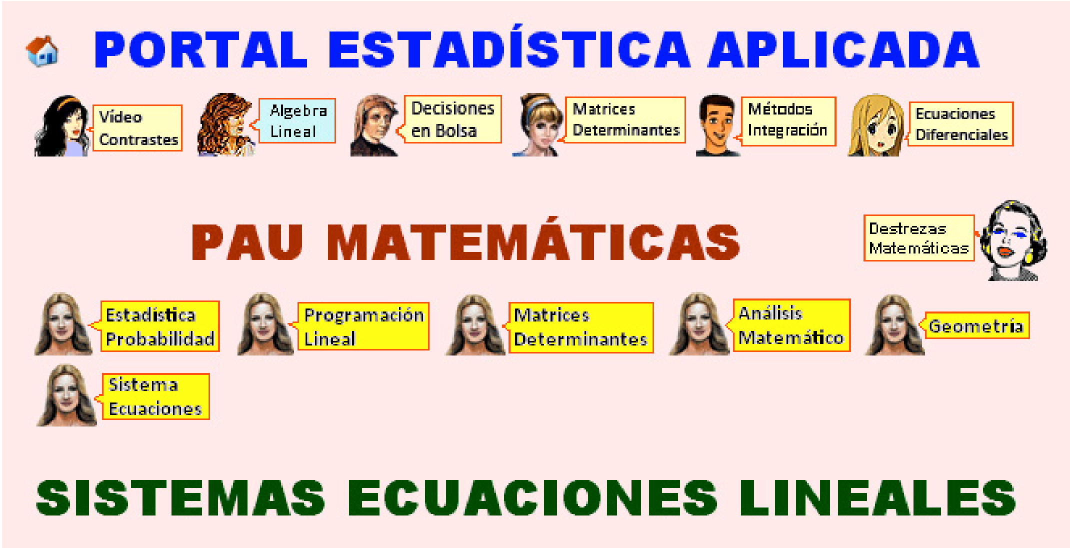

PAU: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

1. Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x - y + z &= 1 \\ x + y - z &= 1 \end{aligned}$$

¿Es posible transformarlo en compatible indeterminado cambiando solamente un signo?. ¿Cómo?

Solución:

Resolviendo por el método de Gauss:

$$\begin{array}{ccc} x & y & z \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 - F_1]{F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \mapsto \left\{\begin{array}{r} -2z = 0 \\ -2y = 0 \\ x + y + z = 1 \end{array}\right. \mapsto \begin{array}{l} z = 0 \\ y = 0 \\ x = 1 \end{array}$$

Solución (1, 0 , 0)

Si en la tercera ecuación se cambia el signo del coeficiente de z, esta ecuación quedaría como la primera. Por tanto, sería un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas, compatible indeterminado.

2. Discute el siguiente sistema y resuélvelo, si es posible en el caso $a=4$:

$$\begin{cases} x - y = a \\ x + a^2 z = 2a+1 \\ x - y + a(a-1)\, z = 2a \end{cases}$$

Solución:

Sean la matriz de los coeficientes A y la matriz ampliada A':

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & a^2 \\ 1 & -1 & a(a-1) \end{pmatrix} \qquad A'=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & a \\ 1 & 0 & a^2 & 2a+1 \\ 1 & -1 & a(a-1) & 2a \end{pmatrix}$$

Se estudia el rango de la matriz de los coeficientes A:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & a^2 \\ 1 & -1 & a(a-1) \end{vmatrix}=a(a-1) \;\mapsto\; |A|=0 \;\mapsto\; \begin{cases} a=0 \\ a=1 \end{cases}$$

- Si $a\neq 0$ y $a\neq 1$ $\;\mapsto\;$ $r(A)=r(A')=3$ $\;\mapsto\;$ Sistema compatatible determinado

$$x=\frac{\begin{vmatrix} a & -1 & 0 \\ 2a+1 & 0 & a^2 \\ 2a & -1 & a(a-1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & a^2 \\ 1 & -1 & a(a-1) \end{vmatrix}}=\frac{a(a^2-a-1)}{a(a-1)}=\frac{a^2-a-1}{a-1}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 2a+1 & a^2 \\ 1 & 2a & a(a-1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & a^2 \\ 1 & -1 & a(a-1) \end{vmatrix}}=\frac{-a}{a(a-1)}=\frac{-1}{a-1} \qquad z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 0 & 2a+1 \\ 1 & -1 & 2a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & a^2 \\ 1 & -1 & a(a-1) \end{vmatrix}}=\frac{a}{a(a-1)}=\frac{1}{a-1}$$

Solución: $x=\dfrac{a^2-a-1}{a-1} \quad y=\dfrac{-1}{a-1} \quad z=\dfrac{1}{a-1}$

- Si $a=0$ $\;\mapsto\;$ $r(A)=r(A')=2<3$ $\Rightarrow$ sistema compatible indeterminado

