Universidad Autónoma de Madrid
Grado Administración y Gestión
Facultad Ciencias Económicas y Empresariales
Departamento de Economía Aplicada
Profesor: Santiago de la Fuente Fernández

NÚMEROS ÍNDICES

NÚMEROS ÍNDICES

Los números índices son una medida estadística que permite comparar una magnitud simple o compleja en dos situaciones diferentes respecto al tiempo o al espacio tomando una de ellas como referencia.

Al período inicial se le denomina **período base o referencia** y se le asigna el valor 100, en cambio, la situación que deseamos comparar se denomina **período actual o corriente**.

Para las comparaciones hay que tener en cuenta dos aspectos importantes:

- Fijar la situación inicial (de forma arbitraria) a la que se referirán las comparaciones. Señalar que la elección de la situación inicial condiciona el resultado de la comparación, por lo que el punto de referencia inicial debe ser el más idóneo posible a los objetivos que se persiguen.

- Las magnitudes que se comparan pueden ser simples o complejas, lo que nos introduce en el problema de la construcción de sistemas de comparación adecuados. Una magnitud compleja es comparar la producción de un mismo país en dos épocas diferentes o la producción global de dos países. No olvidemos que la producción es una magnitud compleja compuesta por magnitudes simples heterogéneas (unidades de producción, litros, kilogramos, etc.)

Una clasificación sencilla de los números índices sería:

NÚMEROS ÍNDICES

- **SIMPLES**
  Se refieren a un solo producto o concepto
  - ***Serie*** *(referencia fija)*
  - ***Cadena*** *(referencia el dato anterior)*
- **COMPLEJOS**
  Se refieren a varios productos o conceptos
  - **Sin ponderar**
    - *Sauerbeck (media aritmética)*
    - *Media Geométrica*
    - *Media Armónica*
    - *Bradstreet - Dûtot (media agregativa)*
  - **Ponderados**
    - *Laspeyres*
    - *Paasche*
    - *Edgeworth*
    - *Fisher*

NÚMEROS ÍNDICES SIMPLES.- Son los índices que proporcionan la variación que ha sufrido una magnitud o concepto entre dos períodos o lugares distintos. Generalmente, esta comparación se realiza con el valor de un período fijo ***(periodo base)***.

Dependiendo de sí la referencia es fija o no, se habla de **índices en serie** (referencia fija) e **índices en cadena** (referencia variable).

NÚMEROS ÍNDICES SIMPLES EN SERIE.- Sean x_t y x_0 dos valores de una variable **X**, el valor del número índice en serie que corresponde al valor x_t tomando como referencia o base fija x_0 se representa mediante $I_0^t(X)$ y se define:

$$I_0^t(X) = \frac{x_t}{x_0} \cdot 100$$

Ejemplo 1.- En la tabla se presenta el número de mujeres (en miles) activas en España desde el tercer trimestre de 2009 hasta el tercer trimestre de 2010. En la última columna se representan los números índices simples en serie con base el tercer trimestre de 2009.

NÚMEROS ÍNDICES SIMPLES EN SERIE

Año	Trimestre	Mujeres activas (miles)	Base (2009-3º)
2009	3	10089,4	100
2009	4	10139,3	(10139, 3 / 10089, 4) . 100 = 100,4946
2010	1	10213,3	(10213, 3 / 10089, 4) . 100 = 101,2280
2010	2	10250,5	(10250, 5 / 10089, 4) . 100 = 101,5967
2010	3	10265,2	(10265, 2 / 10089, 4) . 100 = 101,7424

Los índices reflejan la variación porcentual que experimentan los distintos valores de la variable con respecto al valor que se ha tomado como referencia (3º trimestre de 2009).

Observando la tabla, el número de mujeres activas en España en el tercer trimestre de 2010 es un 1,74% superior al que había en el tercer trimestre del año anterior.

Los índices que se obtienen respecto de una base (periodo de referencia) fija se denominan **índices en serie**.

NÚMEROS ÍNDICES SIMPLES EN CADENA.- Cuando el índice correspondiente a cada dato se calcula tomando como referencia el dato inmediatamente anterior.

Sean x_{t-1} y x_t los valores observados de una variable **X** en dos instantes consecutivos, el índice en cadena que corresponde al valor x_t se representa mediante IC^t y se define:

$$IC^t = \frac{x_t}{x_{t-1}} \cdot 100$$

Para series de observaciones temporales, estos índices reflejan la variación porcentual que experimenta la variable entre cada dos observaciones consecutivas.

NÚMEROS ÍNDICES SIMPLES EN CADENA

Año	Trimestre	Mujeres activas (miles)	Base(2009-3º)
2009	3	10089,4	---------
2009	4	10139,3	(10139, 3 / 10089, 4) . 100 = 100,49
2010	1	10213,3	(10213, 3 / 10139, 3) . 100 = 100,73
2010	2	10250,5	(10250, 5 / 10213, 3) . 100 = 100,36
2010	3	10265,2	(10265, 2 / 10250, 5) . 100 = 100,14

Los índices en cadena reflejan la variación porcentual entre trimestres del número de mujeres activas en España.

En esta línea, en el segundo trimestre de 2010 el número de mujeres activas fue un 0,36% superior al dato del trimestre anterior.

$$IC_{2010-2}^{2010-3} = \frac{10250,5}{10213,3} \cdot 100 = 100,36$$

RELACIÓN ENTRE ÍNDICES SIMPLES EN SERIE Y EN CADENA

- Los índices en cadena se pueden obtener a partir de los índices en serie

$$IC^t = \frac{x_t}{x_{t-1}} \cdot 100 = \frac{\dfrac{x_t}{x_0}}{\dfrac{x_{t-1}}{x_0}} \cdot 100 = \frac{I_0^t}{I_0^{t-1}} \cdot 100$$

En el ejemplo, $IC_{2010-2}^{2010-3} = \dfrac{101,5967}{101,2280} \cdot 100 = 100,36$

- Los índices en serie se pueden obtener a partir de los índices en cadena

$$I_0^t(X) = \frac{x_t}{x_0} \cdot 100 = \frac{x_t}{x_{t-1}} \cdot \frac{x_{t-1}}{x_{t-2}} \cdot \frac{x_{t-2}}{x_{t-3}} \cdot \cdots \cdot \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{x_1}{x_0} \cdot 100 = \frac{IC^t(X)}{100} \cdot \frac{IC^{t-1}(X)}{100} \cdot \cdots \cdot \frac{IC^2(X)}{100} \cdot \frac{IC^1(X)}{100} \cdot 100$$

En el ejemplo, $I_0^{2010-3}(X) = \dfrac{100,14}{100} \cdot \dfrac{100,36}{100} \cdot \dfrac{100,73}{100} \cdot \dfrac{100,49}{100} \cdot 100 = 101,7424$

Ejemplo 2.- En la tabla adjunta recoge los índices en cadena trimestrales para el número de parados en los sectores de la construcción y servicios en España

Año	Trimestre	IC Parados construcción	IC Parados servicios
2009	1	-------	-------
2009	2	94,37	101,33
2009	3	88,64	95,84
2009	4	98,79	100,7
2010	1	97,87	106,35
2010	2	87,71	95,91
2010	3	87,4	96,04

$$\frac{96,04}{100} \cdot \frac{95,91}{100} \cdot \frac{106,35}{100} \cdot \frac{100,70}{100} \cdot 100$$

a) Determinar la variación porcentual que experimento el número de parados en el sector servicios durante el tercer trimestre de 2009 al tercer trimestre de 2010.

b) Sabiendo que en el sector de la construcción el número de parados ascendió a 527,6 miles de personas durante el segundo trimestre de 2010. Hallar la serie expresada en miles de trabajadores parados en la construcción.

