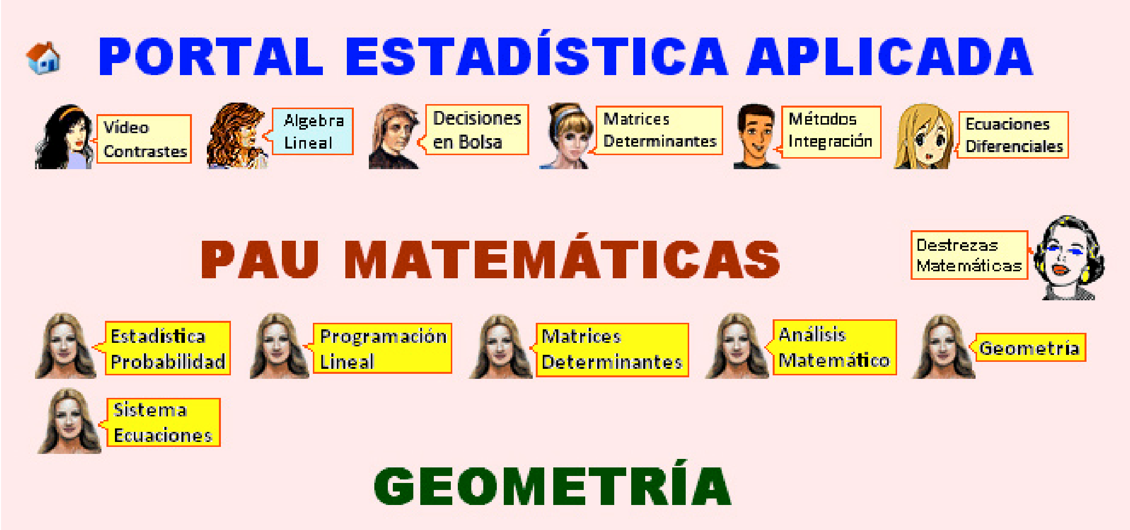


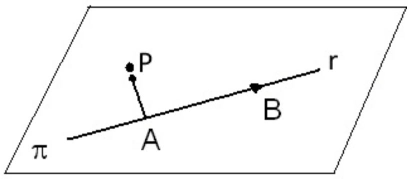
1. Dados la recta r: $\begin{cases} x-2y+z=0 \\ -x+2y+z=2 \end{cases}$ y el punto $P(1,\,0,\,1)$ exterior a r:

a) Hallar la ecuación en forma general del plano π que contiene a r y a P

b) Hallar la ecuación (como intersección de dos planos) de la recta s que pasa por P y es paralela a la recta r

Solución:

a) Dos puntos de la recta r: $\begin{cases} x-2y+z=0 \\ -x+2y+z=2 \end{cases}$



$$y=0\ \begin{cases} x+z=0 \\ -x+z=2 \end{cases} \mapsto \quad z=1 \quad , \quad x=-1 \quad \Rightarrow \quad A(-1,\,0,\,1)$$

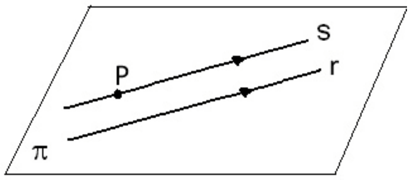
$$x=1\ \begin{cases} -2y+z=-1 \\ 2y+z=3 \end{cases} \mapsto \quad z=1 \quad , \quad y=1 \quad \Rightarrow \quad B(1,\,1,\,1)$$

Se tienen los vectores directores $\overrightarrow{AB}=(2,\,1,\,0)$ y $\overrightarrow{AP}=(2,\,0,\,0)$

La ecuación implicita del plano que pasa por el punto $P(1,\,0,\,1)$ con vectores $\overrightarrow{AB}=(2,\,1,\,0)$ y $\overrightarrow{AP}=(2,\,0,\,0)$ será:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & x-1 \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \pi \equiv z-1=0$$

b) s es paralela a r: $\vec{u}_s = \vec{u}_r = \overrightarrow{AB} = (2,\,1,\,0)$



$$s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{0}$$

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{0} \quad \mapsto \quad \begin{cases} \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1} \\ \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{z-1}{0} \end{cases} \quad \mapsto \quad s \equiv \begin{cases} x-2y-1=0 \\ z-1=0 \end{cases}$$

2. Dada la recta r: $\begin{cases} x-2y+z=0 \\ x-z=0 \end{cases}$ y los puntos $P(1,\,-2,\,0)$ y $Q(0,\,1,\,3)$:

a) Hallar la ecuación del plano π que contiene a r y es paralelo a PQ

b) Hallar la ecuación de la recta s perpendicular a r que pasa por Q e interseca a r

Solución:

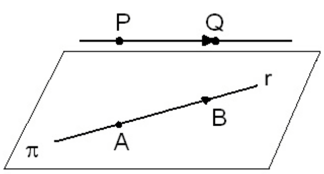
a) Las ecuaciones paramétricas de la recta r: $\begin{cases} x-2y+z=0 \\ x-z=0 \end{cases}$

$$z=0 \ \begin{cases} x-2y=0 \\ x=0 \end{cases} \quad \mapsto \quad x=0 \ , \quad y=0 \quad \Rightarrow \quad A(0,\,0,\,0)$$

$$y=1 \ \begin{cases} x+z=2 \\ x-z=0 \end{cases} \quad \mapsto \quad x=1 \ , \quad z=1 \quad \Rightarrow \quad B(1,\,1,\,1)$$

Las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $A(0,\,0,\,0)$ con vector director $\overrightarrow{AB} = (1,\,1,\,1)$:

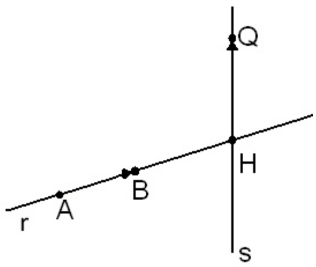
$$r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$$



La ecuación implicita del plano que pasa por el punto $A(0,\,0,\,0)$ con vectores $\overrightarrow{AB}=(1,\,1,\,1)$ y $\overrightarrow{PQ}=(-1,\,3,\,3)$ será:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & x \\ 1 & 3 & y \\ 1 & 3 & z \end{vmatrix}=0 \;\Rightarrow\; \pi\equiv -y+z=0$$

b) Sea $H=r\cap s$



Como $H\in r$ se tiene $(x,\,y,\,z)=(\mu,\,\mu,\,\mu)$

$\overrightarrow{HQ}=(-\mu,\,1-\mu,\,3-\mu)$

Siendo $r\perp s \;\mapsto\; \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{HQ} \;\mapsto\; (1,\,1,\,1)\bullet(-\mu,\,1-\mu,\,3-\mu)=0$

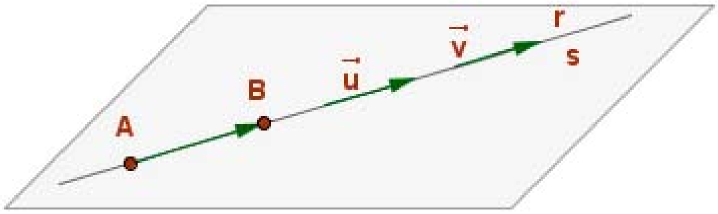
$\mu=\dfrac{4}{3}$ entonces $\overrightarrow{HQ}=\left(-\dfrac{4}{3},\,1-\dfrac{4}{3},\,3-\dfrac{4}{3}\right)=\left(-\dfrac{4}{3},\,-\dfrac{1}{3},\,\dfrac{5}{3}\right)$

Las ecuaciones paramétricas de la recta s que pasa por el punto $Q(0,\,1,\,3)$ con vector director $\overrightarrow{HQ}=\left(-\dfrac{4}{3},\,-\dfrac{1}{3},\,\dfrac{5}{3}\right)$, o bien, $\vec{v}_s=(-4,\;-1,\;5)$, serán:

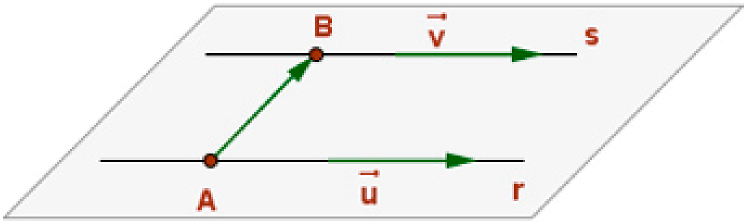
$$s\equiv\begin{cases} x=-4\mu \\ y=1-\mu \\ z=3+5\mu \end{cases}$$

Dos rectas en la aldea ...

