

**PORTAL ESTADÍSTICA APLICADA**

Video Contrastes | Algebra Lineal | Decisiones en Bolsa | Matrices Determinantes | Métodos Integración | Ecuaciones Diferenciales

**PAU MATEMÁTICAS**

Destrezas Matemáticas

Estadística Probabilidad | Sistema Ecuaciones | Matrices Determinantes | Analisis Matemático | Geometria

Programación Lineal

**PROGRAMACIÓN LINEAL**

**PAU: PROGRAMACIÓN LINEAL**

1. Una confitería es famosa por su dos especialidades de tartas: la tarta Imperial y la tarta de Lima. la tarta Imperial requiere para su elaboración medio kilo de azúcar y 8 huevos y tiene un precio de venta de 8 €. La tarta de Lima necesita 1 kilo de azúcar y 8 huevos, y tiene un precio de venta de 10 €. En el almacén les quedaban 10 kilos de azúcar y 120 huevos.

- a) ¿Qué combinaciones de especialidades pueden hacer?. Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.
- b) ¿Cuántas unidades de cada especialidad han de producirse para obtener el mayor ingreso por ventas?

**Solución:**

a) Sean  $x$  = "número de tartas tipo Imperial" e  $y$  = "número de tartas tipo Lima"

Se hace la tabla para establecer las restricciones:

	Azúcar	Huevos
Imperial	0,5 x	8x
Lima	y	8y
	10	120

$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ 0,5x + y \leq 10 \\ 8x + 8y \leq 120 \end{cases} \mapsto \begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ x + 2y \leq 20 \\ x + y \leq 15 \end{cases}$$

La función objetivo, que representa los ingresos por ventas, y que considerando las restricciones anteriores hay que maximizar:  $z = f(x, y) = 8x + 10y$

Se representan el conjunto de restricciones y la recta  $4x + 5y = 0$ , que da la dirección de las rectas  $z = f(x, y) = 8x + 10y$

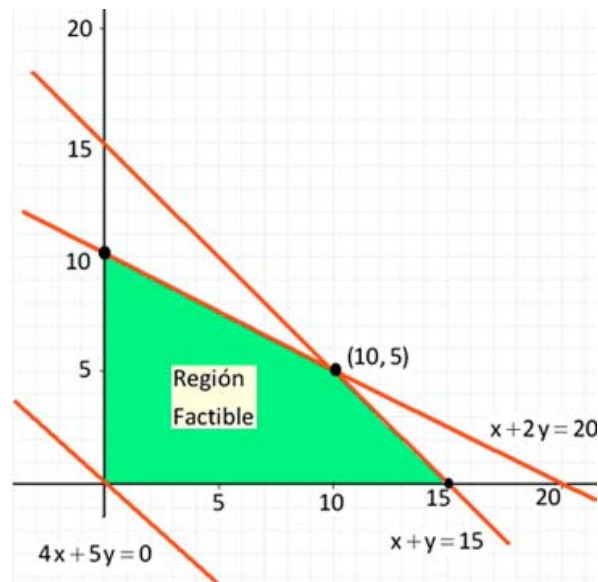
$$b) \begin{cases} x+y=15 \\ x+2y=20 \end{cases} \mapsto x=10 \quad y=5$$

$$z = f(x,y) = 8x + 10y$$

$$(0,10): f(0,10) = 10 \cdot 10 = 100$$

$$(10,5): f(10,5) = 8 \cdot 10 + 10 \cdot 5 = 130$$

$$(15,0): f(15,0) = 8 \cdot 15 = 120$$

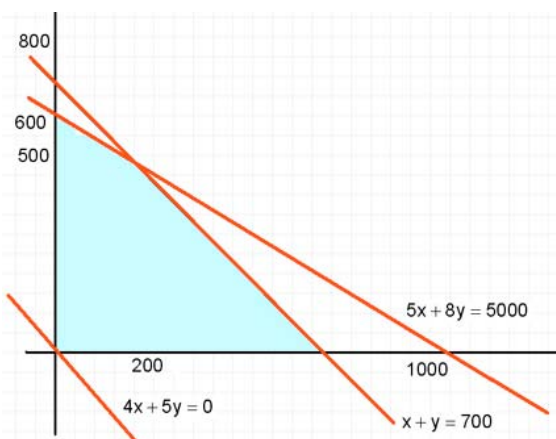


El mayor ingreso se obtiene con 10 tartas Imperiales y 5 tartas de Lima.