Solución: En el apartado (a)

$$IC_{2009\text{-}3}^{2010\text{-}3}(\text{parados servicios}) = \frac{IC^{2010\text{-}3}}{100} \cdot \frac{IC^{2010\text{-}2}}{100} \cdot \frac{IC^{2010\text{-}1}}{100} \cdot \frac{IC^{2009\text{-}4}}{100} \cdot 100 =$$

$$= \frac{96,04}{100} \cdot \frac{95,91}{100} \cdot \frac{106,35}{100} \cdot \frac{100,70}{100} \cdot 100 = 98,6468$$

En consecuencia, la variación porcentual que corresponde al periodo comprendido entre el tercer trimestre de 2009 y el tercer trimestre de 2010 es de $[98,6468 - 100 = -1,3532\%]$

b) En la construcción, primero se obtienen los **índices en serie** con base primer trimestre de 2009:

$$I_{2009-2}^{2009-3}(X) = \frac{IC^{2009-3}}{100} \cdot \frac{IC^{2009-2}}{100} \cdot 100 = \frac{88,64}{100} \cdot \frac{94,37}{100} \cdot 100 = 83,6496$$

$$I_{2009-2}^{2009-4}(X) = \frac{98,79}{100} \cdot \frac{88,64}{100} \cdot \frac{94,37}{100} \cdot 100 = 82,6374$$

Año	Trimestre	IC Parados construcción	I Parados (2009-100)	Miles de parados (construcción)
2009	1	-------	100	$x_{2009\text{-}1}$ = **743,754**
2009	2	94,37	94,3700	743,754 x 94,37 = 701,881
2009	3	88,64	83,6496	743,754 x 83,6496 = 622,147
2009	4	98,79	82,6374	743,754 x 82,6374 = 614,619
2010	1	97,87	80,8772	743,754 x 80,8772 = 601,528
2010	2	87,71	**70,9374**	**527,600**
2010	3	87,4	61,9993	743,754 x 61,9993 = 461,122

Utilizando el dato de 527,6 mil parados para el segundo trimestre de 2010 se calcula el dato de paro para el primer trimestre de 2009:

$$I_o^t = \frac{x_t}{x_0} \cdot 100 \quad \rightarrow \quad \frac{527,6}{x_{2009-1}} \cdot 100 = 70,9374 \quad \mapsto \quad x_{2009-1} = 743,754$$

TASAS DE VARIACIÓN (Variación porcentual)

Sea x_{t_1} el valor de una variable **X** en el instante o periodo de tiempo t_1 y x_{t_2} el valor de la misma en un instante o periodo posterior t_2, la **tasa de variación** de X en t_2 con respecto a t_1 se define como:

$$\textbf{Tasa}_{t_1}^{t_2}(x) = \frac{x_{t_2} - x_{t_1}}{x_{t_1}} \cdot 100$$

Adviértase que $\textbf{Tasa}_{t_1}^{t_2}(x) = \frac{x_{t_2} - x_{t_1}}{x_{t_1}} \cdot 100 = \left(\frac{x_{t_2}}{x_{t_1}} - 1\right) \cdot 100 = I_{t_1}^{t_2}(x) - 100$

- La tasa de variación entre dos observaciones consecutivas (x_{t-1}, x_t) de **X**, se denota por **$Tasa^t(x)$** , y se calcula a partir del **índice en cadena**:

$$\mathbf{Tasa^t(x) = \frac{x_t - x_{t-1}}{x_{t-1}} . 100 = IC^t(x) - 100}$$

Se suele utilizar la expresión **tasa de variación interanual**, **intertrimestral** o **intermensual**, para referirse a la tasa de variación entre observaciones consecutivas correspondientes a años, trimestres o meses, respectivamente.

Cuando se trabaja con series de datos mensuales o trimestrales correspondientes a distintos años, también se utiliza la expresión **tasa de variación interanual correspondiente a un determinado mes (o trimestre)** para referirse a la variación porcentual que experimenta la variable en un determinado mes (o trimestre) del año inmediatamente anterior.

Ejemplo 3.- En la tabla adjunta se refleja el gasto total en viajes turísticos (en millones de euros) de los residentes en España para el periodo 2001-2004.

Datos	2001	2002	2003	2004
Viajes turísticos	12815,2	12093	12743,7	14568,5
Destino España	9896	9274,6	9828,5	11154,3
Destino extranjero	2919,2	2814,4	2915,2	3414,2

a) ¿Cuál fue el incremento porcentual de gasto en viajes turísticos de los residentes en España entre los años 2001-2004?

b) Hallar la variación porcentual del gasto en viajes turísticos con destino al extranjero correspondiente a cada año respecto al año 2001.

c) Determinar las tasas de variación interanual (%) para el gasto por viajes con destino a España correspondientes al periodo 2001-2004, sabiendo que en el año 2001 respecto al 2000 fue de un 16,2%.

Solución: En el apartado (a)

$$Tasa_{2001}^{2004}(x) = \frac{x_{2004} - x_{2001}}{x_{2001}} . 100 = \frac{14568,5 - 12815,2}{12815,2} . 100 = 13,6814$$

o bien, $Tasa_{2001}^{2004}(x) = I_{2001}^{2004}(x) - 100 = \dfrac{14568,5}{12815,2} - 100 = 13,6814$

b) Se obtiene la serie de índices simples en serie con base 2001 para el gasto en viajes turísticos y después se obtiene la tasa porcentual restando 100 a cada índice.

Datos	2001	2002	2003	2004
Destino extranjero	2919,2	2814,4	2915,2	3414,2
I_{2001}^{t}	100	96,410	99,863	116,957
$Tasa_{2001}^{t} = I_{2001}^{t} - 100$	0	-3,590	-0,137	16,957

También a partir de la expresión: $Tasa^{t}_{2001}(x) = \dfrac{x_t - x_{2001}}{x_{2001}} \, . \, 100$

c) Las tasas de variación interanual se calculan a partir de los índices de cadena:

Datos	2001	2002	2003	2004
Destino España	9896	9274,6	9828,5	11154,3
IC^t	116,2	93,72	105,97	113,49
$\text{Tasa interanual} = IC^t - 100$	16,20	-6,28	5,97	13,49

$I^{2002}_{2001}(X) = \dfrac{9274,6}{9896} \, . \, 100 = 93,72$ $\quad I^{2003}_{2002}(X) = \dfrac{9828,5}{9274,6} \, . \, 100 = 105,97$ $\quad I^{2004}_{2003}(X) = \dfrac{11154,3}{9828,5} \, . \, 100 = 113,49$

Ejemplo 4.- En la tabla adjunta figuran el número de hipotecas inmobiliarias para fincas rústicas entre junio y diciembre de 2004.

Mes	2004 - 06	2004 - 07	2004 - 08	2004 - 09	2004 - 10	2004 - 11	2004 - 12
Hipotecas	4155	3836	3380	4212	4119	3927	3801

a) Determinar las tasas intermensuales de variación correspondientes

b) Conociendo que el número de hipotecas en septiembre de 2005 ascendió a 4410, obtener la tasa de variación interanual correspondiente al mes de septiembre.