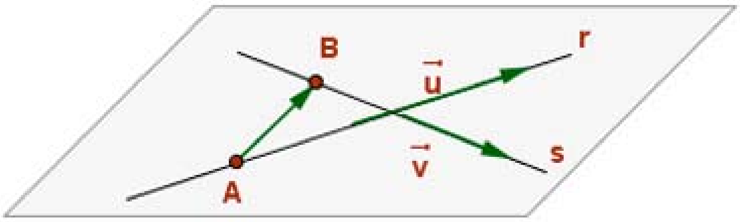
- $\text{rango}(\vec{u},\vec{v})=\text{rango}(\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{AB})=1 \;\mapsto$ Coincidentes
- $\text{rango}(\vec{u},\vec{v})=1<\text{rango}(\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{AB})=2 \;\mapsto$ Paralelas
- $\text{rango}(\vec{u},\vec{v})=2=\text{rango}(\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{AB}) \;\mapsto$ Secantes
- $\text{rango}(\vec{u},\vec{v})=2<\text{rango}(\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{AB})=3 \;\mapsto$ Se cruzan



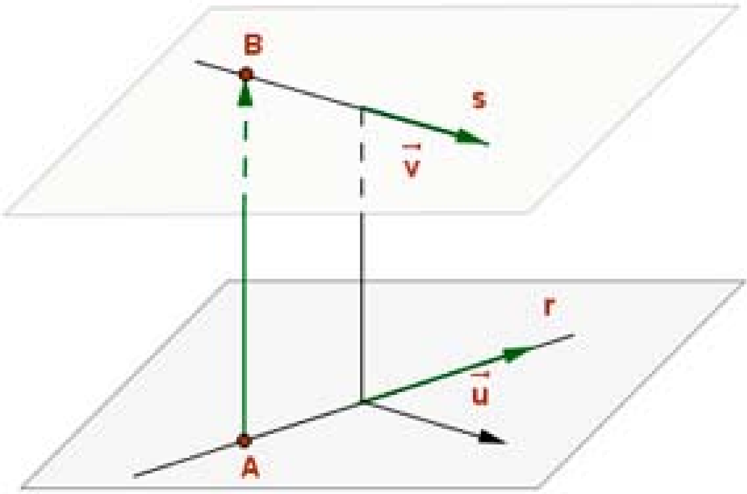
$\text{rango}(\vec{u}, \vec{v}) = \text{rango}(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB}) = 1 \mapsto$ Coincidentes



$\text{rango}(\vec{u}, \vec{v}) = 1 < \text{rango}(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB}) = 2 \mapsto$ Paralelas



$\text{rango}(\vec{u}, \vec{v}) = 2 = \text{rango}(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB}) \mapsto$ Secantes



$\text{rango}(\vec{u}, \vec{v}) = 2 < \text{rango}(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB}) = 3 \mapsto$ Se cruzan

3. Encuentra un valor de $a \neq 0$ para que las rectas:

$$\begin{cases} x+y-5z=-3 \\ -2x+z=1 \end{cases} \quad \text{y} \quad x+1=\frac{y-3}{a}=\frac{z}{2}$$

sean paralelas. Para el valor de a que has encontrado, calcula la ecuación del plano que contiene a ambas rectas.

Solución:

a) Las ecuaciones paramétricas de la recta r: $\begin{cases} x+y-5z=-3 \\ -2x+z=1 \end{cases}$

$$z=1 \begin{cases} x+y=2 \\ -2x=0 \end{cases} \mapsto \quad x=0 \quad , \quad y=2 \quad \Rightarrow \quad A(0,\, 2,\, 1)$$

$$x=1 \begin{cases} y-5z=-4 \\ z=3 \end{cases} \mapsto \quad z=3 \quad , \quad y=11 \quad \Rightarrow \quad B(1,\, 11, 3)$$

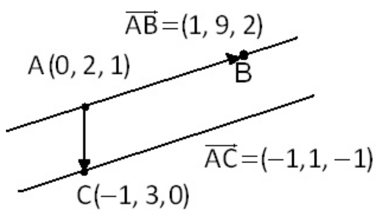
Las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por el punto

$A(0,\, 2,\, 1)$ con vector director $\overrightarrow{AB}=(1,\, 9,\, 2)$: $r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=2+9\lambda \\ z=1+2\lambda \end{cases}$

$$s \equiv \; x+1=\frac{y-3}{a}=\frac{z}{2} \quad \mapsto \quad \begin{cases} C(-1,\, 3, 0) \\ \vec{v}_s=(1,\, a,\, 2) \end{cases}$$

Como $r \,||\, s \quad \mapsto$ Los vectores $\overrightarrow{AB}=(1,\, 9,\, 2)$ y $\vec{v}_s=(1,\, a,\, 2)$ son proporcionales: $\frac{1}{1}=\frac{9}{a}=\frac{2}{2} \quad \Rightarrow \quad a=9$

La ecuación implicita del plano que pasa por el punto $A(0,\, 2,\, 1)$ con vectores $\overrightarrow{AB}=(1,\, 9,\, 2)$ y $\overrightarrow{AC}=(-1,\, 1,\, -1)$ será:



$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & x \\ 9 & 1 & y-2 \\ 2 & -1 & z-1 \end{vmatrix}=0 \quad \Rightarrow \quad \pi \equiv 11x+y-10z+8=0$$

4. Dada la recta r definida por: $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{1}$

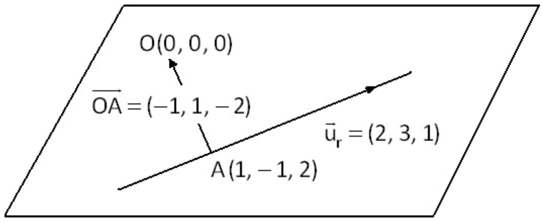
a) Halla la ecuación del plano que pasa por el origen y contiene a r.

b) Halla la ecuación del plano que pasa por el origen y es perpencicular a r.

Solución:

a) r: $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{1}$

$A(1,-1,2)$, $\vec{u}_r=(2,3,1)$



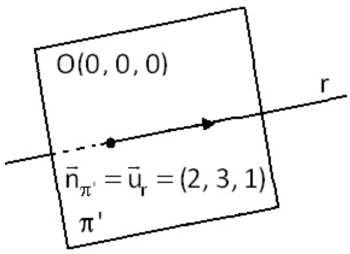
La ecuación implicita del plano que pasa por el punto $O(0,0,0)$ con vectores directores $\overrightarrow{AO}=(-1,1,-2)$ y $\vec{u}_r=(2,3,1)$ será:

$$\pi\equiv\begin{vmatrix}-1 & 2 & x\\ 1 & 3 & y\\ -2 & 1 & z\end{vmatrix}=0 \quad\Rightarrow\quad \pi\equiv -7x+3y+5z=0$$

b) Si $r\perp\pi' \mapsto \vec{n}_{\pi'}=\vec{u}_r=(2,3,1)$

La ecuación implicita del plano π' será: $2x+3y+z+D=0$

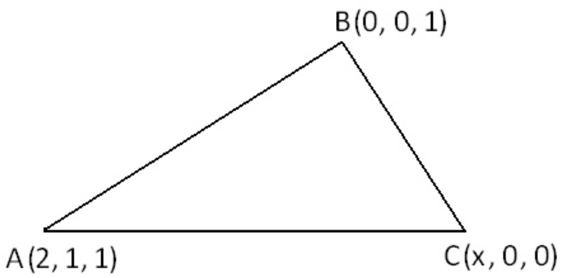
Como $O(0,0,0)$ es un punto del plano π', sustituyendo: $D=0$



La ecuación implicita del plano $\pi'\equiv\ 2x+3y+z=0$

5. Dados los puntos $A(2, 1, 1)$ y $B(0, 0, 1)$, halla los puntos C en el eje OX tales que el área del triángulo de vértices A, B y C es 2.