2. Un comerciante acude a cierto mercado a comprar naranjas con 500 €. Le ofrecen dos tipos de naranjas: las de tipo A a 0,5 € el kg y las de tipo B a 0,8 € el kg. Sabemos que solo dispone en su furgoneta de espacio para transportar 700 kg de naranjas como máximo y que piensa vender el kilo de naranjas de tipo A a 0,58 € y el de tipo B a 0,9 €. ¿Cuántos kilogramos de naranjas de cada tipo deberá comprar para obtener beneficio máximo?

**Solución:**

Sean  $x$  = "kg de naranjas de tipo A" e  $y$  = "kg de naranjas de tipo B"



Las restricciones del problema son:

$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ x + y \leq 700 \\ 0,5x + 0,8y \leq 500 \end{cases} \mapsto \begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ x + y \leq 700 \\ 5x + 8y \leq 5000 \end{cases}$$

La función que da el beneficio, sujeta a las restricciones anteriores, es:

$$z = f(x,y) = (0,58 - 0,5)x + (0,9 - 0,8)y = 0,08x + 0,1y$$

Se representa la recta  $0,08x + 0,1y = 0 \mapsto 8x + 10y = 0 \mapsto 4x + 5y = 0$

El máximo se obtiene en el punto de intersección de las rectas:

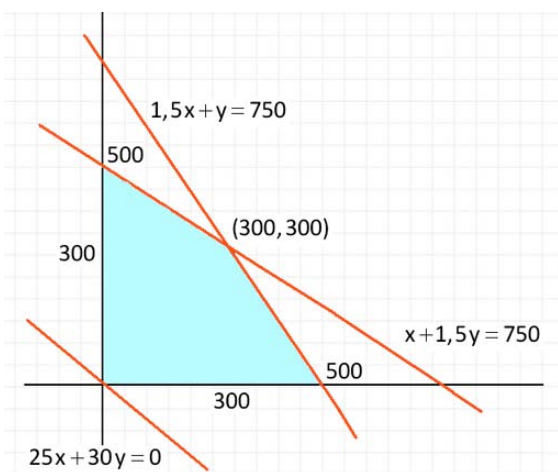
$$\begin{cases} x + y = 700 \\ 5x + 8y = 5000 \end{cases} \mapsto x = 200 \quad y = 500$$

Se deben comprar 200 kg de tipo A y 500 kg de tipo B

**3.** Un orfebre fabrica dos tipos de joyas. La unidad del tipo A se hace con 1 g de oro y 1,5 g de plata y se vende a 25 €. La de tipo B se vende a 30 € y lleva 1,5 g de oro y 1 g de plata. Si solo dispone de 750 g de cada metal, ¿cuántas joyas ha de fabricar de cada tipo para obtener el máximo beneficio?

**Solución:**

Sean  $x$  = "número unidades de tipo A" e  $y$  = "número unidades de tipo B"



Las restricciones son:

$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ x + 1,5y \leq 750 \\ 1,5x + y \leq 750 \end{cases}$$

La función a maximizar:  $z = f(x,y) = 25x + 30y$

El máximo se obtiene en el punto de intersección de las rectas:

$$\begin{cases} 1,5x + y = 750 \\ x + 1,5y = 750 \end{cases} \mapsto x = 300 \quad y = 300$$

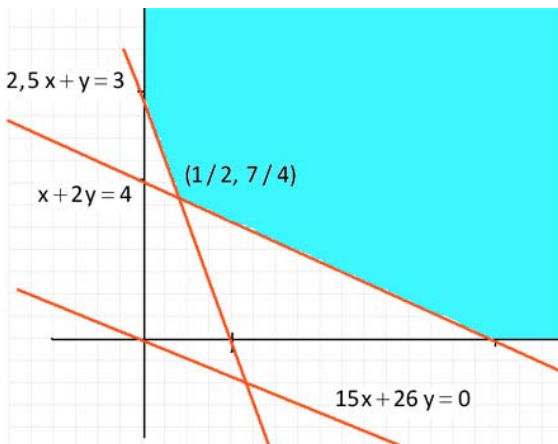
Se deben fabricar 300 joyas de cada uno de los dos tipos.