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A)=2 \quad A'=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A')=2$$

Se resuelve tomando las dos primeras ecuaciones: $\begin{cases} x - y = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

Solución: $x = 1 \quad y = 0 \quad z = \lambda$

- Si $a = 1 \quad \mapsto \quad r(A) = 2 \neq r(A') = 3 \quad \Rightarrow$ sistema incompatible

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A) = 2 \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A') = 3$$

⊙ Para $a = 4$ basta con sustituir cuando el sistema es compatible determinado:

$$x = \frac{a^2 - a - 1}{a - 1} \quad y = \frac{-1}{a-1} \quad z = \frac{1}{a-1} \qquad \mapsto \qquad x = \frac{11}{3} \quad y = \frac{-1}{3} \quad z = \frac{1}{3}$$

3. Resolver por el método de Gauss el sistema:

$$\begin{aligned} 2x + y + 3z &= 0 \\ 4x + 2y - z &= 0 \\ 6x + 3y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

Solución:

Como es un sistema homogéneo es seguro que hay solución, la solución trivial (0, 0, 0), se trata de ver si es única o el sistema es indeterminado.

$$\begin{array}{ccc} x & y & z \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & -1 & 0 \\ 6 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 - 3F_1]{F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \mapsto$$

$$\mapsto \begin{cases} -7z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \end{cases} \mapsto \quad x = \lambda \quad y = -2\lambda \quad z = 0$$

4. Considera el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2x - 2y - z &= 4 \\ x + 2y - 2z &= -1 \\ x - z &= 1 \end{aligned}$$

a) ¿Existe una solución en la que y es igual a 0?

b) Resuelve el sistema

c) Interprétalo geométricamente

Solución:

$$\begin{array}{ccc} x & y & z \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 - 2F_1]{F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \mapsto$$

$$\xrightarrow{F_3 - F_2} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \mapsto \begin{cases} 2y - z = -2 \\ x - z = 1 \end{cases}$$

a) Si $y = 0 \mapsto \begin{cases} -z = -2 \\ x - z = 1 \end{cases} \mapsto \begin{array}{l} z = 2 \\ x = 3 \end{array}$ Solución: $(3,\ 0,\ 2)$

b) $\begin{cases} 2y - z = -2 \\ x - z = 1 \end{cases} \to \begin{cases} y = \lambda \\ z = 2 + 2\lambda \\ x = 3 + 2\lambda \end{cases}$ Solución: $(3 + 2\lambda\ ,\ \lambda\ ,\ 2 + 2\lambda)$

c) Son tres planos que se cortan en una recta.

5. Discute el sistema según los valores del parámetro a. Interprétalo geométricamente:

$$\left.\begin{array}{r} ax + y + z - 4 = 0 \\ x + y + z + 1 = 0 \\ x - ay + z - 1 = 0 \end{array}\right\}$$

Solución:

$$\left.\begin{array}{r} ax + y + z - 4 = 0 \\ x + y + z + 1 = 0 \\ x - ay + z - 1 = 0 \end{array}\right\} \mapsto \begin{cases} x + y + z = -1 \\ ax + y + z = 4 \\ x - ay + z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccc} x & y & z \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -a & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{C_3 \to C_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & a & 4 \\ 1 & -a & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \to F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_3 - F_1]{F_2 - F_1} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z & y & x \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -a-1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & a-1 & 5 \end{array}\right) \end{array}$$

⊙ Si $a \neq -1$ y $a \neq 1 \Rightarrow$ Sistema compatible determinado.

Son tres planos que se cortan en un punto.

⊙ Si $a=1$, resulta: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$ sistema incompatible

Los dos primeros planos son paralelos y el tercero los corta.

⊙ Si $a=-1$, se tiene: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \end{array}\right)$ sistema incompatible

El plano segundo y tercero son paralelos y el primero los corta.

6. Se considera el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ x & + & ay & + & 3z & = & 2 \\ 2x & + & (2+a)\,y & + & 6z & = & 3 \end{array}\right\}$$

a) Encuentra un valor de a para el cual el sistema sea incompatible.

b) Discute si existe algún valor del parámetro a para el cual el sistema sea compatible determinado.

c) Resuelve el sistema para $a=0$

Solución:

$$\begin{array}{ccc} x & y & z \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & a & 3 & 2 \\ 2 & 2+a & 6 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-2F_1]{F_2-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & a-2 & 0 & 1 \\ 0 & a-2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3-F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & a-2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

a) Para $a=0$ el sistema es incompatible

b) No existe ningún valor de a para que el sistema sea compatible determinado

c) Si $c=0$ se tiene: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} -2y=1 \\ x+2y+3z=1 \end{cases} \mapsto \begin{cases} z=\lambda \\ y=-1/2 \\ x=2-3\lambda \end{cases}$