Solución:



$$A = \frac{\left|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}\right|}{2} = 2$$

$$\overrightarrow{AC} = (x-2, -1, -1)$$

$$\overrightarrow{AB} = (-2, -1, 0)$$

$$\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x-2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{i} + 2\vec{j} - x\vec{k} \equiv (-1, 2, -x)$$

$$\left|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-x)^2} = \sqrt{5 + x^2}$$

$$A = \frac{\left|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}\right|}{2} = \frac{\sqrt{5+x^2}}{2} = 2 \quad \mapsto \quad \sqrt{5+x^2} = 4$$

$$5 + x^2 = 16 \quad \mapsto \quad x = \pm\sqrt{11}$$

Los puntos pedidos son: $(-\sqrt{11}, 0, 0)$ y $(\sqrt{11}, 0, 0)$

6. Considera las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x + y - z - 4 = 0 \\ x + 2y - 7 = 0 \end{cases} \qquad y \qquad s \equiv \begin{cases} x - 2 = 0 \\ y + 5 = 0 \end{cases}$$

a) Estudia la posición relativa de r y s

b) Halla un punto P de r y otro punto Q de s tales que el vector $\overrightarrow{PQ}$ sea perpendicular a ambas.

c) ¿Cuántos cuadrados se pueden construir teniendo un vértice en el punto P y un lado en la recta s?. Calcula su área.

Solución:

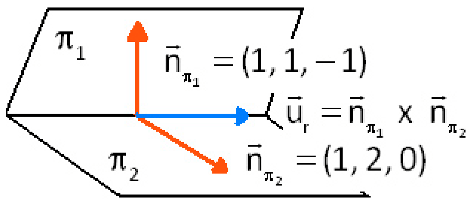
a) Dos puntos y un vector director de la recta r son:

$$z=0\begin{cases}x+y=4\\x+2y=7\end{cases}\mapsto\quad y=3\ ,\ x=1\qquad A(1,3,0)$$

$$y=0\begin{cases}x-z=4\\x=7\end{cases}\mapsto\quad x=7\ ,\ z=3\qquad B(7,0,3)$$

$$\overrightarrow{AB}=(6,-3,3)\approx\vec{u}_r=(2,-1,1)$$

⊙ Adviértase que también se podría haber calculado un vector director de la recta r de la siguiente forma:



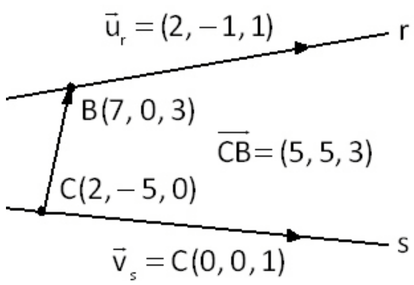
$$r\equiv\begin{cases}x+y-z-4=0\\x+2y-7=0\end{cases}$$

$$r\equiv\begin{cases}x+y-z-4=0\\x+2y-7=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\vec{n}_{\pi_1}=(1,1,-1)\\\vec{n}_{\pi_2}=(1,2,0)\end{cases}\mapsto\quad\vec{u}_r=\vec{n}_{\pi_1}\times\vec{n}_{\pi_2}$$

$$\vec{u}_r=\vec{n}_{\pi_1}\times\vec{n}_{\pi_2}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&1&-1\\1&2&0\end{vmatrix}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}\equiv(2,-1,1)$$

Las ecuaciones paramétricas de la recta $s\equiv\begin{cases}x-2=0\\y+5=0\end{cases}$ son:

$$s\equiv\begin{cases}x=2\\y=-5\\z=\lambda\end{cases}\mapsto\quad C(2,-5,0)\quad,\quad\vec{v}_s=C(0,0,1)$$



Se tienen los vectores:

$\vec{u}_r=(2,-1,1)$

$\vec{v}_s=C(0,0,1)$

$\overrightarrow{CB}=C(5,5,3)$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -15 \neq 0 \quad \Rightarrow$$ Los vectores son linealmente independientes

Las rectas se cruzan.

b) Los puntos de las recta r y s tienen la forma:

$$r \equiv \begin{cases} x = 7 + 2\mu \\ y = -\mu \\ z = 3 + \mu \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y = -5 \\ z = \lambda \end{cases}$$

$P(7+2\mu, -\mu, 3+\mu) \quad Q(2, -5, \lambda) \quad \overrightarrow{PQ} = (-5-2\mu, -5+\mu, \lambda-3-\mu)$

• Si $\overrightarrow{PQ} \perp r \Rightarrow \overrightarrow{PQ} \,.\, \vec{u}_r \Rightarrow (-5-2\mu, -5+\mu, \lambda-3-\mu) \,.\, (2, -1, 1) = 0$

$$2(-5-2\mu) - (-5+\mu) + (\lambda-3-\mu) = 0 \quad \mapsto \quad \lambda - 6\mu - 8 = 0 \quad (1)$$

• Si $\overrightarrow{PQ} \perp s \Rightarrow \overrightarrow{PQ} \,.\, \vec{u}_s \Rightarrow (-5-2\mu, -5+\mu, \lambda-3-\mu) \,.\, (0, 0, 1) = 0$

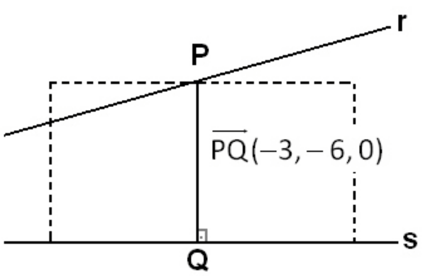
$$0(-5-2\mu) + 0(-5+\mu) + (\lambda-3-\mu) = 0 \quad \mapsto \quad \lambda - 3 - \mu = 0 \quad (2)$$

Resolviendo el sistema (1) y (2): $\begin{cases} \lambda - 6\mu = 8 \\ \lambda - \mu = 3 \end{cases} \mapsto \begin{matrix} \mu = -1 \\ \lambda = 2 \end{matrix}$

Sustituyendo en $P(7+2\mu, -\mu, 3+\mu)$ y $Q(2, -5, \lambda)$:

$P(5, 1, 2)$ y $Q(2, -5, 2)$ y $\overrightarrow{PQ}(-3, -6, 0)$

c) Se pueden construir dos cuadrados que tengan un vértice en P y un lado en la recta s.