**4.** Un veterinario aconseja a un granjero dedicado a la cría de aves una dieta mínima que consiste en 3 unidades de hierro y 4 unidades de vitaminas diarias. El granjero sabe que cada kilo de maíz proporciona 2,5 unidades de hierro y 1 de vitaminas y que cada kilo de pienso compuesto proporciona 1 kilo de hierro y 2 de vitaminas. Sabiendo que el kilo de maíz vale 0,3 € y el de pienso compuesto 0,52 €, se pide:

- ¿Cuál es la composición de la dieta diaria que minimiza los costes del granjero? Explica los pasos seguidos para obtener la respuesta.
- ¿Cambiaría la solución del problema si por escasez en el mercado el granjero no pudiera disponer de más de 1 kilo diario de pienso compuesto?. Razona la respuesta.

**Solución:**

a) Sean  $x$  = "número kg de maíz" e  $y$  = "número kg de pienso"



Las restricciones son: 
$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ 2,5x + y \geq 3 \\ x + 2y \geq 4 \end{cases}$$

La función coste para minimizar:  $z = f(x, y) = 0,3x + 0,52y$

El conjunto de restricciones y la recta  $0,3x + 0,52y = 0 \mapsto 15x + 26y = 0$  da la dirección de las rectas  $z = 0,3x + 0,52y$

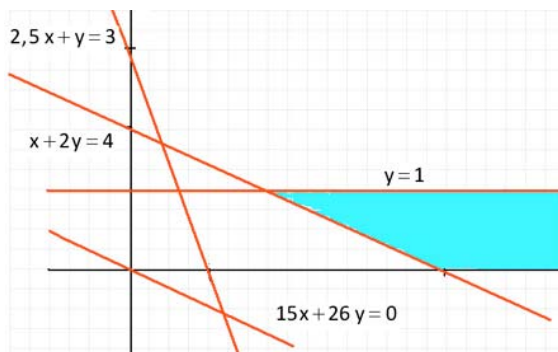
El mínimo se obtiene en el punto de intersección de las rectas:

$$\begin{cases} 2,5x + y = 3 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \mapsto x = \frac{1}{2} \quad y = \frac{7}{4}$$

En consecuencia, para que el coste sea mínimo se deben de utilizar

$\frac{1}{2}$  kg de maíz y  $\frac{7}{4}$  kg de pienso compuesto

b) Sí se añade la restricción  $y \leq 1$  a las anteriores, la región sería:



Las restricciones son: 
$$\begin{cases} x \geq 0, 0 \leq y \leq 1 \\ x + 1,5y \leq 750 \\ 1,5x + y \leq 750 \end{cases}$$

El mínimo coste se obtiene en el punto de intersección de las rectas:

$$\begin{cases} y = 1 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \mapsto x = 2 \quad y = 1$$

Por tanto, se deberían utilizar 2 kg de maíz y 1 kg de pienso compuesto.

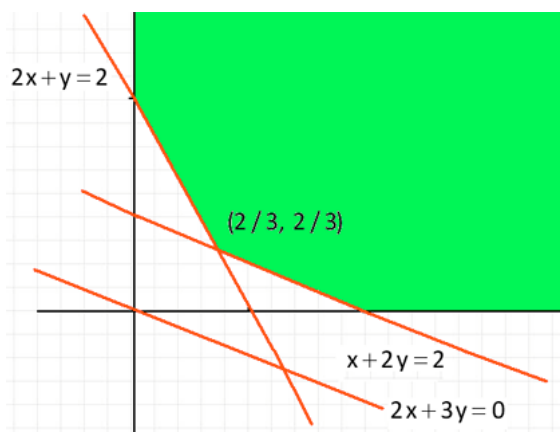
5. Un ganadero debe suministrar un mínimo diario de 4 mg de vitamina A y 6 mg de vitamina B en el pienso que da a sus reses. Dispone para ello de dos tipos de pienso  $P_1$  y  $P_2$ , cuyos contenidos vitamínicos por kg son los que aparecen en la tabla:

	A	B
$P_1$	2	6
$P_2$	4	3

Si el kilogramo de pienso  $P_1$  vale 0,4 € y el del  $P_2$  vale 0,6 €, ¿cómo deben mezclarse los piensos para suministrar las vitaminas requeridas con un coste mínimo?