Solución: En el apartado (a)

Mes	2004 - 06	2004 - 07	2004 - 08	2004 - 09	2004 - 10	2004 - 11	2004 - 12
Hipotecas	4155	3836	3380	4212	4119	3927	3801
IC^t (mes)	------	92,32	88,11	124,62	97,79	95,34	96,79
Tasa $IC^t - 100$	------	-7,68	-11,89	24,62	-2,21	-4,66	-3,21

4410

b) La tasa interanual para el mes de septiembre de 2005:

$$\text{Tasa interanual}^{2005-09} = IC^{2005-09} - 100 = \frac{4410}{4212} \, . \, 100 - 100 = 4,7\%$$

TASA MEDIA DE VARIACIÓN (Tasa media crecimiento acumulativo)

Se denomina **tasa media de variación** de la variable X en el periodo $[\mathbf{t}, \mathbf{t+k}]$, o **tasa media de crecimiento acumulativo**, a la tasa $\mathbf{T_k}$ que permite obtener la observación $\mathbf{x_{t+k}}$ en el instante o periodo $\mathbf{t+k}$, partiendo de la observación $\mathbf{x_t}$ en el instante **t**, aplicando entre instantes o periodos consecutivos un incremento porcentual constante e igual a $\mathbf{T_k}$.

$$x_{t+1} = x_t + \frac{T_k}{100} \cdot x_t = \left(\frac{100+T_k}{100}\right) \cdot x_t$$

$$x_{t+2} = x_{t+1} + \frac{T_k}{100} \cdot x_{t+1} = \left(\frac{100+T_k}{100}\right) \cdot x_{t+1} = \left(\frac{100+T_k}{100}\right)^2 \cdot x_t$$

$$x_{t+3} = x_{t+2} + \frac{T_k}{100} \cdot x_{t+2} = \left(\frac{100+T_k}{100}\right) \cdot x_{t+2} = \left(\frac{100+T_k}{100}\right)^3 \cdot x_t$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$x_{t+k} = x_{t+k-1} + \frac{T_k}{100} \cdot x_{t+k-1} = \left(\frac{100+T_k}{100}\right) \cdot x_{t+k-1} = \left(\frac{100+T_k}{100}\right)^k \cdot x_t$$

Siendo $x_{t+k} = \left(\frac{100+T_k}{100}\right)^k \cdot x_t \rightarrow \frac{x_{t+k}}{x_t} = \left(\frac{100+T_k}{100}\right)^k \rightarrow \sqrt[k]{\frac{x_{t+k}}{x_t}} = \frac{100+T_k}{100}$

Por tanto, $T_k = \left(\sqrt[k]{\frac{x_{t+k}}{x_t}} - 1\right) . 100$

Ejemplo 5.- En la tabla adjunta figuran el número de hipotecas inmobiliarias para fincas rústicas entre junio y diciembre de 2004.

Mes	2004 - 06	2004 - 07	2004 - 08	2004 - 09	2004 - 10	2004 - 11	2004 - 12
Hipotecas	4155	3836	3380	4212	4119	3927	3801
				4410			

a) Determinar la tasa media de variación intermensual de 2004

b) Conociendo que el número de hipotecas en septiembre de 2005 ascendió a 4410, obtener el crecimiento medio mensual acumulativo para el periodo septiembre 2004 - septiembre 2005

Solución: En el apartado (a)

$$T_6 = \left(\sqrt[6]{\frac{x_{2004-12}}{x_{2004-06}}} - 1\right) . 100 = \left(\sqrt[6]{\frac{3801}{4155}} - 1\right) . 100 = \left(\sqrt[6]{0,9148} - 1\right) . 100 = -1,47\%$$

b) El crecimiento medio mensual acumulativo entre septiembre 2004-2005 (periodo de 13 meses):

$$T_{12} = \left(\sqrt[12]{\frac{x_{2005-09}}{x_{2004-09}}} - 1\right) . 100 = \left(\sqrt[12]{\frac{4410}{3380}} - 1\right) . 100 = \left(\sqrt[12]{1,3047} - 1\right) . 100 = 2,24\%$$

ÍNDICES SIMPLES MÁS UTILIZADOS

- **PRECIO RELATIVO**: Relación entre el precio de un bien en el período actual p_{it} y el precio del mismo en el período base p_{i0}: $p_0^t = \frac{p_{it}}{p_{i0}}.100$

- **CANTIDAD RELATIVA**: Razón entre la cantidad producida o vendida de un bien en sus períodos actual q_{it} y base q_{i0}: $q_0^t = \frac{q_{it}}{q_{i0}}.100$

- **VALOR RELATIVO**: Valor de un bien en un período cualquiera se define como el producto del precio de ese bien y la cantidad producida (vendida). El valor relativo será la razón entre los valores de ese bien en el período actual $(p_{it}.q_{it})$ y en el período base $(p_{i0}.q_{i0})$:

$$V_0^t = \frac{V_t}{V_0} = \frac{p_{it}\,.\,q_{it}}{p_{i0}\,.\,q_{i0}}\,.100 = \left(\frac{p_{it}}{p_{i0}}\right).\left(\frac{q_{it}}{q_{i0}}\right).100 = p_0^t\,.\,q_0^t\,.100$$

El valor relativo de un bien es igual al producto de su precio relativo y su cantidad relativa.

Ejemplo 6.- Se desea conocer la evolución del precio de la barra de pan ente 2005 y 2010 en España. Para ello se dispone de la siguiente información:

		Índices
Años	Precio barra de pan (céntimos euro)	Variación precio barra de pan
2005	25	100
2006	30	$I_{2005}^{2006} = \frac{30}{25}.100 = 120$
2007	32	$I_{2005}^{2007} = \frac{32}{25}.100 = 128$
2008	38	$I_{2005}^{2008} = \frac{38}{25}.100 = 152$
2009	44	$I_{2005}^{2009} = \frac{44}{25}.100 = 176$
2010	48	$I_{2005}^{2010} = \frac{48}{25}.100 = 192$

Calculada la serie de índices de variación, se observa que el precio de la barra de pan en 2007 fue 1,28 veces el de 2005; el de 2010 fue 1,92 veces la de 2005, y así sucesivamente.

Señalar que el índice es una medida adimensional, numerador y denominador vienen dados en las mismas unidades de medida.

ÍNDICES COMPLEJOS.- Generalmente el interés no se encuentra en comparar precios, cantidades o valores individuales, sino que se comparan fenómenos del mundo real donde intervienen muchas variables. Como consecuencia, la información suministrada por los índices de diferentes bienes debe de ser resumida en un único índice al que se denomina **índice complejo**.

La construcción de un índice complejo no es una tarea fácil. Para elaborar la evolución del coste de la vida de un país (IPC en España) habría que seleccionar un grupo de bienes que reflejaran dicho coste, teniendo en cuenta la importancia relativa de cada uno de esos bienes, decidiendo finalmente la forma de unificar toda la información para obtener un único índice.

El objetivo es llegar a un número índice sencillo que reúna la mayor cantidad posible de información.

De esta manera, se llega a dos tipos de índices complejos: **índices complejos no ponderados** (cuando prima la sencillez) e **índices complejos ponderados** (cuando se desea que contengan la mayor cantidad de información).

ÍNDICES COMPLEJOS DE PRECIOS NO PONDERADOS.- Mediante los **Índices de Precios** se analiza el estudio de magnitudes económicas, que cuantifican la evolución de la magnitud precio de un conjunto de bienes y servicios.