La longitud de los cuadrados es $|\overrightarrow{PQ}|$

$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{9+36} = \sqrt{45}$

$A_{cuadrado} = |\overrightarrow{PQ}|^2 = 45\, u^2$

7. a) Prueba que si dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen el mismo módulo, entonces los vectores $\overrightarrow{u+v}$ y $\overrightarrow{u-v}$ son ortogonales.

b) Considera los vectores $\vec{x}=(-1,2,3)$ e $\vec{y}=(2,3,-1)$

1) Son linealmente independientes los vectores $\overrightarrow{x+y}$ y $\overrightarrow{x-y}$

2) Calcula el área del paralelogramo que tiene tres vértices consecutivos en los puntos $(1,5,2)$, $(0,0,0)$ y $(-3,-1,4)$

Solución:

a) $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$, $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$, $|\vec{u}|=|\vec{v}|$

$\overrightarrow{u+v}=(u_1+v_1,u_2+v_2,u_3+v_3)$

$\overrightarrow{u-v}=(u_1-v_1,u_2-v_2,u_3-v_3)$

Si $\overrightarrow{u+v}\perp\overrightarrow{u-v} \Rightarrow (\overrightarrow{u+v}).(\overrightarrow{u-v})=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (u_1+v_1,u_2+v_2,u_3+v_3).(u_1-v_1,u_2-v_2,u_3-v_3)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (u_1+v_1).(u_1-v_1)+(u_2+v_2).(u_2-v_2)+(u_3+v_3).(u_3-v_3)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow u_1^2-v_1^2+u_2^2-v_2^2+u_3^2-v_3^2=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (u_1^2+u_2^2+u_3^2)-(v_1^2+v_2^2+v_3^2)=0 \Rightarrow |\vec{u}|^2-|\vec{v}|^2=0$ pues $|\vec{u}|=|\vec{v}|$

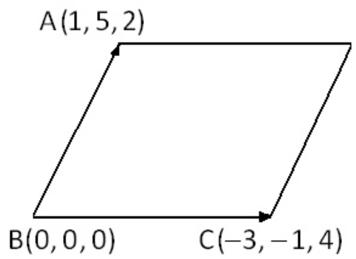
b) 1) $\vec{x}=(-1,2,3)$, $\vec{y}=(2,3,-1)$

$\overrightarrow{x+y}=(1,5,2)$, $\overrightarrow{x-y}=(-3,-1,4)$

$$\text{rango}\begin{pmatrix}1 & 5 & 2\\ -3 & -1 & 4\end{pmatrix}=2 \quad \text{ya que} \quad \begin{vmatrix}1 & 5\\ -3 & -1\end{vmatrix}\neq 0 \quad \mathbb{Z}$$

Por tanto, $\overrightarrow{x+y}$ e $\overrightarrow{x-y}$ son linealmente independientes.

c) $\overrightarrow{BA}=(1,5,2)$, $\overrightarrow{BC}=(-3,-1,4)$



$A_{Paralelogramo}=|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}|$

$$\overrightarrow{BA} \text{ x } \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 5 & 2 \\ -3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 22\,\vec{i} - 10\,\vec{j} + 14\,\vec{k} \equiv (22, -10, 14)$$

$$A_{Paralelogramo} = \left|\overrightarrow{BA} \text{ x } \overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{22^2 + (-10)^2 + 14^2} = \sqrt{780}\ u^2$$

8. Dados los vectores $\vec{u} = (a, b, 1)$, $\vec{v} = (-3, 4, 1)$ y $\vec{w} = (1, 2, c)$,
determina el valor de los parámetros $a, b, c \in \mathbb{R}$ de manera
que los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean perpendiculares y además
$\vec{u} \text{ x } \vec{w} = \vec{v}$, donde x denota el producto vectorial.
¿Qué ángulo forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en dicho caso?

Solución:

$\vec{u} = (a, b, 1)$, $\vec{v} = (-3, 4, 1)$, $\vec{w} = (1, 2, c)$

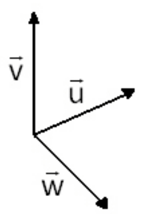
- Si $\vec{v} \perp \vec{w} \ \mapsto\ \vec{v}.\vec{w} = 0 \ \Rightarrow\ (-3, 4, 1) . (1, 2, c) = 0 \ \Rightarrow$

$$\Rightarrow\ -3 + 8 + c = 0 \ \Rightarrow\ c = -5$$

- $\vec{u} \text{ x } \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & 1 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} = (-5b - 2)\,\vec{i} + (5a + 1)\,\vec{j} + (2a - b)\,\vec{k}$

$\vec{u} \text{ x } \vec{v} = (-5b - 2, 5a + 1, 2a - b)$

$$\text{Si } \vec{u} \text{ x } \vec{w} = \vec{v} \ \Rightarrow\ \begin{cases} -5b - 2 = -3 \\ 5a + 1 = 4 \\ 2a - b = 1 \end{cases} \ \mapsto\ \begin{array}{l} b = 1/5 \\ a = 3/5 \end{array}$$



En este caso $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares:

$$\vec{u} . \vec{v} = \left(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}, 1\right) . (-3, 4, 1) = \frac{-9}{5} + \frac{4}{5} + 1 = 0$$

9. Dadas las rectas: $r \equiv \begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ z = -1 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y - z - 5 = 0 \end{cases}$

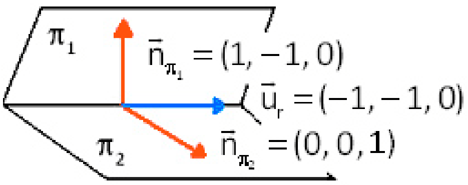
a) Determinar su posición relativa

b) En caso de cortarse, determinar el ángulo que forman y el punto de corte

Solución:

a) Un punto A y un vector director de $r \equiv \begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ z = -1 \end{cases}$

$$\vec{u}_r = \vec{n}_{\pi_1} \text{ x } \vec{n}_{\pi_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - \vec{j} \equiv \vec{u}_r = (-1, -1, 0)$$



$x = 0 \begin{cases} -y + 2 = 0 \\ z = -1 \end{cases}$ $\quad y = 2$

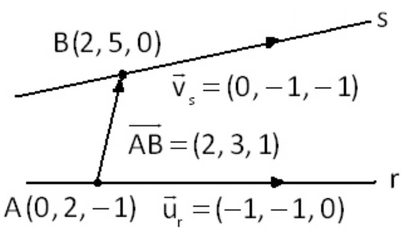
$A(0, 2, -1)$

Dos puntos B y C y un vector director de $s \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y - z - 5 = 0 \end{cases}$

$z = 0 \begin{cases} x = 2 \\ y - 5 = 0 \end{cases} \mapsto \quad y = 5 \quad B(2, 5, 0)$

$y = 0 \begin{cases} x = 2 \\ -z - 5 = 0 \end{cases} \mapsto \quad z = -5 \quad C(2, 0, -5)$

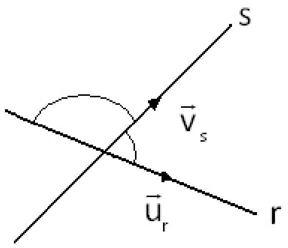
$\overrightarrow{BC} = (0, -5, -5) \mapsto \vec{v}_s = (0, -1, -1)$



Por otra parte, $\overrightarrow{AB} = (2, 3, 1)$

$$\left[\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{AB}\right] = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \ \Rightarrow$$ Los vectores son linealmente dependientes y $\vec{u}_r, \vec{v}_s$ no son proporcionales

Las rectas son secantes



$$\vec{u}_r \cdot \vec{v}_s = |\vec{u}_r||\vec{v}_s|\cos(\widehat{\vec{u}_r \vec{v}_s})$$

$$\vec{u}_r \cdot \vec{v}_s = (-1,-1,0).\,(0,-1,-1) = -1$$

$$|\vec{u}_r| = \sqrt{2} \ , \ \ |\vec{v}_s| = \sqrt{2}$$

$$\cos(\widehat{\vec{u}_r \vec{v}_s}) = \frac{\vec{u}_r \cdot \vec{v}_s}{|\vec{u}_r||\vec{v}_s|} = \frac{-1}{\sqrt{2}\,.\sqrt{2}} = -\frac{1}{2} \ \mapsto \ (\widehat{\vec{u}_r \vec{v}_s}) = 120^{\circ}$$

10. Resolver la siguiente ecuación vectorial: $\vec{x} \wedge (2,1,-1) = (1,3,5)$ sabiendo que $|\vec{x}| = \sqrt{6}$, donde el símbolo $\wedge$ significa producto vectorial.