**Solución:**

a) Sean  $x$ ="kg de pienso  $P_1$ " e  $y$ ="kg de pienso  $P_2$ "



Las restricciones son:

$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ 2x + 4y \geq 4 \\ 6x + 3y \geq 6 \end{cases} \mapsto \begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ x + 2y \geq 2 \\ 2x + y \geq 2 \end{cases}$$

La función de coste para minimizar:  $z = f(x, y) = 0,4x + 0,6y$

El conjunto de restricciones y la recta  $0,4x + 0,6y = 0 \mapsto 2x + 3y = 0$

da la dirección de las rectas  $z = 0,4x + 0,6y$

El mínimo se obtiene en el punto de intersección de las rectas:

$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x + 2y = 2 \end{cases} \mapsto x = \frac{2}{3} \quad y = \frac{2}{3}$$

En consecuencia, para que el coste sea mínimo se deben mezclar

$\frac{2}{3}$  kg de pienso  $P_1$  y  $\frac{2}{3}$  kg de pienso  $P_2$

6. Se va a organizar una planta de un taller de automóviles donde van a trabajar electricistas y mecánicos. Por necesidades del mercado, es necesario que haya mayor o igual número de mecánicos que de electricistas y que el número de mecánicos no supere al doble que de electricistas. En total hay disponibles 30 electricistas y 20 mecánicos.

El beneficio de la empresa por jornada es de 150 € por electricista y 120 € por mecánico. ¿Cuántos trabajadores de cada clase deben elegirse para obtener el máximo beneficio?

**Solución:**

Denotando por  $x$  = "número de electricistas" e  $y$  = "número de mecánicos"

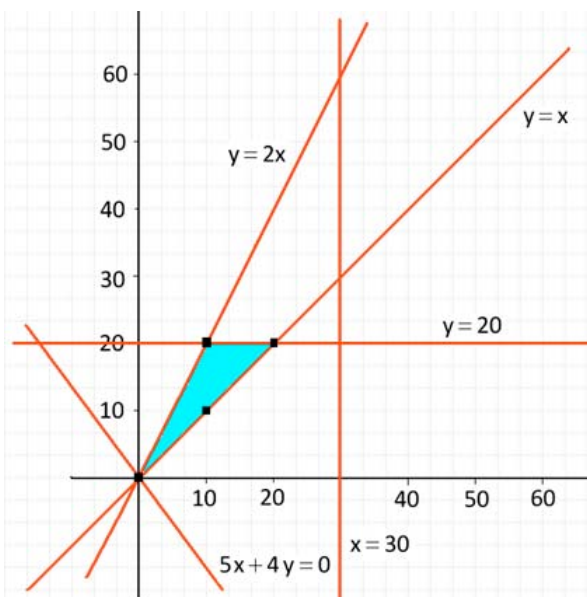
Las restricciones establecidas son:

$$\begin{cases} x \text{ e } y \text{ son enteros} \\ 0 \leq x \leq 30, 0 \leq y \leq 20 \\ y \geq x \\ y \leq 2x \end{cases}$$

La función beneficio que hay que maximizar:  $z = f(x, y) = 150x + 120y$

Se representan el conjunto de restricciones y la recta  $150x + 120y = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 5x + 4y = 0$  que da la dirección de las rectas  $z = f(x, y) = 150x + 120y$



$$z = f(x, y) = 150x + 120y$$

En el conjunto de restricciones solo hay 4 puntos:

$(0, 0)$  ,  $(10, 10)$  ,  $(10, 20)$  ,  $(20, 20)$

El máximo se alcanza en el  $(20, 20)$ .

Se eligen 20 electricistas y 20 mecánicos.

7. Una persona tiene 15.000 € para invertir en dos tipos de acciones, A y B. El tipo A tiene un interés anual del 9%, y el tipo B, del 5%. Decide invertir, como máximo, 9.000 € en A, y como mínimo, 3.000 € en B. Además, quiere invertir en A tanto o más que en B.

- Dibuja la región factible.
- ¿Cómo debe invertir los 15.000 € para que el beneficio sea máximo?
- ¿Cuál es ese beneficio anual máximo?