Se tendría la información que proporciona un cuadro análogo al siguiente:

Artículos / Épocas	1	2	......	n
0	p_{10}	p_{20}	......	p_{n0}
1	p_{11}	p_{21}	......	p_{n1}
2	p_{12}	p_{22}	......	p_{n2}
⋮	⋮	⋮	......	⋮
⋮	⋮	⋮	......	⋮
t	p_{1t}	p_{2t}	......	p_{nt}

Artículos	1	2	...	n
Índices simples	$\frac{p_{1t}}{p_{10}}100$	$\frac{p_{2t}}{p_{20}}100$	...	$\frac{p_{nt}}{p_{n0}}100$

El objetivo será encontrar una medida estadística que resuma toda la información y permita conocer cuál ha sido la variación experimentada por los precios en el período t respecto al período base.

Para resumir la información obtenida a través de los índices simples, es lógico promediar éstos. De este modo, los índices complejos van a ser medias aritméticas, geométricas, armónicas y agregativas de los índices simples.

ÍNDICE DE SAUERBECK: Considerando los precios relativos $I_i = \frac{p_{it}}{p_{i0}}$, es la media aritmética no ponderada de los índices simples: $S_p = \frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n} \frac{p_{it}}{p_{i0}}.100$

ÍNDICE MEDIA GEOMÉTRICA: $I_0^t = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} \frac{p_{it}}{p_{i0}}}\ .100$

ÍNDICE MEDIA ARMÓNICA: $I_0^t = \dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n} \dfrac{p_{i0}}{p_{it}}}.100$

De los tres índices el que se utiliza con mayor frecuencia es el índice de Sauerbeck.

ÍNDICE MEDIA AGREGATIVA SIMPLE O DE BRADSTREET-DÛTOT: Consiste en considerar un índice simple de agregados de magnitudes (precios). Es decir, se calcula la razón de la media aritmética de los precios de n artículos (en el período t como en el período base):

$$B - D_P = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{it}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0}}.100$$

Señalar que los índices analizados tienen la ventaja de ser fáciles de aplicar, pero presentan inconvenientes importantes: << No tienen en cuenta la importancia relativa de cada uno de los diferentes artículos en el conjunto total, puesto que no son ponderados >>

Ejemplo 7.- En la tabla adjunta aparecen distintos artículos y los precios (en céntimos de euros) entre 2008 y 2010. Se pide calcular los índices compuestos.

Artículos	Precios		
	2008	2009	2010
Pan	38	44	48
Huevos	130	150	215
Leche	88	100	110
Pollo	160	190	205

Solución:

Índice de Sauerbeck: $S_p = \dfrac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n} \dfrac{p_{it}}{p_{i0}}.100$ (media aritmética simple)

$$S_{p_{2008}^{2009}} = \frac{1}{4}.\sum_{i=1}^{n} \frac{p_{it}}{p_{i0}}.100 = \frac{1}{4}.\left[\frac{44}{38} + \frac{150}{130} + \frac{100}{88} + \frac{190}{160}\right].100 = 115,89$$

$$S_{p_{2008}^{2010}} = \frac{1}{4}.\sum_{i=1}^{n} \frac{p_{it}}{p_{i0}}.100 = \frac{1}{4}.\left[\frac{48}{38} + \frac{215}{130} + \frac{110}{88} + \frac{205}{160}\right].100 = 136,21$$

Índice media Geométrica: $I_0^t = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} \dfrac{p_{it}}{p_{i0}}}\ .100$

$$I_{2008}^{2009} = \sqrt[4]{\frac{44}{38}.\frac{150}{130}.\frac{100}{88}.\frac{190}{160}}\ .100 = 115,88 \qquad I_{2008}^{2010} = \sqrt[4]{\frac{48}{38}.\frac{215}{130}.\frac{110}{88}.\frac{205}{160}}\ .100 = 135,25$$

Índice media Armónica: $I_0^t = \dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n} \dfrac{p_{i0}}{p_{it}}}.100$

$$I_{2008}^{2009} = \frac{4}{\frac{38}{44} + \frac{130}{150} + \frac{88}{100} + \frac{160}{190}}.100 = 115{,}86$$

$$I_{2008}^{2010} = \frac{4}{\frac{38}{48} + \frac{130}{215} + \frac{88}{110} + \frac{160}{205}}.100 = 134{,}37$$

Índice media agregativa simple o de Bradstreet-Dûtot: $B - D_P = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} p_{it}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0}}.100$

$$B - D_{P2008}^{2009} = \frac{\sum_{i=1}^{4} p_{it}}{\sum_{i=1}^{4} p_{i0}}.100 = \frac{44 + 150 + 100 + 190}{38 + 130 + 88 + 160}.100 = 116{,}35$$

$$B - D_{P2008}^{2010} = \frac{\sum_{i=1}^{4} p_{it}}{\sum_{i=1}^{4} p_{i0}}.100 = \frac{48 + 215 + 110 + 205}{38 + 130 + 88 + 160}.100 = 138{,}94$$

Señalar que estos cuatro tipos de índices compuestos sin ponderar se pueden utilizar para estudiar la evolución de cualquier otra variable distinta del precio.

Ejemplo 8.- Con la tabla adjunta de precios de productos agrícolas (arroz, trigo y patatas). Calcular los índices de precios de Sauerbeck y de Bradstreet-Dûtot, así como las tasas de variación intermensuales.

Meses	Precio Arroz	Precio Trigo	Precio Patatas
0	50	30	40
1	60	30	40
2	70	35	45
3	75	40	45
4	80	45	50
5	90	50	50

Solución:

Los índices complejos de Sauerbeck y Bradstreet-Dûtot se obtienen, respectivamente, como media aritmética simple $\left[\text{índices } I_0^t(X) = \dfrac{x_t}{x_0}\,.\,100 \right]$ y media agregativa simple $\left[\text{índices } \left(I_A\right)_0^t(X) = \dfrac{(x_A)_t}{(x_A)_0}\,.\,100 \right]$

Meses	Arroz Precio	Trigo Precio	Patatas Precio	Arroz I. simple	Trigo I. simple	Patatas I. simple	Índice Sauerbeck M. aritmética	TOTAL x_A	Bradstreet-Dûtot M. agre x_A
0	50	30	40	100	100	100	100	120	100
1	60	30	40	120	100	100	106,67	130	108,33
2	70	35	45	140	116,667	112,5	123,06	150	125
3	75	40	45	150	133,333	112,5	131,94	160	133,33
4	80	45	50	160	150	125	145	175	145,83
5	90	50	50	180	166,667	125	157,22	190	158,33

El índice de Sauerbeck es la media aritmética de los índices simples: $I_0^t(X) = \dfrac{x_t}{x_0} \, . \, 100$

$$S_{p2} = \frac{120+100+100}{3} = 106,77 \qquad S_{p3} = \frac{140+116,667+112,5}{3} = 123,06 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

El índice de Bradstreet-Dûtot es la media agregativa simple: $(I_A)_0^t(X) = \dfrac{(x_A)_t}{(x_A)_0} \, . \, 100$

$$B-D_{P0}^{1} = \frac{130}{120} \, . \, 100 = 108,33 \qquad B-D_{P0}^{3} = \frac{160}{120} \, . \, 100 = 133,33 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Las tasas de variación intermensuales: $\text{Tasa}_0^t(x) = \dfrac{x_t - x_0}{x_0} \, . \, 100 = \left(\dfrac{x_t}{x_0} - 1\right) . \, 100 = I_0^t(x) - 100$

Meses	0	1	2	3	4	5
B-D (media agregativa)	100	108,33	125	133,33	145,83	158,33
Tasas variación (intermensuales)	---------	8,33	25	33,33	45,83	58,33

INDICES COMPLEJOS DE PRECIOS PONDERADOS.- Una presentación sobre los sistemas de ponderaciones propuestos tradicionalmente:

$p_{i0} . q_{i0} \equiv$ valor de la cantidad consumida del bien i-ésimo en el período base, a precios de período base. *(situación real)*

$p_{i0} . q_{it} \equiv$ valor a precios del período base de la cantidad consumida del bien i-ésimo en el período actual. *(situación con valoración ficticia)*

Los índices complejos ponderados más utilizados son: Laspeyres, Paasche, Edgeworth y Fisher.