Solución:

Si $\vec{x} = (a,b,c) \mapsto \ (a,b,c) \wedge (2,1,-1) = (1,3,5)$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & c \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -(b+c)\,\vec{i} + (a+2c)\,\vec{j} + (a-2b)\vec{k} = (1,3,5)$$

$$\begin{cases} -b-c=1 \\ a+2c=3 \\ a-2b=5 \end{cases} \mapsto \ \begin{array}{c}\text{sistema con} \\ \text{infinitas soluciones}\end{array} \ \mapsto \begin{cases} c = \dfrac{3-a}{2} \\ \\ b = \dfrac{a-5}{2} \end{cases}$$

La solución debe verificar $|\vec{x}| = \sqrt{a^2+b^2+c^2} = \sqrt{6}$

$a^2+b^2+c^2 = 6$ sustituyendo, queda:

$$a^2+\left(\frac{a-5}{2}\right)^2+\left(\frac{3-a}{2}\right)^2=6 \ \mapsto \ 3a^2-8a+5=0 \ \mapsto \ \begin{cases} a=1 \\ a=\dfrac{5}{3} \end{cases}$$

obteniéndose los resultados:

- $a=1,\ b=-2,\ c=1 \qquad \vec{x}_1=(1,-2,1)$
- $a=\dfrac{5}{3},\ b=-\dfrac{5}{3},\ c=\dfrac{2}{3} \qquad \vec{x}_2=\left(\dfrac{5}{3},-\dfrac{5}{3},\dfrac{2}{3}\right)$

11. Se consideran las rectas:

$$r\equiv \frac{x}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-3}{2} \quad \text{y} \quad s\equiv\frac{x-2}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-1}$$

a) Justificar razonadamente que ambas rectas se cruzan.

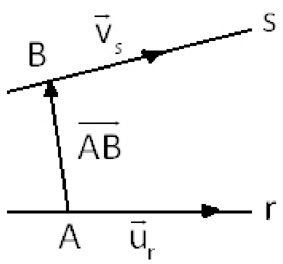
b) Hallar la perpendicular común y que corta a las dos rectas.

Solución:

a) Un punto y un vector director de cada recta:

$$r\equiv \frac{x}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-3}{2} \ \mapsto \ \vec{u}_r=(1,-2,2)\ ,\ A(0,1,3)$$

$$s\equiv\frac{x-2}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-1} \ \mapsto \ \vec{v}_s=(3,1,-1)\ ,\ B(2,0,-1)$$

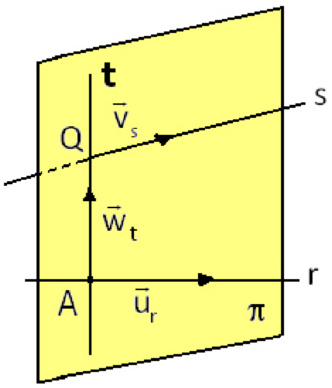


$$\overrightarrow{AB}=(2,-1,-4)$$

Si r y s se cruzan, los vectores $\vec{u}_r, \vec{v}_s$ y $\overrightarrow{AB}$ serán linealmente independientes, en consecuencia, su determinante debería ser distinto de cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \end{vmatrix} = -35 \neq 0 \quad \mapsto \quad \text{r y r se cruzan}$$

b) Denotando por t a la perpendicular común.



$$\vec{w}_t = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 7\,\vec{j} + 7\,\vec{k}$$

$$\vec{w}_t = (0,7,7) \approx \vec{w}_t = (0,1,1)$$

El plano π que contiene a $\vec{w}_t$ y a la recta r: $\vec{u}_r = (1,-2,2)$, $A(0,1,3)$:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ 1 & -2 & y-1 \\ 1 & 2 & z-3 \end{vmatrix} = 0 \quad \mapsto \quad \pi \equiv 4x + y - z + 2 = 0$$

Un punto Q de la recta **t** será $Q = \pi \cap s$, se halla sustituyendo las ecuaciones paramétricas de la recta s en π:

$$s \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1} \quad \mapsto \quad \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$$

$$\pi \equiv 4x + y - z + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \pi \equiv 4(2+3\lambda) + \lambda - (-1-\lambda) + 2 = 0$$

$$14\lambda + 11 = 0 \quad \mapsto \quad \lambda = \frac{-11}{14}$$

$$Q\left(2 - \frac{33}{14}, -\frac{11}{14}, -1 + \frac{11}{14}\right) \equiv Q\left(\frac{-5}{14}, \frac{-11}{14}, \frac{-3}{14}\right)$$

La ecuación de la recta **t** perpendicular a las rectas r y s, con el vector director $\vec{w}_t = (0,1,1)$ y el punto $Q\left(\frac{-5}{14}, \frac{-11}{14}, \frac{-3}{14}\right)$, será:

$$t \equiv \begin{cases} x = \dfrac{-5}{14} \\ y = \dfrac{-11}{14} + \lambda \\ z = \dfrac{-3}{14} - \lambda \end{cases}$$

12. Dados el plano $\pi:\ x - y + 2z - 5 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 10 \end{cases}$

a) Calcula el punto de intersección entre el plano y la recta.

b) Encuentra la ecuación continua de la recta s contenida en el plano π, que es perpendicular a r y corta a la recta r.

Solución:

a) $r \equiv \begin{cases} x + y + z = 0 & \mapsto & \vec{n}_{\pi_1} = (1,1,1) \\ 2x - y + z = 10 & \mapsto & \vec{n}_{\pi_2} = (2,-1,1) \end{cases}$

$$\vec{u}_r = \vec{n}_{\pi_1} \text{ x } \vec{n}_{\pi_2} = (1,1,1) \text{ x } (2,-1,-1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2,1,-3)$$

para $x = 0$ $\begin{cases} y + z = 0 \\ -y + z = 10 \end{cases} \mapsto z = 5 \ ,\ y = -5 \quad A(0,-5,5)$

Las ecuaciones paramétricas de $r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -5 + \lambda \\ z = 5 - 3\lambda \end{cases}$

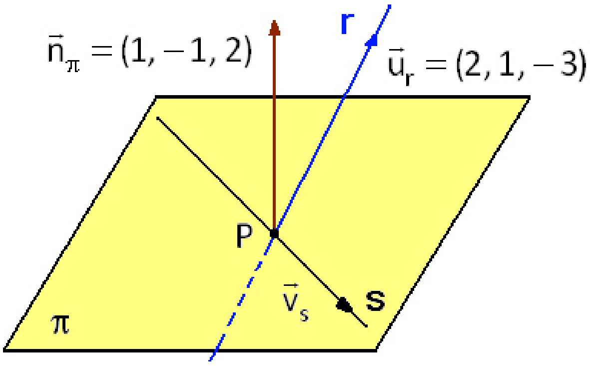
Para hallar un punto $P = r \cap \pi$ se sustituyen las ecuaciones paramétricas de la recta r en el plano π

$$\pi:\ x - y + 2z - 5 = 0 \quad \mapsto \quad 2\lambda - (-5 + \lambda) + 2(5 - 3\lambda) - 5 = 0$$

$-5\lambda+10=0 \quad \mapsto \quad \lambda=2$ y el punto $P(4,-3,-1)$

b) $\begin{cases} s\subset\pi & \mapsto \quad \vec{v}_s \perp \vec{n}_\pi \\ s\perp r & \mapsto \quad \vec{v}_s \perp \vec{u}_r \end{cases}$

Como $s\subset\pi$ y s corta a r, el punto $P\in s$



$$\vec{v}_s=\vec{u}_r \times \vec{n}_\pi=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=(-1,-7,-3)$$

La ecuación continua de s: $s\equiv\dfrac{x-4}{-1}=\dfrac{y+3}{-7}=\dfrac{z+1}{-3}$

13. Un plano π determina sobre la parte positiva de los ejes OX, OY y OZ tres segmentos de longitudes 2, 3 y 4 m, respectivamente.

a) Halle la ecuación del plano π.

b) Halle la ecuación de la recta r que contiene a los puntos $A(2,0,3)$ y $B(0,6,a)$ y estudie la posición relativa de π y r según los valores de a.