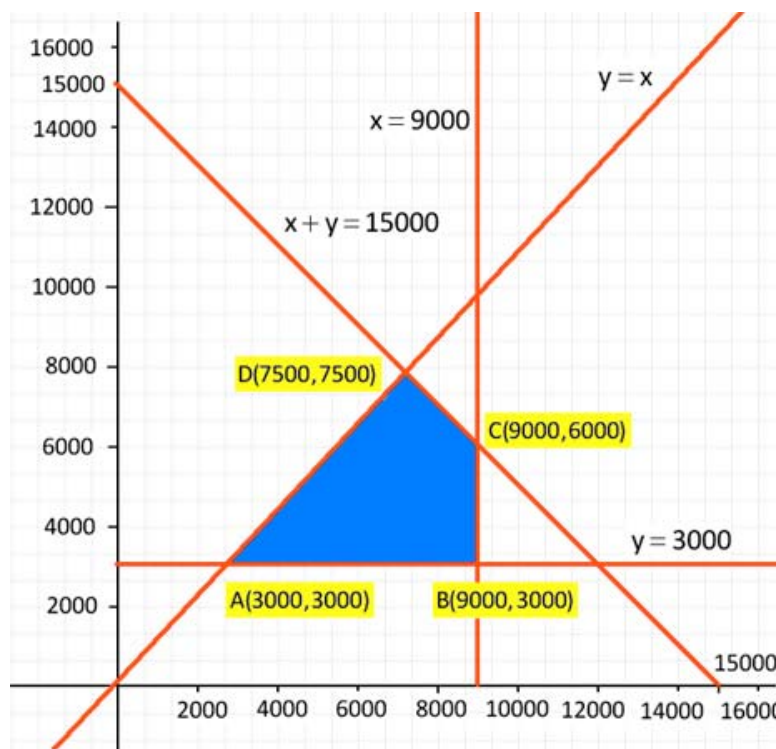
**Solución:**

- Denotando por:  $x$  = "euros invertidos en acciones tipo A" e  $y$  = "euros invertidos en acciones tipo B"

Las restricciones establecidas son:

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 9.000, & y \geq 3.000 \\ x \geq y \\ x + y \leq 15.000 \end{cases}$$

La función objetivo que hay que maximizar es:  $z = f(x, y) = 0,09x + 0,05y$



- Se analiza donde se hace máxima la función objetivo en los vértices de la región factible.

$$z = f(x, y) = 0,09x + 0,05y \begin{cases} f(3000, 3000) = 0,09 \cdot 3000 + 0,05 \cdot 3000 = 420 \\ f(9000, 3000) = 0,09 \cdot 9000 + 0,05 \cdot 3000 = 960 \\ f(9000, 6000) = 0,09 \cdot 9000 + 0,05 \cdot 6000 = 1110 \\ f(7500, 7500) = 0,09 \cdot 7500 + 0,05 \cdot 7500 = 1050 \end{cases}$$

Para que el beneficio sea máximo de deben de invertir 9000 euros en acciones de tipo A y 6000 euros en acciones de tipo B.

c) El beneficio máximo anual es de 1110 euros

8. Un taller de confección hace chaquetas y pantalones para niños. Para hacer una chaqueta, se necesitan 1 m de tela y 2 botones; y para hacer unos pantalones, hacen falta 2 m de tela, 1 botón y 1 cremallera. El taller dispone de 500 m de tela, 400 botones y 225 cremalleras. El beneficio que se obtiene por la venta de una chaqueta es de 20 €, y por la de unos pantalones, 30 €.

Suponiendo que se vende todo lo que se fabrica, calcula el número de chaquetas y de pantalones que se tienen que hacer para obtener un beneficio máximo.

**Solución:**

Sea  $x$  = "número de chaquetas" e  $y$  = "número de pantalones"

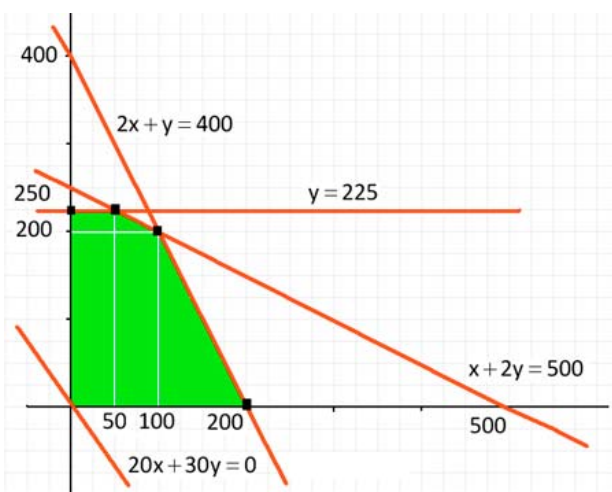
Se hace la tabla para establecer las restricciones:

	Chaqueta	Pantalones	Disponible
Tela	$x$	$2y$	500
Botones	$2x$	$y$	400
Cremalleras		$y$	225
Beneficio	$20x$	$30y$	

Las restricciones son: 
$$\begin{cases} x \geq 0, & 0 \leq y \leq 225 \\ x + 2y \leq 500 \\ 2x + y \leq 400 \end{cases}$$

La función objetivo que hay que maximizar es:  $z = f(x, y) = 20x + 30y$

Se representa el conjunto de restricciones y la recta  $20x + 30y = 0$ , que da la dirección de las rectas  $20x + 30y = k$



$$\begin{cases} x + 2y = 500 \\ 2x + y = 400 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 100 \\ y = 200 \end{cases}$$