Solución: $\left(2-3\lambda\,,-\dfrac{1}{2},\lambda\right)$

7. Discutir según los valores del parámetro λ y resolver el sistema en los casos en que sea posible:

$$\left.\begin{array}{rl} 6x + 4y + 2\lambda z = & 2 \\ \lambda x + y - z = & 2 \\ 5x + 3y + 3z = & 2\lambda \end{array}\right\}$$

Solución:

La primera ecuación se simplifica al dividir por 2. Se resuelve por el método de Gauss, que no es aconsejable cuando hay parámetros.

$$\left.\begin{array}{rl} 6x + 4y + 2\lambda z = & 2 \\ \lambda x + y - z = & 2 \\ 5x + 3y + 3z = & 2\lambda \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{rl} 3x + 2y + \lambda z = & 1 \\ \lambda x + y - z = & 2 \\ 5x + 3y + 3z = & 2\lambda \end{array}\right\} \begin{array}{l} 3º \\ 1º \\ 2º \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} y & x & z \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 3 & 2\lambda \\ 2 & 3 & \lambda & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-2F_1]{F_2-3F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 0 & 5-3\lambda & 6 & 2\lambda-6 \\ 0 & 3-2\lambda & \lambda+2 & -3 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow{(5-3\lambda)F_3-(3-2\lambda)F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 0 & 5-3\lambda & 6 & 2\lambda-6 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda-8/3) & -4\lambda^2+9\lambda-3 \end{array}\right)$$

⊙ Si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq 8/3 \mapsto$ sistema compatible determinado

$$\begin{cases} (\lambda-1)(\lambda-8/3)z = -4\lambda^2+9\lambda-3 \\ (5-3\lambda)x + 6z = 2\lambda-6 \\ y + \lambda x - z = 2 \end{cases}$$

$$z = \frac{-4\lambda^2+9\lambda-3}{(\lambda-1)(\lambda-8/3)} \quad x = \frac{-2\lambda^2+2\lambda-6}{(\lambda-1)(\lambda-8/3)} \quad y = \frac{2\lambda^3-7\lambda+13}{(\lambda-1)(\lambda-8/3)}$$

⊙ Para $\lambda = 1$ se tiene: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$ sistema incompatible

⊙ Para $\lambda = 8/3$ queda: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8/3 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 6 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & -67/9 \end{array}\right)$ sistema incompatible

Había sido aconsejable resolver el sistema por Cramer

8. Resuelve el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & 2y & + & 4z & = & 8 \\ 2x & + & 3y & - & 3z & = & 4 \\ x & - & 3y & - & 5z & = & -6 \\ 4x & + & 4y & + & 6z & = & 18 \end{array}\right\}$$

Solución:

Se trata de un sistema de cuatro ecuaciones con tres incógnitas, por lo que sobra una ecuación. Al aplicar el método de Gauss se busca una fila de todos ceros.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & 8 \\ 2 & 3 & -3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & -6 \\ 4 & 4 & 6 & 18 \end{array}\right) \end{array} \xrightarrow[1/2F_4 \to F_4]{F_1 \leftrightarrow F_3} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -5 & -6 \\ 2 & 3 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 4 & 8 \\ 2 & 2 & 3 & 9 \end{array}\right) \end{array} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[F_4 - 2F_1]{\substack{F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 3F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -5 & -6 \\ 0 & 9 & 7 & 16 \\ 0 & 7 & 19 & 26 \\ 0 & 8 & 13 & 21 \end{array}\right) \xrightarrow[9F_4 - 8F_2]{9F_3 - 7F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -5 & -6 \\ 0 & 9 & 7 & 16 \\ 0 & 0 & 122 & 122 \\ 0 & 0 & 61 & 61 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{F_4 - F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -5 & -6 \\ 0 & 9 & 7 & 16 \\ 0 & 0 & 122 & 122 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 122z = 122 \\ 9y + 7z = 16 \\ x - 3y + 122z = 122 \end{array}\right. \mapsto \quad z = 1 \quad y = 1 \quad x = 2$$

9. Resuelve por el método de Gauss el siguiente sistema e interprétalo geométricamente:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & - & z & = & -1 \\ x & + & 5y & + & 3z & = & 3 \\ x & + & y & + & z & = & 1 \\ 3x & + & 7y & + & 5z & = & 5 \end{array}\right\}$$

Solución:

Se trata de un sistema de cuatro ecuaciones con tres incógnitas, por lo que sobra una ecuación. En consecuencia, al aplicar el método de Gauss se busca una fila de todos ceros.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{array}\right) \end{array} \xrightarrow[F_4 - 3F_1]{\substack{F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1}} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 8 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 16 & 8 & 8 \end{array}\right) \end{array} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[F_4 \to 1/8\,F_4]{\substack{F_2 \to 1/4\,F_2 \\ F_3 \to 1/2\,F_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_4 - F_2]{F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2y + z = 1 \\ x - 3y - z = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \lambda \\ z = 1 - 2\lambda \\ x = -1 + 3y + z = \lambda \end{cases}$$

Infinitas Soluciones: $(\lambda\,,\,\lambda\,,\,1-2\,\lambda)$. Se trata de cuatro planos con una recta en común.