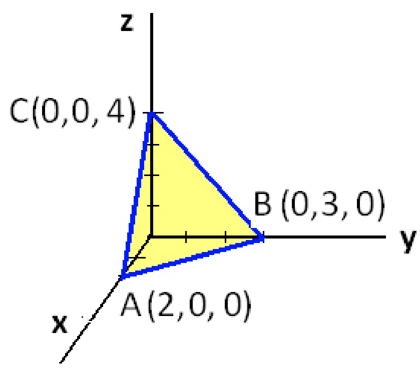
c) Para el caso $a=2$, halle el punto donde se cortan π y r.

Solución:

a) El plano π pasa por los puntos $A(2,0,0)$, $B(0,3,0)$ y $C(0,0,4)$

$\overrightarrow{AB}=(-2,3,0)$

$\overrightarrow{AC}=(-2,0,4)$



El plano π se halla con $A(2,0,0)$, $\overrightarrow{AB}=(-2,3,0)$ y $\overrightarrow{AC}=(-2,0,4)$:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} -2 & -2 & x-2 \\ 3 & 0 & y \\ 0 & 4 & z \end{vmatrix} = 0 \quad \mapsto \quad \pi \equiv 6x + 4y + 3z - 12 = 0$$

b) La ecuación paramétrica de la recta r que pasa por los puntos $A(2,0,3)$, $B(0,\ 6,\ a)$, con $\overrightarrow{AB} = (-2,\ 6,\ a-3)$ será:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 - 2\lambda \\ y = 6\lambda \\ z = 3 + (a-3)\lambda \end{cases}$$

Para hallar la posición relativa de r y π, se sustituyen las ecuaciones de r en el plano π:

$$\pi \equiv 6x + 4y + 3z - 12 = 0 \quad \mapsto$$

$$6(2-2\lambda) + 4\,(6\lambda) + 3\big[3 + (a-3)\lambda\big] - 12 = 0 \quad \mapsto \quad 3\lambda + 3a\lambda = -9$$

$$\lambda = \frac{-9}{3+3a} \equiv \begin{cases} \text{Si } \ a = -1 \text{ no existe valor de } \lambda \ \mapsto \ r \parallel \pi \\ \text{Si } \ a \neq -1 \ \mapsto \ r \ \text{ y } \ \pi \ \text{ se cortan} \end{cases}$$

c) Si $a = 2 \quad \mapsto \quad \lambda = \dfrac{-9}{3 + 3\,.\,2} = -1$

sustituyendo los valores $a = 2$ y $\lambda = -1$ en la recta r:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + 2 \\ y = -6 \\ z = 3 + 1 \end{cases} \qquad \text{se cortan en } P(4, -6,\ 4)$$

14. Dados los puntos $P_1(1,3,-1)$, $P_2(a,2,0)$, $P_3(1,5,4)$ y $P_4(2,0,2)$, se pide:

a) Hallar el valor de a para que los cuatro puntos estén en el mismo plano.

b) Hallar los valores de a para que el tetraedro con vértices en P_1, P_2, P_3, P_4 tenga volumen igual a 7.

c) Hallar la ecuación del plano cuyos puntos equidisten de P_1 y de P_3.

Solución:

a) Sean los puntos $P_1(1,3,-1)$, $P_2(a,2,0)$, $P_3(1,5,4)$ y $P_4(2,0,2)$

La ecuación del plano π que pasa por P_1, P_3 y P_4 con $\overrightarrow{P_1P_3}=(0,2,5)$, $\overrightarrow{P_1P_4}=(1,-3,3)$ y $P_4(2,0,2)$:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} 0 & 1 & x-2 \\ 2 & -3 & y \\ 5 & 3 & z-2 \end{vmatrix} = 0 \quad \mapsto \quad \pi \equiv 21x+5y-2z-38=0$$

Ahora se impone la condición que $P_2(a,2,0)$ verifique la ecuación:

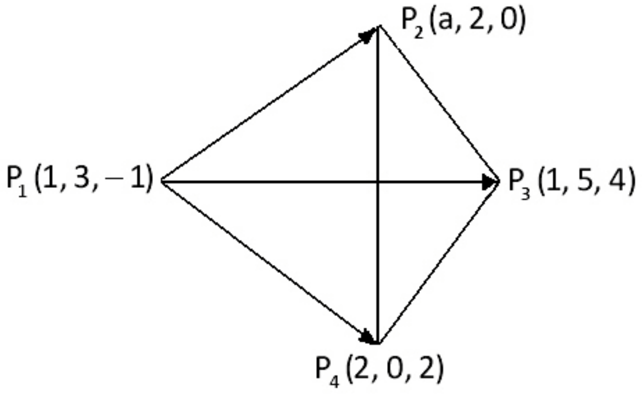
$$21.a+5.2-2.0-38=0 \quad \mapsto \quad 21a=28 \quad \mapsto \quad a=\frac{28}{21}=\frac{4}{3}$$

b)

$\overrightarrow{P_1P_2}=(a-1,-1,1)$

$\overrightarrow{P_1P_3}=(0,2,5)$

$\overrightarrow{P_1P_4}=(1,-3,3)$

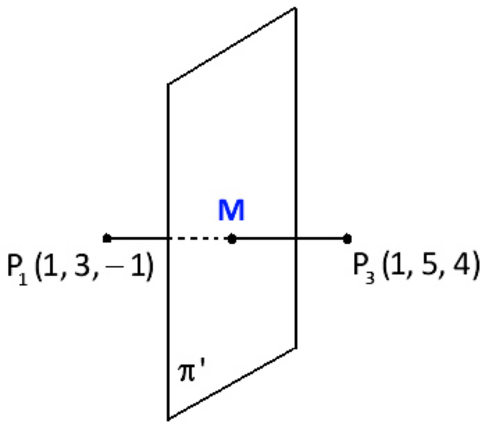


$$V_{\text{Tetraedro}}=\frac{1}{6}\left|\det\left(\overrightarrow{P_1P_2},\ \overrightarrow{P_1P_3},\ \overrightarrow{P_1P_4}\right)\right|=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} a-1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix}\right|=7 \quad \mapsto$$

$$\mapsto \quad 21a-28=42 \quad \mapsto \quad a=\frac{70}{21}=\frac{10}{3}$$

c) Si π' equidista de P_1 y de P_3, entonces M, el punto medio de $\overrightarrow{P_1P_3}$, pertenece a π':

$$M = \frac{P_1 + P_3}{2} = \left(1,\ 4,\ \frac{3}{2}\right)$$



El plano π' es perpendicular a $\overrightarrow{P_1P_3}$, en consecuencia, $\vec{n}_{\pi'} = \overrightarrow{P_1P_3} = (0,2,5)$

La ecuación del plano π' es de la forma: $2y + 5z + D = 0$

Como $M\left(1,\ 4,\ \frac{3}{2}\right) \in \pi'$ tiene que verificar la ecuación del plano:

$$2.4 + 5.\frac{3}{2} + D = 0 \quad \mapsto \quad D = \frac{-31}{2} \quad \Rightarrow \quad \pi' \equiv 2y + 5z - \frac{31}{2} = 0$$

$$\pi' \equiv 4y + 10z - 31 = 0$$

15. Dados el plano $\pi:\ x + y - z - 1 = 0$ y la recta $r: \begin{cases} 3x + y + z - 6 = 0 \\ 2x + y - 2 = 0 \end{cases}$

a) Estudia la posición relativa de r y π. Calcula la distancia de r a π

b) Calcula la ecuación general o implícita del plano que contiene a r y es perpendicular a π.