El máximo se encuentra en uno de los vértices de la región factible (zona verde):

$$z = f(x, y) = 20x + 30y \begin{cases} f(0, 225) = 30 \cdot 225 = 6750 \\ f(50, 225) = 20 \cdot 50 + 30 \cdot 225 = 7750 \\ f(100, 200) = 20 \cdot 100 + 30 \cdot 200 = 8000 \\ f(200, 0) = 20 \cdot 200 = 4000 \end{cases}$$

El máximo beneficio se obtiene confeccionando 100 chaquetas y 200 pantalones.

9. Un artesano fabrica collares y pulseras. Hacer un collar le lleva dos horas y hacer una pulsera una hora. El material de que dispone no le permite hacer más de 50 piezas. Como mucho, el artesano puede dedicar al trabajo 80 horas. Por cada collar gana 5 euros y por cada pulsera 4 euros. El artesano desea determinar el número de collares y pulseras que debe fabricar para optimizar sus beneficios.

1. Expresese la función objetivo y las restricciones del problema.
2. Representese gráficamente el recinto definido.
3. Obténgase el número de collares y pulseras correspondientes al máximo beneficio.

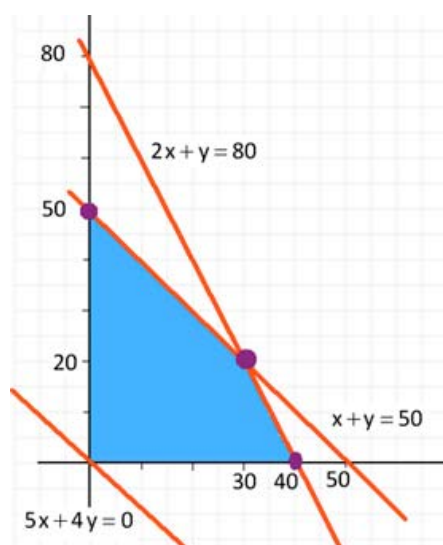
**Solución:**

1. Sea  $x =$  "número de collares" e  $y =$  "número de pulseras"

Las restricciones son: 
$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ x + y \leq 50 \\ 2x + y \leq 80 \end{cases}$$

La función objetivo que hay que maximizar es:  $z = f(x, y) = 5x + 4y$

2. Se representa el conjunto de restricciones y la recta  $5x + 4y = 0$ , que da la dirección de las rectas  $5x + 4y = k$



3. El máximo se encuentra en uno de los vértices de la región factible (zona azul):

$$z = f(x, y) = 5x + 4y \begin{cases} f(0, 50) = 4 \cdot 50 = 200 \\ f(30, 20) = 5 \cdot 30 + 4 \cdot 20 = 230 \\ f(40, 0) = 5 \cdot 40 = 200 \end{cases}$$

El artesano tiene que fabricar 30 collares y 20 pulseras para obtener el beneficio máximo de 230 euros.

**10.** Una empresa que sirve comidas preparadas tiene que diseñar un menú utilizando dos ingredientes. El ingrediente A contiene 35 g de grasas y 150 Kilocalorías por cada 100 g de ingrediente, mientras que el B contiene 15 g de grasas y 100 Kilocalorías por cada 100 g. El coste es de 1,5 euros por cada 100 g. del ingrediente A y de 1 euros por cada 100 g del ingrediente B.

El menú a diseñar debería contener no más de 30 g de grasas y al menos 110 Kilocalorías por cada 100 g de alimento. Se pide determinar las proporciones de cada ingrediente a emplear en el menú de manera que su coste sea lo más reducido posible.

1. Indíquese la expresión de las restricciones y la función objetivo.
2. Representétese gráficamente la región delimitada por las restricciones.
3. Calcúlese el porcentaje óptimo de cada ingrediente a incluir en el menú.