10. Resuelve cada uno de los sistemas para los valores de m que los haga compatible:

$$\text{a)} \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x - y = 1 \\ 4x + 3y = m \end{cases} \qquad \text{b)} \begin{cases} x - y - 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ 3x + z = 3 \\ x + 2y + 5z = m \end{cases}$$

Solución:

En ambos casos sobra una ecuación, por lo que al aplicar el método de Gauss se busca una fila de todos ceros.

a)

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & m \end{array}\right) \end{array} \xrightarrow[F_3 - 4F_1]{F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & -5 & m-12 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & m-7 \end{array}\right)$$

⊙ Si $m \neq 7 \mapsto$ Sistema incompatible

⊙ Si $m = 7 \mapsto$ Sistema compatible determinado $\begin{cases} -5y = -5 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$

Solución: $x = 1 \quad y = 1$

b)

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & m \end{array}\right) \end{array} \xrightarrow[F_4-F_1]{\substack{F_2-2F_1 \\ F_3-3F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 7 & -3 \\ 0 & 3 & 7 & -3 \\ 0 & 3 & 7 & m-2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_4-F_2]{F_3-F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m+1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_4 \to F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & m+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

⊙ Si $m \neq -1 \mapsto$ Sistema incompatible

⊙ Si $m = -1 \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} 3y+7z=-3 \\ x-y-2z=2 \end{cases}$ sistema compatible indeterminado

$z = 3\lambda$

$3y = -3-7z \mapsto y = -1-7\lambda$ Solución: $(1-\lambda\,, -1-7\lambda\,, 3\lambda)$

$x = 2+y+2z \mapsto x = 2-1-7\lambda+6\lambda = 1-\lambda$

11. Discute y resuelve cuando sea posible el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{rrrrrrrrl} ax & & & + & z & + & t & = & 1 \\ & & ay & + & z & - & t & = & 1 \\ & & ay & + & z & - & 2t & = & 2 \\ & & & & az & - & t & = & 0 \end{array}\right\}$$

Solución:

Se procede a reducir a forma escalonada la matriz ampliada

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & t \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} a & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & a & -1 & 0 \end{array}\right) \end{array} \xrightarrow{F_3-F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} a & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & a & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_4}$$

$$\xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_4} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & t \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} a & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & a & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow \begin{cases} -t=1 \\ az-t=0 \\ ay+z-t=1 \\ ax+z+t=1 \end{cases}$$

La matriz ampliada escalonada representa un sistema triangular y, por tanto, se trata de un sistema compatible determinado para $a \neq 0$

⊙ Para $a=0$ se tiene: $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$

Sistema incompatible

⊙ Para $a \neq 0$ el sistema es compatible determinado $\Rightarrow \begin{cases} -t=1 \\ az-t=0 \\ ay+z-t=1 \\ ax+z+t=1 \end{cases}$

sustituyendo, queda: $t=-1 \quad z=\dfrac{-1}{a} \quad y=\dfrac{1}{a^2} \quad x=\dfrac{1+2a}{a^2}$

12. Discute y resuelve según los valores del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$ (es decir, α real) el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + 2t = 3 \\ 3x - y + z - t = 1 \\ 5x - 3y + 2z - 4t = \alpha \\ 2x + y + z + t = 2 \end{array}\right\}$$

Solución:

Se procede a reducir a forma escalonada la matriz ampliada

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & t \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & -3 & 2 & -4 & \alpha \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \end{array} \xrightarrow[F_4-2F_1]{\substack{F_2-3F_1 \\ F_3-5F_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 1 & -7 & -8 \\ 0 & -8 & 2 & -14 & \alpha-15 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & -4 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[4F_4-F_2]{F_3-2F_2}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&2&3\\0&-4&1&-7&-8\\0&0&0&0&\alpha+1\\0&0&3&-5&-8\end{array}\right)\xrightarrow{F_4\leftrightarrow F_3}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&2&3\\0&-4&1&-7&-8\\0&0&3&-5&-8\\0&0&0&0&\alpha+1\end{array}\right)$$