ÍNDICE DE PRECIOS DE LASPEYRES: IMPORTANCIA DE LAS PONDERACIONES

Analizan las variaciones debidas a los cambios en los precios de un conjunto de artículos ponderándolos siempre por las mismas cantidades.

El índice de Laspeyres se define como la media aritmética ponderada de los índices simples de precios. El criterio de ponderación es $p_{i0} . q_{i0}$, con lo cual:

$$L_p = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{p_{it}}{p_{i0}} p_{i0} . q_{i0}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} . q_{i0}} .100 = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{it} . q_{i0}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} . q_{i0}} .100$$

- Los criterios para le elección del período base son variados, fundamentalmente se requiere que sea un año no irregular o normal.
- *El inconveniente del índice de Laspeyres es que supone que siempre se adquieren las mismas cantidades que en el período base.*

ÍNDICE DE PRECIOS DE PAASCHE: ALTERNATIVAS AL ÍNDICE DE LASPEYRES

El índice de Laspeyres se cuestiona en ocasiones, ya que parece poco realista suponer que las cantidades compradas o adquiridas en el año de referencia no varían en el tiempo.

Como ejemplo, no parece muy realista la hipótesis de que en años de sequía, y en consecuencia, de subidas importantes de los precios de los productos agrarios, las cantidades demandadas sean iguales.

Se planteó la necesidad de disponer de otros índices que, con la finalidad de medir la variación de precios de un determinado conjunto de artículos, no estuviera sujeto a la restricción de suponer que siempre se adquirían las mismas cantidades que en el período base.

El índice de Paasche se define como la media aritmética ponderada de los índices simples de precios. El criterio de ponderación es $p_{i0} . q_{it}$, con lo cual:

$$P_p = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{p_{it}}{p_{i0}} p_{i0} . q_{it}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} . q_{it}} .100 = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{it} . q_{it}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} . q_{it}} .100$$

- *El cálculo del índice de Paasche es laborioso, exige calcular las ponderaciones $p_{it} . q_{it}$ para cada período corriente.*
- *Otro inconveniente adicional, el índice de precios de cada año sólo se puede comparar con el del año base.*

Los dos inconvenientes expuestos en el índice de Paasche, hacen que su uso ha decaído considerablemente.

ÍNDICE DE PRECIOS DE EDGEWORTH

Es una medida agregativa ponderada de precios cuyo coeficiente de ponderación es $(q_{i0}+q_{it})$:

$$E_p = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{it}\,.(q_{i0}+q_{it})}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0}\,.(q_{i0}+q_{it})}.100$$

ÍNDICE DE PRECIOS IDEAL DE FISHER

I. Fisher propuso como número índice de precios la media geométrica de los índices de precios de Laspeyres y Paasche, es decir:

$$F_p = \sqrt{L_p . P_p}$$

ÍNDICE DE VALOR

El índice de valor es el cociente entre el valor de los bienes considerados en el período actual a precios del período actual y el valor de los bienes en el período base a precios del período base, por consiguiente refleja conjuntamente las variaciones de los precios y las cantidades.

$$IV_0^t = \frac{V_t}{V_0} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{it}\,.\,q_{it}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0}\,.\,q_{i0}} \qquad \text{, se verifica } \; IV_0^t = L_{P0}^{\,t}\,.\,P_{Q0}^{\,t} = L_{Q0}^{\,t}\,.\,P_{P0}^{\,t} = F_{P0}^{\,t}\,.\,F_{Q0}^{\,t}$$

PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS ÍNDICES

- **EXISTENCIA.-** Todo número índice debe estar bien definido y ser distinto de cero.
- **IGUALDAD.-** Cuando coincide el período base y el período actual, el número índice es igual a la unidad. Señalar que los números índices miden variaciones entre dos períodos y, al coincidir estos, no reflejan ninguna variedad.
- **INVERSIÓN.-** Denotando por I_0^t un índice con base 0 y período actual t, al intercambiar los períodos entre sí I_t^0, el nuevo índice debe verificar: $I_t^0 = \dfrac{1}{I_0^t} \Rightarrow I_0^t\,.\,I_t^0 = 1$
- **CIRCULAR.-** Considerando los períodos 0, t, t', t'', se debe verificar: $\begin{cases} I_0^t\,.\,I_t^{t'}\,.\,I_{t'}^0 = 1 \\ I_0^t\,.\,I_t^{t'}\,.\,I_{t'}^{t''}\,.\,I_{t''}^0 = 1 \end{cases}$
- **CÍCLICA.-** Consecuencia de la propiedad de inversión y circular: $\begin{cases} I_0^t\,.\,I_t^{t'} = \dfrac{1}{I_{t'}^0} \;\Rightarrow\; I_0^t\,.\,I_t^{t'} = I_0^{t'} \\ I_0^t\,.\,I_t^{t'}\,.\,I_{t'}^{t''} = \dfrac{1}{I_{t''}^0} \;\Rightarrow\; I_0^t\,.\,I_t^{t'}\,.\,I_{t'}^{t''} = I_0^{t''} \end{cases}$

- **PROPORCIONALIDAD.-** Si en el período actual la magnitud (o todas las magnitudes simples en el caso de un índice complejo) varía en una proporción, el índice cambia en la misma proporción.

  Si los valores x_{it} sufren una variación de orden k, los nuevos valores en el período t' son de la forma $x_{it'} = x_{it} + k\,.\,x_{it} = (1+k)\,.\,x_{it}$, y los nuevos índices serán: $I_i' = \dfrac{x_{it'}}{x_{i0}} = \dfrac{(1+k)\,.\,x_{it}}{x_{i0}} = (1+k)\,.\,I_i$

- **HOMOGENEIDAD.-** A un índice no deben afectarle los cambios en las unidades de medida.

Señalar que estas propiedades que se verifican para los índices simples, no siempre se verifican para los índices complejos.

Ejemplo 9.- Supongamos que en el ejemplo 7 disponemos de información adicional sobre la cantidad vendida en cada uno de los períodos, como se detalla en la tabla adjunta. Determinar los índices de Laspeyres, Paasche, Edgeworth y Fisher para 2010, siendo el año base 2008.