**Solución:**

1. Sea  $x$  = "cantidad de A" e  $y$  = "cantidad de B"

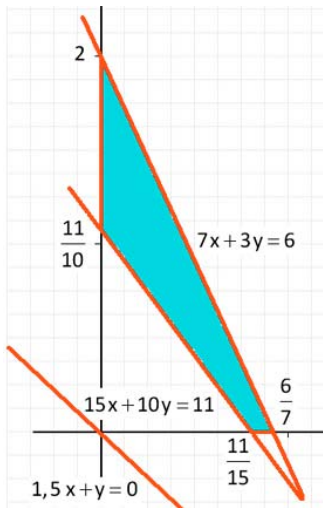
Para establecer las restricciones se hace la siguiente tabla:

	Grasas	Kilocalorías	Coste
A	35	150	1,5
B	15	100	2
	$\leq 30$	$\geq 110$	

$$\text{Las restricciones son: } \begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ 35x + 15y \leq 30 \\ 150x + 100y \geq 110 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ 7x + 3y \leq 6 \\ 15x + 10y \geq 11 \end{cases}$$

La función objetivo que hay que minimizar es:  $z = f(x, y) = 1,5x + y$

2. Se representa el conjunto de restricciones y la recta  $1,5x + y = 0$ , que da la dirección de las rectas  $1,5x + y = k$



Los vértices son:  
 $(0, 2)$  ,  $(0, 11/10)$  ,  $(11/15, 0)$  y  $(6/7, 0)$

3. El valor mínimo es cualquier punto de la recta  $15x + 10y = 11$

Para obtener el porcentaje se resuelve el sistema: 
$$\begin{cases} 15x + 10y = 11 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

$x = 0,2$  (20%) e  $y = 0,8$  (80%)

La proporción buscada sería el 20% de A y el 80% de B

**11.** Un pintor necesita pintura para pintar como mínimo una superficie de  $480 \text{ m}^2$ . Puede comprar la pintura a dos proveedores, A y B. El proveedor A le ofrece una pintura con un rendimiento de  $6 \text{ m}^2$  por kg y un precio de 1 euro por kg. La pintura del proveedor B tiene un precio de 1,2 euros por kg y un rendimiento de  $8 \text{ m}^2$  por kg. Ningún proveedor le puede proporcionar mas de 75 kg y el presupuesto máximo del pintor es de 120 euros. Calcúlese la cantidad de pintura que el pintor tiene que comprar a cada proveedor para obtener el mínimo coste. Calcúlese dicho coste mínimo.

**Solución:**

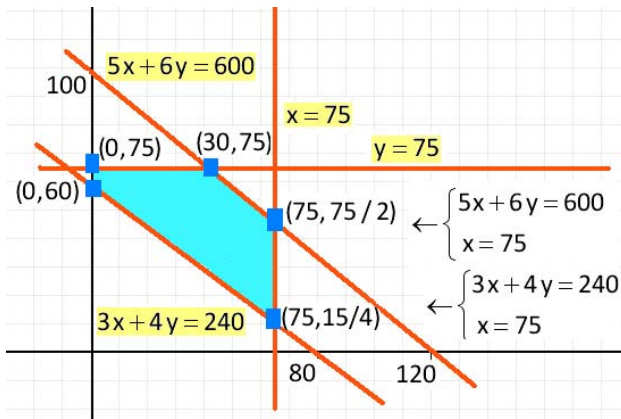
Sea  $x =$  "número de kilos de pintura comprados al proveedor A" e  
 $y =$  "número de kilos de pintura comprados al proveedor B"

Para establecer las restricciones se hace la siguiente tabla:

Proveedor	Rendimiento	Precio
A	6	1
B	8	1,2

Las restricciones son: 
$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 75, 0 \leq y \leq 75 \\ 6x + 8y \geq 480 \\ x + 1,2y \leq 120 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 75, 0 \leq y \leq 75 \\ 3x + 4y \geq 240 \\ 5x + 6y \leq 600 \end{cases}$$

La función objetivo que hay que minimizar es:  $z = f(x, y) = x + 1,2y$



$$z = f(x, y) = x + 1,2y \rightarrow \begin{cases} f(0, 75) = 1,2 \cdot 75 = 90 \\ f(0, 60) = 1,2 \cdot 60 = 72 \\ f(75, 15/4) = 75 + 1,2 \cdot (15/4) = 79,5 \\ f(75, 75/2) = 75 + 1,2 \cdot (75/2) = 120 \\ f(30, 75) = 30 + 1,2 \cdot 75 = 120 \end{cases}$$

Para tener el mínimo coste se deben comprar 0 kg del proveedor A y 60 kg del proveedor B.