⊙ Si $\alpha\neq -1 \;\mapsto\;$ Sistema incompatible

$$\odot\ \text{Si }\alpha=-1\ \mapsto\ \begin{array}{ccccc}x&y&z&t&\\ \multicolumn{5}{c}{\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&2&3\\0&-4&1&-7&-8\\0&0&3&-5&-8\\0&0&0&0&0\end{array}\right)}\end{array}\ \Rightarrow\ \text{Compatible indeterminado}\ \begin{cases}3z-5t=-8\\-4y+z-7t=-8\\x+y+2t=3\end{cases}$$

$$t=\lambda\quad z=-\frac{8}{3}+\frac{5}{3}\lambda\quad y=\frac{4}{3}-\frac{4}{3}\lambda\quad x=\frac{5}{3}-\frac{2}{3}\lambda\quad\forall\lambda\in\mathbb{R}$$

$$\text{Solución: }\ (x\,,\,y\,,\,z\,,\,t)=\left(\frac{5}{3}-\frac{2}{3}\lambda\,,\,\frac{4}{3}-\frac{4}{3}\lambda\,,\,-\frac{8}{3}+\frac{5}{3}\lambda\,,\,\lambda\right)\quad\forall\lambda\in\mathbb{R}$$

13. Dados los sistemas lineales siguientes, determina a y b para que se trate de sistemas equivalentes:

$$\text{a)}\ \left.\begin{array}{r}2x+y-(3+2a)z=0\\x-y+(3-a)z=0\end{array}\right\}\qquad\text{b)}\ \left.\begin{array}{r}2x+(1+b)z=0\\(b-1)x+y+b(b-1)z=0\end{array}\right\}$$

Solución:

Dos sistemas son equivalentes $\Leftrightarrow$ Tienen la misma forma canónica

Se llevan los sistemas a forma canónica mediante operaciones elementales:

$$\text{a)}\ \left.\begin{array}{r}2x+y-(3+2a)z=0\\x-y+(3-a)z=0\end{array}\right\}\approx\begin{cases}y-3z=0\\x-az=0\end{cases}$$

$$\begin{array}{cccc}x&y&z&\\ \multicolumn{4}{c}{\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&-3-2a&0\\1&-1&3-a&0\end{array}\right)}\end{array}\xrightarrow{F_2\leftrightarrow F_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&3-a&0\\2&1&-3-2a&0\end{array}\right)\xrightarrow{F_2-2F_1}$$

$$\xrightarrow{F_2-2F_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&3-a&0\\0&3&-9&0\end{array}\right)\xrightarrow{F_2\to 1/3\,F_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&3-a&0\\0&1&-3&0\end{array}\right)\xrightarrow{F_2+F_1}$$

$$\xrightarrow{F_2+F_1} \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} y-3z=0 \\ x-az=0 \end{cases}$$

b) $\left.\begin{array}{rcrcrcl} 2x & & & + & (1+b)z & = & 0 \\ (b-1)x & + & y & + & b(b-1)z & = & 0 \end{array}\right\} \approx \begin{cases} y+(1-b)z=0 \\ x+(1+b)z=0 \end{cases}$

$$\begin{array}{ccc} x & y & z \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1+b & 0 \\ b-1 & 1 & b(b-1) & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2+F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1+b & 0 \\ b & 1 & b^2+1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2-bF_1}$$

$$\begin{array}{ccc} x & y & z \end{array}$$

$$\xrightarrow{F_2-bF_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1+b & 0 \\ 0 & 1 & 1-b & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} y+(1-b)z=0 \\ x+(1+b)z=0 \end{cases}$$

⊙ Para que las dos formas canónicas: $\begin{cases} y-3z=0 \\ x-az=0 \end{cases}$, $\begin{cases} y+(1-b)z=0 \\ x+(1+b)z=0 \end{cases}$

sean iguales debe verificarse: $\begin{cases} -3=1-b \\ -a=1+b \end{cases} \mapsto \ b=4 \quad a=-5$

14. Dadas las ecuaciones: $\begin{cases} 3x - 2y + z = 5 \\ 2x - 3y + z = -4 \end{cases}$ añade una ecuación para que el sistema sea:

a) Incompatible

b) Compatible determinado

Solución:

a) Para que el sistema sea incompatible, hay que añadir una ecuación que verifique:

$$\left.\begin{array}{l} 3x - 2y + z = 5 \\ 2x - 3y + z = -4 \end{array}\right\} \mapsto a(3x - 2y + z) + b(2x - 3y + z) \neq 5a-4b$$

Por ejemplo, si $a=1$ y $b=0$, se tiene: $\boxed{3x - 2y + z = 2}$

b) Para que el sistema sea compatible determinado, se añade por ejemplo $\boxed{y=0}$

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & 2y & + & z & = & 5 \\ 2x & - & 3y & + & z & = & -4 \\ & & y & & & = & 0 \end{array}\right\} \mapsto \begin{cases} y=0 \\ 3x + z = 5 \\ 2x + z = -4 \end{cases} \mapsto y=0 \quad x=9 \quad z=-22$$

15. Tres amigos acuerdan jugar tres partidas de dados de forma que, cuando uno pierda, entregará a cada uno de los otros dos una cantidad igual a la que cada uno posea en ese momento. Cada uno perdió una partida, y al final cada uno tenía 24 €.
¿Cuánto tenía cada jugador al comenzar?