	2008		2009		2010	
Artículos	precios	cantidad vendida	precios	cantidad vendida	precios	cantidad vendida
Pan	38	150	44	200	48	240
Huevos	130	400	150	580	215	560
Leche	88	700	100	780	110	925
Pollo	160	400	190	400	205	375

Solución:

	Laspeyres		Paasche		Edgeworth		
Artículos	$p_{i10}\,.\,q_{i08}$	$p_{i08}\,.\,q_{i08}$	$p_{i10}\,.\,q_{i10}$	$p_{i08}\,.\,q_{i10}$	$(q_{i08}+q_{i10})$	$p_{i10}\,.\,(q_{i08}+q_{i10})$	$p_{i08}\,.\,(q_{i08}+q_{i10})$
Pan	7200	5700	11520	9120	390	18720	14820
Huevos	86000	52000	120400	72800	960	206400	124800
Leche	77000	61600	101750	81400	1625	178750	143000
Pollo	82000	64000	76875	60000	775	158875	124000
	252200	183300	310545	223320		562745	406620

Índice de Laspeyres: $$L_{p2008}^{2010} = \frac{\sum_{i=1}^{4} p_{i10}\,.\,q_{i08}}{\sum_{i=1}^{4} p_{i08}\,.\,q_{i08}}.100 = \frac{252200}{183300}.100 = 137{,}59$$

Índice de Paasche: $$P_{p2008}^{2010} = \frac{\sum_{i=1}^{4} p_{i10}\,.\,q_{i10}}{\sum_{i=1}^{4} p_{i08}\,.\,q_{i10}}.100 = \frac{310545}{223320}.100 = 139{,}06$$

Índice de Edgeworth: $$E_{p2008}^{2010} = \frac{\sum_{i=1}^{4} p_{i10}\,.\,(q_{i08}+q_{i10})}{\sum_{i=1}^{4} p_{i08}\,.\,(q_{i08}+q_{i10})}.100 = \frac{562745}{406620}.100 = 138{,}40$$

Índice de Fisher: $F_{p_{2008}}^{2010} = \sqrt{L_{p_{2008}}^{2010} . P_{p_{2008}}^{2010}} = \sqrt{137,59 . 139,06} = 138,32$

INDICES COMPLEJOS PONDERADOS DE PRODUCCIÓN O CUÁNTICOS.- Los números índices cuánticos o de producción analizan su evolución en el tiempo, estudiando las variaciones de la producción física de un conjunto de bienes y servicios.

El criterio de ponderación es igual que en los Índices de Precios, aquí se ha de ponderar el **valor neto** o **valor añadido** del bien y no el precio de venta o valor bruto del mismo, puesto que si se hiciera así se contabilizaría una misma cantidad varias veces, tantas como etapas diferentes supongan el proceso de producción.

Los sistemas de ponderaciones propuestos tradicionalmente $\begin{cases} q_{i0} . p_{i0} & \text{situación real} \\ q_{i0} . p_{it} & \text{situación ficticia} \end{cases}$

Los índices complejos ponderados más utilizados son: Laspeyres, Paasche y Fisher. El índice de Laspeyres es el que más se utiliza, tanto para Índices de Precios como para Índices Cuánticos.

ÍNDICE CUÁNTICO DE LASPEYRES: $$L_q = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{q_{it}}{q_{i0}} q_{i0} . p_{i0}}{\sum_{i=1}^{n} q_{i0} . p_{i0}} .100 = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_{it} . p_{i0}}{\underbrace{\sum_{i=1}^{n} q_{i0} . p_{i0}}_{\text{situación real}}} .100$$

ÍNDICE CUÁNTICO DE PAASCHE: $$P_q = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{q_{it}}{q_{i0}} q_{i0} . p_{it}}{\sum_{i=1}^{n} q_{i0} . p_{it}} .100 = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_{it} . p_{it}}{\underbrace{\sum_{i=1}^{n} q_{i0} . p_{it}}_{\text{situación ficticia}}} .100$$

ÍNDICE CUÁNTICO IDEAL DE FISHER: $F_q = \sqrt{L_q . P_q}$

PROBLEMAS CON LA UTILIZACIÓN DE NÚMEROS ÍNDICES.- Fundamentalmente son referentes a dos cuestiones:

PONDERACIONES.- En la medida de lo posible, el tipo de ponderación debe reflejar la importancia relativa de cada bien en particular. En los índices expuestos las ponderaciones más apropiadas se basan en cantidades o valores para los índices de precios, y en precios o valores para los índices de cantidad.
En la práctica, cada bien incluido en un índice complejo se suele interpretar como representativo de toda la clase de artículos relacionados y no como bien individual. En este sentido, la ponderación asignada a cada artículo individual refleja la importancia de toda la clase que representa.

PERÍODO BASE.- Es aquél período con respecto al que se efectúan las comparaciones, por lo que para que muchas comparaciones no pierdan significado, se suele elegir como tal un período no alejado excesivamente del período corriente. En esta línea, se hace necesario renovar periódicamente la información relativa al año base.

CAMBIOS DE BASE ó REVISIÓN DE LA BASE EN ÍNDICES SIMPLES.- Al alejarse del período base el índice sufre una pérdida de representatividad, en especial cuando para ponderar magnitudes actuales se utilizan precios relativos referidos al período base. Este problema se resuelve haciendo un **cambio de base** a período más próximo al actual.
Para relacionar series de índices referidos a distintos períodos base se utilizan **enlaces técnicos** entre ambas series.

Período	Índice (período 0)	Índice (período h)
0	I_0^0	I_h^0
1	I_0^1	I_h^1
⋮	⋮	⋮
i	I_0^i	I_h^i
⋮	⋮	⋮
h	I_0^h	I_h^h
⋮	⋮	⋮
t	I_0^t	I_h^t

La nueva serie de índices se obtiene:

$$I_h^i = \frac{I_0^i}{I_0^h} . I_h^h = \frac{I_0^i}{I_0^h}$$

donde I_0^h es el índice que hace de **enlace técnico** entre las dos series.

Ejemplo 10.- Dada la serie adjunta con base año 2000, se desea cambiar la base al año 2005

Años	Precio refresco (euros)	Índices Simples Base 2000	Índices Simples Base 2005
2000	1,2	100	(100 / 145) . 100 = 68,97
2001	1,3	(1,3 / 1,2) . 100 = 108,33	(108,33 / 145) . 100 = 74,71
2002	1,42	(1,42 / 1,2) . 100 = 118,33	(118,33 / 145) . 100 = 81,61
2003	1,54	(1,54 / 1,2) . 100 = 128,33	(128,33 / 145) . 100 = 88,51
2004	1,65	(1,65 / 1,2) . 100 = 137,50	(137,5 / 145) . 100 = 94,83
2005	1,74	145	100
2006	1,86	(1,86 / 1,2) . 100 = 155	(155 / 145) . 100 = 106,90
2007	1,94	(1,94 / 1,2) . 100 = 161,67	(161,67 / 145) . 100 = 111,49
2008	2,15	(2,15 / 1,2) . 100 = 179,17	(179,17 / 145) . 100 = 123,56
2009	2,25	(2,25 / 1,2) . 100 = 187,50	(187,50 / 145) . 100 = 129,31
2010	2,30	(2,30 / 1,2) . 100 = 191,67	(191,67 / 145) . 100 = 132,18

El interés del cambio reside en tener los datos más actuales, con la transformación se puede observar como el precio de la botella de refrescos en el año 2010 aumento el 32,18% en relación al año 2005.

Señalar que para realizar un cambio de base en los índices simples basta dividir casa uno de los índices de la base antigua por el valor del índice correspondiente al período seleccionado como nueva base y multiplicarlo por 100.

Como alternativa a la actualización del período base descrito para los **sistemas de base fija**, se viene utilizando con mayor frecuencia los **sistemas de índices de base variable** o **encadenada** (sistemas que utilizan como base el período inmediatamente anterior).