12. Determinense los valores de  $a$  y  $b$  para que la función objetivo  $F(x, y) = 3x + y$  alcance su valor máximo en el punto  $(6, 3)$  de la región factible definida por:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + ay \leq 3 \\ 2x + y \leq b \end{cases}$$

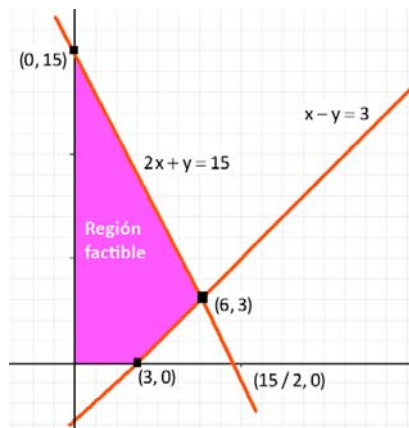
2. Representese la región factible para esos valores y calcúlense las coordenadas de todos sus vértices.

**Solución:**

$$1. \begin{cases} x + ay = 3 \\ 2x + y = b \end{cases} \xrightarrow{\text{máx}(6, 3)} \begin{cases} 6 + 3a = 3 \\ 12 + 3 = b \end{cases} \mapsto \begin{cases} a = -1 \\ b = 15 \end{cases}$$

$$2. \text{restricciones: } \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x - y \leq 3 \\ 2x + y \leq 15 \end{cases}$$

Vértices:  $(3, 0)$ ,  $(6, 3)$ ,  $(0, 15)$



$$F(x, y) = 3x + y \quad \begin{cases} F(3, 0) = 3 \cdot 3 = 9 \\ F(6, 3) = 3 \cdot 6 + 3 = 21 \text{ máximo} \\ F(0, 15) = 15 \end{cases}$$

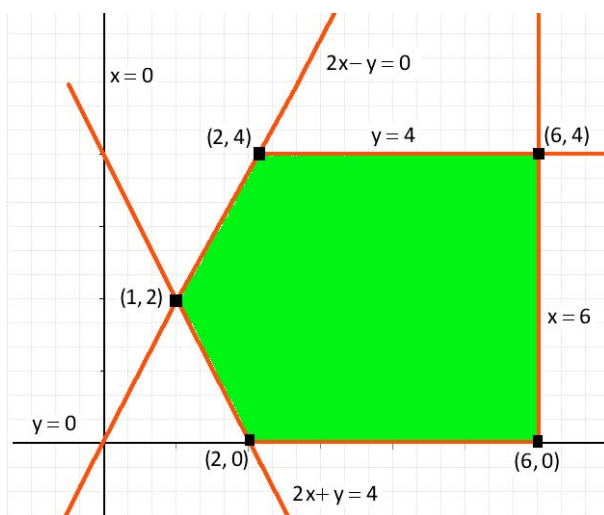
**13.** Una fábrica de piensos para animales produce diariamente como mucho seis toneladas de pienso del tipo A y como máximo cuatro toneladas de pienso del tipo B. Además, la producción diaria de pienso del tipo B no puede superar el doble de la del tipo A y, por último, el doble de la fabricación de pienso del tipo A sumada con la del tipo B debe ser como poco cuatro toneladas diarias. Teniendo en cuenta que el coste de fabricación de una tonelada de pienso del tipo A es de 1000 euros y el de una tonelada del tipo B de 2000 euros, ¿cuál es la producción diaria para que la fábrica cumpla con sus obligaciones con un coste mínimo? Calcúlese dicho coste diario mínimo.

**Solución:**

Sea  $x$  = "cantidad de pienso de A" e  $y$  = "cantidad de pienso de B"

$$\text{Las restricciones son: } \begin{cases} 0 \leq x \leq 6, & 0 \leq y \leq 4 \\ y \leq 2x \\ 2x + y \geq 4 \end{cases} \quad \mapsto \quad \begin{cases} 0 \leq x \leq 6, & 0 \leq y \leq 4 \\ 2x - y \geq 0 \\ 2x + y \geq 4 \end{cases}$$

La función objetivo para minimizar es:  $z = f(x, y) = 1000x + 2000y$



Los vértices son:  $(2, 0)$  ,  $(6, 0)$  ,  $(6, 4)$  ,  $(2, 4)$  ,  $(1, 2)$

$$\begin{cases} f(2, 0) = 1000 \cdot 2 = 2000 & f(2, 4) = 1000 \cdot 2 + 2000 \cdot 4 = 10000 \\ f(6, 0) = 1000 \cdot 6 = 6000 & f(1, 2) = 1000 + 2000 \cdot 2 = 5000 \\ f(6, 4) = 1000 \cdot 6 + 2000 \cdot 4 = 14000 \end{cases}$$

El coste mínimo es de 2000 euros y se alcanza produciendo 2 toneladas de pienso A y ninguna tonelada de pienso B.