Solución:

La situación expuesta es la siguiente:

1º Pierde	1ª Partida	2ª Partida	3ª Partida
inicio cantidad **x**	$\boxed{x-y-z}$	$\boxed{2(x-y-z)}$	$\boxed{4(x-y-z)}$
inicio cantidad **y**	$\boxed{2y}$	$2y-(x-y-z)-2z=$ $=\boxed{-x+3y-z}$	$\boxed{2(-x+3y-z)}$
inicio cantidad **z**	$\boxed{2z}$	$\boxed{4z}$	$4z-2(x-y-z)-(-x+3y-z)=$ $=\boxed{-x-y+7z}$

con lo cual, $\left.\begin{array}{rcrcrcr} 4x & - & 4y & - & 4z & = & 24 \\ -2x & + & 6y & - & 2z & = & 24 \\ -x & - & y & + & 7z & = & 24 \end{array}\right\} \mapsto \left.\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & - & z & = & 6 \\ -x & + & 3y & - & z & = & 12 \\ -x & - & y & + & 7z & = & 24 \end{array}\right\}$

$$\begin{array}{ccc} x & y & z \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 6 \\ -1 & 3 & -1 & 12 \\ -1 & -1 & 7 & 24 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3+F_1]{F_2+F_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 6 \\ 0 & 2 & -2 & 18 \\ 0 & -2 & 6 & 30 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3\to 1/2\,F_3]{F_2\to 1/2F_2}$$

$$\xrightarrow[F_3\to 1/2\,F_3]{F_2\to 1/2F_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & -1 & 3 & 15 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3+\ F_2} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 24 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2z=24 \\ y-z=9 \\ x-y-z=6 \end{cases} \mapsto \ z=12 \quad y=21 \quad x=39$$

El jugador que perdió primero tenía 39 euros, el que perdió en segundo lugar tenía 21 euros y el que perdió en tercer lugar tenía 12 euros.

16. Un cajero automático contiene 95 billetes de 10, 20 y 50 € y un total de 2000 €. Si el número de billetes de 10 € es el doble que el número de billetes de 20 €, averigua cuántos billetes hay de cada tipo.

Solución:

Sea x = "número billetes de 10 €", y = "número billetes de 20 €"
z = "número billetes de 50 €". Se tiene:

$$\left.\begin{array}{r} x+\ \ y+\ \ z= 95 \\ 10x+20y+50z=2000 \\ x \qquad\qquad = 2y \end{array}\right\} \mapsto \left.\begin{array}{r} x+\ y+\ z= 95 \\ x+2y+5z=200 \\ x \qquad\quad = 2y \end{array}\right\} \mapsto \left.\begin{array}{r} 3y+\ z= 95 \\ 4y+5z=200 \end{array}\right\}$$

$$\mapsto \quad y=25 \quad z=20 \quad x=50$$

Hay 50 billetes de 10 €, 25 billetes de 20 € y 20 billetes de 50 €

17. Discute los siguientes sistemas según los valores del parámetro m:

$$\text{a)} \begin{cases} mx + y + z = 4 \\ x + y + z = m \\ x - y + mz = 2 \end{cases} \qquad \text{b)} \begin{cases} x + y + z = m-1 \\ 2x + y + mz = m \\ x + my + z = 1 \end{cases}$$

Solución:

a) Matriz coeficientes: $A=\begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & m \end{pmatrix}$ Matriz Ampliada: $A'=\left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & m \\ 1 & -1 & m & 2 \end{array}\right)$

$$|A|=\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & m \end{vmatrix}=m^2-1=0 \quad \mapsto \begin{cases} m=1 \\ m=-1 \end{cases}$$

⊙ Si $m\neq 1$ y $m\neq -1 \Rightarrow r(A)=r(A')=$ nº incógnitas $=3 \mapsto$ sistema compatible determinado

⊙ Si $m=1 \mapsto A'=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \end{array}$ contradicción $\Rightarrow$ sistema incompatible

⊙ Si $m=-1 \mapsto A'=\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \\ \leftarrow \end{array}$ contradicción $\Rightarrow$ sistema incompatible

b) Matriz coeficientes: $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix}$ Matriz Ampliada: $A'=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & m-1 \\ 2 & 1 & m & m \\ 1 & m & 1 & 1 \end{array}\right)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix} = -m^2 + 3m - 2 = 0 \quad \mapsto \begin{cases} m = 1 \\ m = 2 \end{cases}$$

$\odot$ Si $m \neq 1$ y $m \neq 2 \;\Rightarrow\; r(A) = r(A') = \text{nº incógnitas} = 3 \;\mapsto$ sistema compatible determinado

$\odot$ Si $m = 1 \;\mapsto\; A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \leftarrow \\ \\ \leftarrow \end{array}$ contradicción $\Rightarrow$ sistema incompatible

$$\odot \text{ Si } m = 2 \;\mapsto\; A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[C_4 - C_1]{C_3 - C_1 \;\; C_2 - C_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \mapsto r(A') = 2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_2 - C_1]{C_3 - C_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto r(A) = 2$$