Observando la tabla anterior, utilizando la **BASE VARIABLE o ENCADENADA**:

Años	Precio refresco (euros)	Índices Simples 2005=100	Índices Simples Base variable o Encadenada	Tasa variación (interanual)
2005	1,74	100	----------	
2006	1,86	106,90	$(106,90 / 100)\ .100 = 106,90$	6,90
2007	1,94	111,49	$(111,49 / 106,90)\ .100 = 104,30$	4,30
2008	2,15	123,56	$(123,56 / 111,49)\ .100 = 110,82$	10,82
2009	2,25	129,31	$(129,31 / 123,56)\ .100 = 104,65$	4,65
2010	2,30	132,18	$(132,18 / 129,31)\ .100 = 102,22$	2,22

En la última columna, se observa que entre 2006 y 2005 el precio de la botella de refrescos varió un 6,90%, entre 2006 y 2007 un 4,30%, etc. En este ejemplo, de índices de base variable o encadenada, cada índice se calcula respecto a un año distinto.

Destacar que a partir de la serie de base variable (última columna) se puede calcular el índice para base fija de cualquier período. De esta manera, el índice de los refrescos de 2010 con base 2005 sería:

$$I_{2005}^{2010} = I_{2005}^{2006} \,.\, I_{2006}^{2007} \,.\, I_{2007}^{2008} \,.\, I_{2008}^{2009} \,.\, 100 = \frac{106,9}{100} \,.\, \frac{104,30}{100} \,.\, \frac{110,82}{100} \,.\, \frac{104,65}{100} \,.\, \frac{102,22}{100} \,.\, 100 = 132,18$$

CAMBIOS DE BASE ó REVISIÓN DE LA BASE EN ÍNDICES COMPLEJOS.- El concepto de período base en los índices de un conjunto de artículos (como ocurre con los índices de Laspeyres y Paasche) no es el mismo que en un índice simple.

El período base en los índices complejos ponderados, además de ser el tiempo de referencia, es el tiempo en que se deben verificar determinados requisitos respecto a dos características: (a) Artículos o elementos independientes a los que se refiere el índice. (b) Ponderaciones que se van a asignar a cada elemento o artículo.

Los índices complejos, como los índices simples, pueden elaborarse con un sistema de base fija o con un sistema de base variable o de encadenamientos.

Cuando se elige un sistema de base fija, no hay que olvidar que la estructura del gasto está sometida a una constante evolución. En otras palabras, a medida que nos alejamos del período base se van a producir cambios de distinta índole, que responden fundamentalmente a dos características:
(a) Cambios en los bienes o servicios que componen el índice. (b) Cambios en los gustos o preferencias de los agentes económicos.

Ejemplo 11.- En la tabla adjunta se presentan los datos de un conjunto de bienes $\sum p_{it}.q_{i0}$ y $\sum p'_{it}.q'_{i0}$, respectivamente, donde los períodos de ponderación son 2000 y 2005:

Años	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Base=2000	10	11	12	13	15	16					
Base=2005						18	18,6	20	22	23	24

a) Hallar los correspondientes índices de precios de Laspeyres.
b) Determinar los índices de precios entre los períodos 2000-2004 con base 2005.

Solución:

a) Los correspondientes índices de Laspeyres serían:

$$L_{p2000}^{2000} = \frac{10}{10}.100 = 100\% \qquad L_{p2005}^{2005} = \frac{18}{18}.100 = 100\%$$

$$L_{p2000}^{2001} = \frac{11}{10}.100 = 110\% \qquad L_{p2005}^{2006} = \frac{18,6}{18}.100 = 103,33\%$$

$$L_{p2000}^{2002} = \frac{12}{10}.100 = 120\% \qquad L_{p2005}^{2007} = \frac{20}{18}.100 = 111,11\%$$

$$L_{p2000}^{2003} = \frac{13}{10}.100 = 130\% \qquad L_{p2005}^{2008} = \frac{22}{18}.100 = 122,22\%$$

$$L_{p2000}^{2004} = \frac{15}{10}.100 = 150\% \qquad L_{p2005}^{2009} = \frac{23}{18}.100 = 127,78\%$$

$$L_{p2000}^{2005} = \frac{16}{10}.100 = 160\% \qquad L_{p2005}^{2010} = \frac{24}{18}.100 = 133,33\%$$

Índice de Laspeyres

Años	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Base=2000	100	110	120	130	150	160					
Base=2005						100	103,33	111,11	122,22	127,78	133,33

b) Determinar los índices de precios entre los períodos 2000-2004 con base 2005=100.

Con la definición de cambio de base $I_h^i = \frac{I_0^i}{I_0^h}$, se tiene: $L_{p2005}^{2000} = \frac{L_{p2000}^{2000}}{L_{p2000}^{2005}}.100 = \frac{100}{160}.100 = 62,5\%$

Para los otros índices de Laspeyres:

$$L_{p2005}^{2001} = L_{p2000}^{2001}\,.\,L_{p2005}^{2000} = 110\,.\,62,5 = 68,75\% \qquad L_{p2005}^{2002} = L_{p2000}^{2002}\,.\,L_{p2005}^{2000} = 120\,.\,62,5 = 75\%$$

$$L_{p2005}^{2003} = L_{p2000}^{2003}\,.\,L_{p2005}^{2000} = 130\,.\,62,5 = 81,25\% \qquad L_{p2005}^{2004} = L_{p2000}^{2004}\,.\,L_{p2005}^{2000} = 150\,.\,62,5 = 93,75\%$$

Índice de Laspeyres

Años	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Base=2000	100	110	120	130	150	160					
Base=2005	62,5	68,75	75	81,25	93,75	100	103,33	111,11	122,22	127,78	133,33

Ejemplo 12.- En la tabla se recogen los Índices de Precios Industriales para España con base 1974 y 1990 para los meses de diciembre de cada año. Se pide obtener una serie única para las dos bases.

$$\frac{I_{1974}^{1990}}{I_{1990}^{1990}} = \frac{471,12}{102} = 4,6188$$

$$\frac{I_{1990}^{1990}}{I_{1974}^{1990}} = \frac{102}{471,12} = 0,2165$$

Períodos	Base 1974	Base 1990
1987	429,70	429,70 x 0,2165 = 93,03
1998	444,49	444,49 x 0,2165 = 96,23
1989	460,67	460,67 x 0,2165 = 99,73
1990	471,12	102
1991	102,6 x 4,6188 = 473,89	102,6
1992	104,2 x 4,6188 = 481,28	104,2
1993	107,7 x 4,6188 = 497,45	107,7
1994	113,3 x 4,6188 = 523,31	113,3
1995	118,3 x 4,6188 = 546,41	118,3

Para cambiar la base de un índice basta con determinar la relación existente entre los valores del mismo para el único período en el que se dispone información en las dos bases.

En este sentido, el período en que se dispone información en las dos bases es diciembre de 1990, la relación o **coeficiente de enlace** con base 1974: $\frac{I_{1974}^{1990}}{I_{1990}^{1990}} = \frac{471,12}{102} = 4,6188$

Tomando 1990 como base, el **coeficiente de enlace**: $\frac{I_{1990}^{1990}}{I_{1974}^{1990}} = \frac{102}{471,12} = 0,2165$

Una operación similar al **enlace de series** es el **cambio de base** para una serie concreta. En esta línea, para que la serie con base 1990 tomase el valor 100 en diciembre de 1995, se necesita buscar el coeficiente que haga posible esta transformación. En este caso, el coeficiente sería:

$$\frac{100}{I_{1990}^{1995}} = \frac{100}{1188,3} = 0,8453$$

Períodos	Base 1974	Base 1990	Base 1990 (Diciembre 1995=100)
1987	429,70	429,70 x 0,2165 = 93,03	93,03 x 0,8453 = 78,61
1998	444,49	444,49 x 0,2165 = 96,23	96,23 x 0,8453 = 81,34
1989	460,67	460,67 x 0,2165 = 99,73	99,73 x 0,8453 = 84,30
1990	471,12	102	102 x 0,8453 = 86,22
1991	102,6 x 4,6188 = 473,89	102,6	102,6 x 0,8453 = 86,73
1992	104,2 x 4,6188 = 481,28	104,2	104,2 x 0,8453 = 88,08
1993	107,7 x 4,6188 = 497,45	107,7	107,7 x 0,8453 = 91,04
1994	113,3 x 4,6188 = 523,31	113,3	113,3 x 0,8453 = 95,77
1995	118,3 x 4,6188 = 546,41	118,3	100

DEFLACTAR SERIES ESTADÍSTICAS.- Los números índices, y en especial los números índices de precios, tienen aplicaciones muy importantes en el mundo real.

