b_2 a_3+b_3 a_3+b_4 a_4 \end{matrix} \quad \mapsto \quad \text{Traza}(A\,.\,B)=\text{Traza}(B\,.\,A)$

c) Suponiendo que fuera cierto que $AB-BA=I \quad \mapsto \quad AB=I+BA$

Siendo $\text{Traza}(A+B)=\text{Traza}(A)+\text{Traza}(B)$, se tendría:

$\text{Traza}(AB)=\text{Traza}(I)+\text{Traza}(BA)=2+\text{Traza}(BA)$

Contradiciendo el resultado $\text{Traza}(A\,.\,B)=\text{Traza}(B\,.\,A)$ que afirma que las trazas de las matrices $A\,.\,B$ y $B\,.\,A$ son iguales.

d) Sea $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \begin{matrix} \text{Traza } A = 1+1=2 \\ \text{Traza } B = 0+0=0 \end{matrix}$

$A\,.\,B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \text{Traza}(A\,.\,B)=1$

Resultando que $\text{Traza}(A\,.\,B)=1 \neq \text{Traza}(A)\,.\text{Traza}(B)=0$

20. Determina una matriz A simétrica sabiendo que:

$$\det\,(A)=-7 \quad y \quad A\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & -12 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución:

a) Sea $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

- Por simetría $A=A^t \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad b=c$

- $\det(A)=7 \mapsto \begin{vmatrix} a & b \\ b & d \end{vmatrix}=7 \Rightarrow ad-b^2=7$

- $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & -12 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \mapsto$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 2a-b & 6a-3b \\ 2b-d & 6b-3d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & -12 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} 2a-b=-4 \\ 2b-d=1 \\ 6a-3b=-12 \\ 6b-3d=3 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema $\equiv \begin{cases} 2a-b=-4 & \mapsto & a=\dfrac{-4+b}{2} \\ 2b-d=1 & \mapsto & d=2b-1 \\ ad-b^2=7 & \mapsto & \left(\dfrac{-4+b}{2}\right)(2b-1)-b^2=7 \end{cases}$

$$-8b+4+2b^2-b-2b^2=14 \mapsto b=-\frac{10}{9} \mapsto \begin{cases} a=\dfrac{-4-\dfrac{10}{9}}{2}=-\dfrac{46}{18}=-\dfrac{23}{9} \\ d=2\left(-\dfrac{10}{9}\right)-1=-\dfrac{29}{9} \end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\dfrac{23}{9} & -\dfrac{10}{9} \\ -\dfrac{10}{9} & -\dfrac{29}{9} \end{pmatrix}=-\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 23 & 10 \\ 10 & 29 \end{pmatrix}$$