$r(A) = r(A') = 2 < 3 = \text{nº incógnitas} \;\mapsto$ sistema compatible indeterminado

18. Discute los siguientes sistemas según los valores del parámetro m:

a) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x + my + z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + my + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \\ mx + y + z = 4 \end{cases}$

Solución:

a) Matriz coeficientes: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & m & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ Matriz ampliada: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & m & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & m & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -2m + 2 = 0 \quad \mapsto m = 1$$

$\odot$ Si $m \neq 1 \;\Rightarrow\; r(A) = r(A') = \text{nº incógnitas} = 3 \;\mapsto$ sistema compatible determinado

$$\odot \text{ Si } m = 1 \;\mapsto\; A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

Siendo $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \;\Rightarrow\; r(A)=2$ y $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \;\Rightarrow\; r(A')=3$

$r(A)=2 \neq r(A')=3 \;\mapsto\;$ sistema incompatible

b) $\begin{cases} x + my + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \\ mx + y + z = 4 \end{cases}$

Matriz coeficientes: $A=\begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$ Matriz ampliada: $A'=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ m & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$

$|A|=\begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix}=m^2-4m+3=0 \;\mapsto\; m=1$ y $m=3$

⊙ Si $m\neq 1$ y $m\neq 3 \;\Rightarrow\; r(A)=r(A')=$ nº incógnitas $=3 \;\mapsto\;$ sistema compatible determinado

⊙ Si $m=1 \;\mapsto\; A'=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\neq 0} r(A')=2$

$r(A)=r(A')=2 < 3=$ nº incógnitas $\;\mapsto\;$ sistema compatible indeterminado

⊙ Si $m=3 \;\mapsto\; A'=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \rightarrow$ imposible $\;\mapsto\;$ sistema incompatible

19. Discutir y resolver, según los valores de a, el sitema de ecuaciones:

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases}$$

Solución:

a) Matriz coeficientes: $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ Matriz ampliada: $A'=\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right)$

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=a^3-3a+2=(a-1)^2\,(a+2)=0 \quad \mapsto \quad a=1 \text{ (doble) } \text{ y } a=-2$$

$\odot$ Si $a\neq 1$ y $a\neq -2 \;\Rightarrow\; r(A)=r(A')=\text{nº incógnitas}=3 \quad \mapsto \quad$ sistema compatible determinado

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}}=\frac{(a-1)^2}{(a-1)^2\,(a+2)}=\frac{1}{a+2} \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}}=\frac{(a-1)^2}{(a-1)^2\,(a+2)}=\frac{1}{a+2}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}}=\frac{(a-1)^2}{(a-1)^2\,(a+2)}=\frac{1}{a+2} \qquad \text{Solución: } (x,y,z)=\left(\frac{1}{a+2},\frac{1}{a+2},\frac{1}{a+2}\right)$$

Los tres planos se cortan en un punto de coordenadas $\left(\frac{1}{a+2},\frac{1}{a+2},\frac{1}{a+2}\right)$

$\odot$ Si $a=1 \;\mapsto\; A'=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \;\mapsto\; r(A)=r(A')=1<3=\text{nº incógnitas} \;\mapsto\;$ sistema compatible indeterminado

$$x + y + z = 1 \;\Rightarrow\; \begin{cases} z=\lambda \\ y=\mu \\ x=1-\lambda-\mu \end{cases}$$

La solución $\left(1-\lambda-\mu,\lambda,\mu\right)$ es la forma paramétrica de la ecuación del plano

$\odot$ Si $a=-2 \;\mapsto\; A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad A'=\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}\neq 0 \;\Rightarrow\; r(A)=2 \qquad \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\neq 0 \;\Rightarrow\; r(A')=3$$

$r(A)=2 \neq r(A')=3 \;\mapsto\;$ sistema incompatible

Los planos se cortan dos a dos pero no los tres a la vez

20. Discutir y resolver, según los distintos valores del parámetro k, los sistemas:

$$a)\ \begin{cases} kx + ky - z = 2 \\ 3x - ky = 0 \\ 5x + ky = 0 \\ x + 2z = 1 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + y - z = 4 \\ kx + y + 3z = 6 \\ x - 2z = 0 \end{cases}$$

Solución:

a) Matriz coeficientes: $A = \begin{pmatrix} k & k & -1 \\ 3 & -k & 0 \\ 5 & k & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ Matriz ampliada: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} k & k & -1 & 2 \\ 3 & -k & 0 & 0 \\ 5 & k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$

$$|A'| = \begin{vmatrix} k & k & -1 & 2 \\ 3 & -k & 0 & 0 \\ 5 & k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{2F_4 - F_1} \frac{1}{2}\begin{vmatrix} k & k & -1 & 2 \\ 3 & -k & 0 & 0 \\ 5 & k & 0 & 0 \\ 2-k & 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & -k & 0 \\ 5 & k & 0 \\ 2-k & 0 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -4\begin{vmatrix} 3 & -k \\ 5 & k \end{vmatrix} = -40k = 0 \ \mapsto\ k = 0$$