Una función importante del dinero es la de pasar de unidades físicas a una unidad de cuenta común, mediante una valoración de los distintos bienes y servicios, generalmente mediante la utilización de un sistema de precios.

Realizada la homogeneización podemos efectuar comparaciones en base a la unidad de cuenta común, siempre que no se hayan producido cambios en los precios de determinados artículos.

En otras palabras, la comparación es posible cuando la valoración se realiza a **precios constantes** (de un período determinado), no es posible realizarla cuando se efectúa a **precios corrientes** (precios de cada período), puesto que las alteraciones de los precios de un período a otro asignan distinto poder adquisitivo a las unidades monetarias (en cuanto a su poder de compra, un euro de 2001 no es equivalente a un euro de 2010).

Para clarificar lo expuesto, podemos recurrir a un ejemplo sencillo: <<En 2010 el salario de un trabajador aumentó un 3% . Lo realmente importante no es que el trabajador reciba más euros cada mes, sino si con esos euros puede comprar más o menos bienes y servicios. Si la media de los productos que adquiere sube un 3%, es evidente que el salario del trabajador no ha experimentado un incremento real, sólo ha tenido un incremento monetario>>.

El procedimiento que permite transformar una serie expresada en valores corrientes a valores constantes se conoce como **deflactación** de la serie y al índice elegido para dicha transformación se le llama **deflactor**. El deflactor no siempre es el mismo, en cada caso habrá que elegir el óptimo para cada alcanzar el objetivo deseado.

Ejemplo 13.- En la tabla se recoge el salario anual de un trabajador en el período 2005-2010:

Índice de evolución del salario monetario

Años	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Salario anual (euros)	6840	7102	7524	8208	8892	9234
Índice evolución	100	105	110	120	130	135

Como puede observarse, en la tercera fila se incluye un índice simple de evolución del salario del trabajador, tomando como base el año 2005. El índice de 2010 es de 135%, es decir, el salario del trabajador se ha incrementado durante éste período un 35%.

Para saber si realmente los salario han aumentado en término de lo que se puede adquirir con ellos, la forma más elemental sería compararlos con las subidas del IPC (que proporciona un indicador general de las variaciones de los precios de los bienes y servicios que adquieren las familias españolas).

Índices de evolución salario monetario y salario real

Años	Salario anual (euros)	Índice evolución salario monetario	IPC Base 2005 (deflactor)	Salario anual real (deflactado) = Salario real/IPC	Índice evolución salario real
2005	6840	100	100	6840	100
2006	7102	105	106	6700	97,95
2007	7524	110	109	6902,8	100,92
2008	8208	120	119	6897,5	100,84
2009	8892	130	125	7113,6	104
2010	9234	135	130	7103,1	103,85

El salario anual real (salario deflactado) se obtiene dividiendo el salario anual de cada año o salario monetario por el IPC de cada año.

La deflactación es el proceso que ha permitido transformar los salarios anuales (en euros) a salarios reales, eliminando el efecto de la inflación. El índice elegido como **deflactor** ha sido el IPC. La serie deflactada se denomina serie a **precios constantes**.

En un caso general, en donde la serie estadística sea el resultado de un valor, es decir, el resultado de multiplicar cantidades por precios, se tiene la tabla adjunta:

Períodos	Valor nominal (en euros corrientes)	Valor real (en euros constantes del período 0)
0	$V_0=\sum_{i=1}^{n} p_{i0}\,.\,q_{i0}$	$V_0^R=\sum_{i=1}^{n} p_{i0}\,.\,q_{i0}$
1	$V_1=\sum_{i=1}^{n} p_{i1}\,.\,q_{i1}$	$V_1^R=\sum_{i=1}^{n} p_{i0}\,.\,q_{i1}$
2	$V_2=\sum_{i=1}^{n} p_{i2}\,.\,q_{i2}$	$V_2^R=\sum_{i=1}^{n} p_{i0}\,.\,q_{i2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
t	$V_t=\sum_{i=1}^{n} p_{it}\,.\,q_{it}$	$V_t^R=\sum_{i=1}^{n} p_{i0}\,.\,q_{it}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$V_n=\sum_{i=1}^{n} p_{in}\,.\,q_{in}$	$V_n^R=\sum_{i=1}^{n} p_{i0}\,.\,q_{in}$

Índices de precios más utilizados son Laspeyres y Paasche.

Se plantea como actúan estos índices en su aplicación para deflactar una serie estadística.

Sea $V_t=\sum_{i=1}^{n} p_{it}\,.\,q_{it}$ el valor de la magnitud compleja en el período t. Utilizando como deflactor el índice de Laspeyres $L_p=\dfrac{\sum_{i=1}^{n} p_{it}\,.\,q_{i0}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0}\,.\,q_{i0}}$, se tiene:

$$\frac{V_t}{L_p}=\frac{\sum_{i=1}^{n} p_{it}\,.\,q_{it}}{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} p_{it}\,.\,q_{i0}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0}\,.\,q_{i0}}}=\sum_{i=1}^{n} p_{i0}\,.\,q_{i0}\,.\,\frac{\sum_{i=1}^{n} p_{it}\,.\,q_{it}}{\sum_{i=1}^{n} p_{it}\,.\,q_{i0}}=V_0\,.\,P_q\neq V_t^R$$

No se pasa de valores monetarios corrientes a valores monetarios constantes. A pesar de ello, el índice de Laspeyres se utiliza como deflactor muchas veces, por ser el que se elabora más comúnmente.

Utilizando como deflactor el **ÍNDICE DE PAASCHE** $P_p=\dfrac{\sum_{i=1}^{n} p_{it}\,.\,q_{it}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0}\,.\,q_{it}}$, se tiene:

$$\frac{V_t}{P_p}=\frac{\sum_{i=1}^{n} p_{it}\,.\,q_{it}}{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} p_{it}\,.\,q_{it}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0}\,.\,q_{it}}}=\sum_{i=1}^{n} p_{i0}\,.\,q_{it}=V_t^R$$

Utilizando como deflactor el índice de Paasche, se obtiene una relación entre valores monetarios corrientes y valores monetarios constantes. En consecuencia, el índice de Paasche será el deflactor más adecuado siempre que los valores que aparecen en la serie estadística se puedan descomponer en sumas de precios por cantidades.

Subrayar que la elección del deflactor, es decir, del índice de precios adecuado es fundamental: Si lo que se deflacta es una serie sobre la producción de la industria habría que utilizar un índice de precios industriales; si se deflacta una serie sobre el PIB nominal habría que utilizar un índice general de precios; si se deflacta una serie sobre los valores nominales o corrientes de la producción agraria sería conveniente disponer de un índice de precios agrarios; etc.