Solución:

a) $\pi:\ x + y - z - 1 = 0$

$$r: \begin{cases} 3x + y + z - 6 = 0 & \mapsto \quad \vec{n}_{\pi_1} = (3,1,1) \\ 2x + y - 2 = 0 & \mapsto \quad \vec{n}_{\pi_2} = (2,1,0) \end{cases}$$

$$r: \begin{cases} 3x + y + z - 6 = 0 & \mapsto \quad \vec{n}_{\pi_1} = (3,1,1) \\ 2x + y - 2 = 0 & \mapsto \quad \vec{n}_{\pi_2} = (2,1,0) \end{cases}$$

$$\vec{u}_r = \vec{n}_{\pi_1} \times \vec{n}_{\pi_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, 2, 1)$$

Un punto de r, por ejemplo, si $y = 0$:

$$y = 0 \begin{cases} 3x + z - 6 = 0 \\ 2x - 2 = 0 \end{cases} \mapsto \quad x = 1 \ , \ z = 3 \quad A(1, 0, 3)$$

Ecuaciones paramétricas de $r \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$

Para hallar la posición relativa de r y π, se sustituyen las ecuaciones paramétricas de r en el plano π:

$$\pi: \ (1-\lambda) + 2\lambda - (3+\lambda) - 1 = 0 \quad \mapsto \quad -3 \neq 0$$

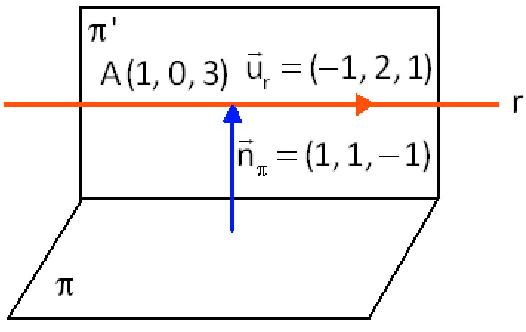
Como la ecuación no tiene solución, r y π no tienen puntos comunes. En consecuencia, $r \parallel \pi$

La distancia entre r y π, con $A(1, 0, 3)$ y $\pi: \ x + y - z - 1 = 0$, es:

$$\text{dist}(r, \pi) = \text{dist}(A, \pi) = \frac{|1.1 + 1.0 - 1.3 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \ u$$

c) Como $\pi' \perp \pi \quad \mapsto \quad \vec{n}_\pi \parallel \pi'$

π' se determina con A, $\vec{u}_r$ y $\vec{n}_\pi$



$$\pi' \equiv \begin{vmatrix} -1 & 1 & x-1 \\ 2 & 1 & y \\ 1 & -1 & z-3 \end{vmatrix} = 0 \quad \mapsto \quad \pi' \equiv x + z - 4 = 0$$

16. a) Calcula las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular al plano π determinado por los puntos $A(1,\ 0,\ 2)$, $B(2,\ 1,\ 3)$ y $C(3,\ 0,\ 0)$

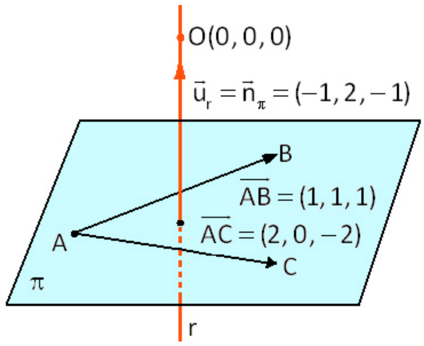
b) Calcula los posibles valores de a para que el punto $P(a,\ a,\ a)$ equidiste de la recta r y del plano π del apartado anterior.

Solución:

a) $A(1,\ 0,\ 2)$, $B(2,\ 1,\ 3)$, $C(3,\ 0,\ 0)$ $\mapsto$ $\overrightarrow{AB}=(1,1,1)$, $\overrightarrow{AC}=(2,0,-2)$

$$\vec{n}_\pi=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & -2\end{vmatrix}=(-2,4,-2)$$

$$\vec{n}_\pi=(-1,2,-1)$$

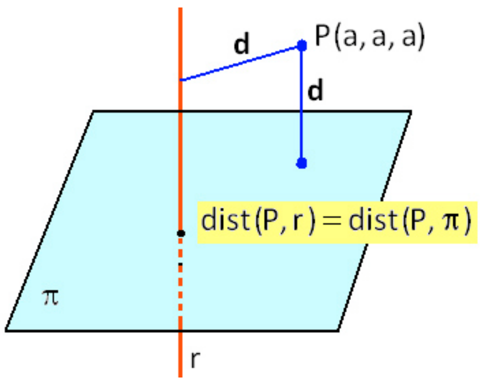


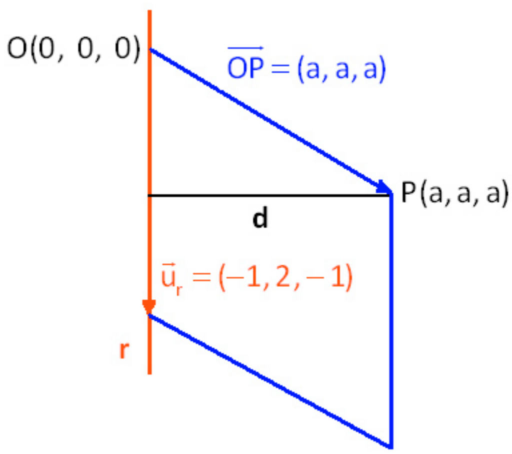
Como $r\perp\pi$ $\mapsto$ $\vec{u}_r=\vec{n}_\pi=(-1,2,-1)$

Las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por $O(0,\ 0,\ 0)$ con vector director $\vec{u}_r=(-1,2,-1)$:

$$r\equiv\begin{cases}x=-\lambda\\ y=2\lambda\\ z=-\lambda\end{cases}$$

b)





• La distancia del punto P a la recta r:

$$\text{Area}_{\text{paralelogramo}} = \left|\vec{u}_r \text{ x } \overrightarrow{OP}\right| = \left|\vec{u}_r\right| . d \quad \mapsto \quad d = \text{dist}(P, r) = \frac{\left|\vec{u}_r \text{ x } \overrightarrow{OP}\right|}{\left|\vec{u}_r\right|}$$

$$\vec{u}_r \text{ x } \overrightarrow{OP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & -1 \\ a & a & a \end{vmatrix} = (3a, 0, -3a)$$

$$\left|\vec{u}_r \text{ x } \overrightarrow{OP}\right| = \sqrt{9a^2 + 9a^2} = 3a\sqrt{2} \qquad \left|\vec{u}_r\right| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

$$d = \text{dist}(P, r) = \frac{\left|\vec{u}_r \text{ x } \overrightarrow{OP}\right|}{\left|\vec{u}_r\right|} = \frac{3a\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = a\sqrt{3}$$

Para calcular la ecuación del plano π se toma el punto $C(3, 0, 0)$ y los vectores $\overrightarrow{AB} = (1, 1, 1)$ y $\overrightarrow{AC} = (2, 0, -2)$

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} 1 & 2 & x-3 \\ 1 & 0 & y \\ 1 & -2 & z \end{vmatrix} = 0 \quad \mapsto \quad \pi \equiv x - 2y + z - 3 = 0$$

- La distancia del punto P al plano π:

$$\text{dist}(P, \pi) = \frac{\left|1.a - 2.a + 1.a - 3\right|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

- $\text{dist}(P, \pi) = \text{dist}(P, r) \Rightarrow \dfrac{\sqrt{6}}{2} = a\sqrt{3} \mapsto a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

17. Dado el punto $P(1,\ 1,\ 1)$ y el plano $\pi:\ x-y+z=5$

a) Calcula las ecuaciones continuas de la recta perpendicular al plano π que pasa por el punto P.