⊙ Si $k \neq 0 \ \mapsto\ r(A) = 3 \neq r(A') = 4 \ \mapsto$ sistema incompatible (no tiene solución)

⊙ Si $k = 0 \ \mapsto\ A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \ \mapsto\ r(A) = 2 \qquad \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \ \mapsto\ r(A') = 3$$

$r(A) = 2 \neq r(A') = 3 \ \mapsto$ sistema incompatible (no tiene solución)

$$b)\ \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + y - z = 4 \\ kx + y + 3z = 6 \\ x - 2z = 0 \end{cases}$$

Matriz coeficientes: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ k & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ Matriz ampliada: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ k & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$

$$|A'| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ k & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ k & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[C_4 + C_2]{\substack{C_1 + C_2 \\ C_3 + C_2}} 2\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \\ k+1 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ k+1 & 4 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -12k + 12 = 0 \quad \mapsto \quad k = 1$$

⊙ Si $k \neq 1 \quad \mapsto \quad r(A) = 3 \neq r(A') = 4 \quad \mapsto$ sistema incompatible (no tiene solución)

⊙ Si $k = 1 \quad \mapsto \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$

Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \mapsto \quad r(A) = r(A') = 3 = \text{nº incógnitas} \quad \mapsto$ sistema compatible determinado

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + y - z = 4 \\ x + y + 3z = 6 \\ x - 2z = 0 \end{cases} \approx \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + y - z = 4 \\ x - 2z = 0 \end{cases} \quad \mapsto \quad (x, y, z) = (2, 1, 1)$$

21. Discutir y resolver, según los distintos valores del parámetro k, los sistemas:

a) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 2y - 3z = 8 \\ kx - y - z = 1 \\ x - y + z = -2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - y - z = k \\ x + y + z = 2 \\ 3x - 2y - z = 4 \\ x - y + 2z = 3 \end{cases}$

Solución:

a) Matriz coeficientes: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ k & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ Matriz ampliada: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ k & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right)$

$$|A'| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ k & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \xrightarrow[C_4 - 2C_2]{\substack{C_1 - C_2 \\ C_3 - C_2}} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -5 & 4 \\ k+1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & -5 & 4 \\ k+1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$= -8k + 16 = 0 \quad \mapsto \quad k = 2$

⊙ Si $k \neq 2 \quad \mapsto \quad r(A) = 3 \neq r(A') = 4 \quad \mapsto$ sistema incompatible (no tiene solución)

⊙ Si $k = 2$: $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right)$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad r(A) = r(A') = 3 =$ nº incógnitas $\mapsto$ sistema compatible determinado

$$\left.\begin{array}{rcl} x + y + z &=& 2 \\ x + 2y - 3z &=& 8 \\ kx - y - z &=& 1 \\ x - y + z &=& -2 \end{array}\right\} \approx \left.\begin{array}{rcl} x + y + z &=& 2 \\ x + 2y - 3z &=& 8 \\ 2x - y - z &=& 1 \end{array}\right\} \xrightarrow{1ª+3ª} \begin{cases} x = 1 \\ y + z = 1 \\ 2y - 3z = 7 \end{cases}$$

Solución: $(x, y, z) = (1, 2, -1)$

b) $\begin{cases} 2x - y - z = k & 4ª \\ x + y + z = 2 & 1ª \\ 3x - 2y - z = 4 & 2ª \\ x - y + 2z = 3 & 3ª \end{cases}$

Aplicando el método de Gauss, como sobra una ecuación se busca una fila de ceros:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y & z & x \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 2 & k \end{array}\right) \end{array} \xrightarrow[F_3 + F_1]{\substack{F_2 + 2F_1 \\ F_3 + F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & k+2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - 3F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & -13 & -19 \\ 0 & 0 & 3 & k+2 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow{13F_4 + 3F_3} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y & z & x \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & -13 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & 13k - 31 \end{array}\right) \end{array} \xrightarrow{K = \frac{31}{13}} \begin{cases} -13x = -19 \\ z + 5x = 8 \\ y + z + x = 2 \end{cases} \mapsto \begin{array}{l} x = 19/13 \\ z = 9/13 \\ y = -2/13 \end{array}$$

$\odot$ Si $k \neq \dfrac{31}{13}$ $\mapsto$ sistema incompatible (no tiene solución)

$\odot$ Si $k = \dfrac{31}{13}$ $\mapsto$ sistema compatible determinado

Solución: $x = \dfrac{19}{13}$ $y = \dfrac{-2}{13}$ $z = \dfrac{9}{13}$