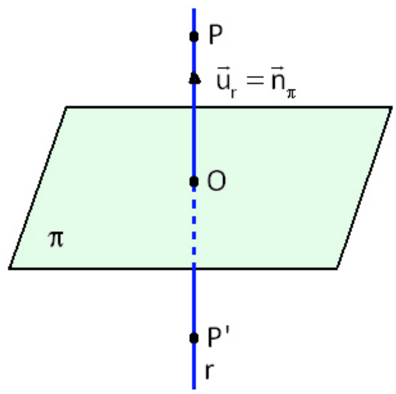
b) Calcula el punto simétrico de P respecto del plano π.

Solución:

a) $P(1,\ 1,\ 1)$, $\pi:\ x-y+z=5$

$r\perp\pi \mapsto \vec{u}_r=\vec{n}_\pi=(1,\ -1,\ 1)$

$$r\equiv \frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{1}$$



b) El punto $O=r\cap\pi$ se calcula sustituyendo las ecuaciones paramétricas de r en la ecuación del plano.

$$r\equiv\begin{cases}x=1+\lambda\\ y=1-\lambda\\ z=1+\lambda\end{cases} \qquad \begin{array}{l}\pi:\ x-y+z=5\\ \quad(1+\lambda)-(1-\lambda)+(1+\lambda)=5\end{array}$$

$$3\lambda=4 \mapsto \lambda=\frac{4}{3} \mapsto O\left(\frac{7}{3},-\frac{1}{3},\frac{7}{3}\right)$$

$$O=\frac{P+P'}{2} \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{7}{3} & \mapsto \quad x=\dfrac{11}{3}\\ \dfrac{y+1}{2}=\dfrac{-1}{3} & \mapsto \quad y=\dfrac{-5}{3}\\ \dfrac{z+1}{2}=\dfrac{7}{3} & \mapsto \quad z=\dfrac{11}{3}\end{cases}$$

El punto simétrico de P respecto de π es $P'\left(\frac{11}{3},\frac{-5}{3},\frac{11}{3}\right)$

18. Dado el punto $P(1,\ 1,\ 3)$ y la recta

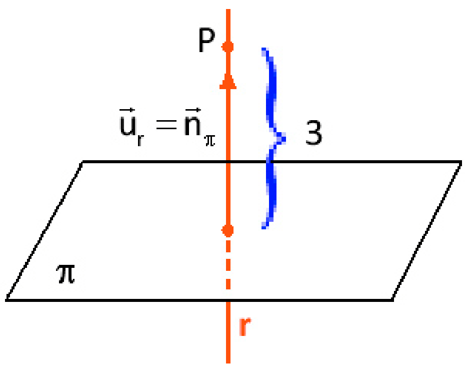
$$r \equiv \begin{cases} 2x - y - 2z + 3 = 0 \\ x - y + 4 = 0 \end{cases}$$

encuentre la ecuación general del plano π que es perpendicular a la recta r y que cumple $\text{dist}(P, \pi) = 3$

Solución:

$$\text{a) } P(1,\ 1,\ 3)\ ,\quad r \equiv \begin{cases} 2x - y - 2z + 3 = 0 & \mapsto \quad \vec{n}_{\pi_1} = (2, -1, -2) \\ x - y + 4 = 0 & \mapsto \quad \vec{n}_{\pi_2} = (1, -1, 0) \end{cases}$$

$$r \perp \pi \quad \mapsto \quad \vec{u}_r = \vec{n}_\pi = \vec{n}_{\pi_1} \text{x}\, \vec{n}_{\pi_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-2, -2, -1)$$



$$\pi \equiv -2x - 2y - z + D = 0$$

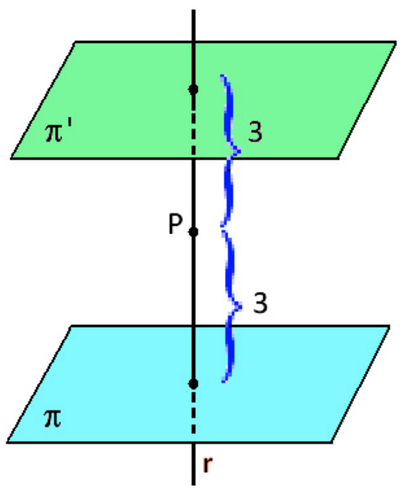
$$\text{Como } \text{dist}(P, \pi) = \frac{|-2.1 - 2.1 - 1.3 + D|}{\sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = 3 \quad \mapsto \quad \frac{|-7 + D|}{3} = 3$$

$$|-7 + D| = 9 \quad \mapsto \quad \begin{matrix} -7 + D = 9 & \mapsto & D = 16 \\ -7 + D = -9 & \mapsto & D = -2 \end{matrix}$$

Hay dos planos que verifican las condiciones:

$$\pi \equiv -2x - 2y - z + 16 = 0$$

$$\pi' \equiv -2x - 2y - z - 2 = 0$$

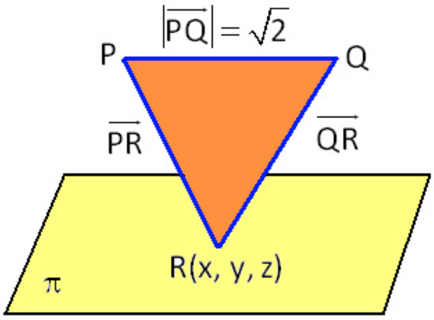


19. Dados los puntos $P(4,\ 2,\ 1)$ y $Q(3,\ 3,\ 1)$, encuentra los dos puntos, R_1 y R_2, del plano $\pi \equiv x-y-2z+3=0$ tales que PQR_1 y PQR_2 son triángulos equiláteros.

Solución:

a) $P(4,\ 2,\ 1)$, $Q(3,\ 3,\ 1)$, $\pi \equiv x-y-2z+3=0$

Sea $R(x,y,z)$ un punto del plano π



$\overrightarrow{PQ}=(-1,1,0) \mapsto |\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{2}$

$\overrightarrow{PR}=(x-4,\ y-2,\ z-1)$

$\overrightarrow{QR}=(x-3,\ y-3,\ z-1)$

Para que el triángulo PQR sea equilátero, se tiene que cumplir:

$$|\overrightarrow{PQ}|=|\overrightarrow{PR}|=|\overrightarrow{QR}|=\sqrt{2}$$

$$|\overrightarrow{PR}|=\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2+(z-1)^2}=\sqrt{2} \qquad (1)$$

$$|\overrightarrow{QR}|=\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2+(z-1)^2}=\sqrt{2} \qquad (2)$$

Como $R\in\pi$ verifica la ecuación: $x-y-2z+3=0$ (3)

Operando, resulta el sistema:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-8x-4y-2z+19=0 \\ x^2+y^2+z^2-6x-6y-2z+17=0 \\ x-y-2z+3=0 \end{cases}$$

Restando la 2ª ecuación de la 1ª, resulta: $-2x+2y+2=0$

$$\begin{cases} -2x+2y+2=0 \\ x-y-2z+3=0 \end{cases} \mapsto \begin{cases} -2x+2y+2=0 \\ 2x-2y-4z+6=0 \end{cases} \mapsto z=2$$

$$x-y-2z+3=0 \mapsto x-y=1 \mapsto x=1+y$$

Con $z=2,\ x=1+y$ en $x^2+y^2+z^2-8x-4y-2z+19=0$

$(1+y)^2+y^2+4-8\,(1+y)-4y-4+19=0$

$$y^2-5y+6=0 \quad \mapsto \quad \begin{cases} y=3 & x=4 \\ y=2 & x=3 \end{cases}$$

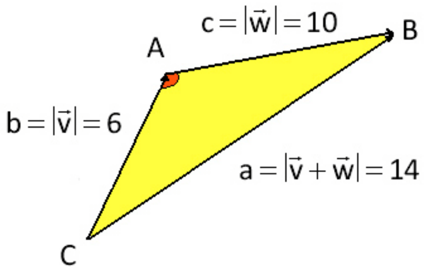
Los puntos pedidos son: $R_1(4,3,2)$ y $R_2(3,2,2)$

20. a) Si $|\vec{v}|=6$, $|\vec{w}|=10$ y $|\vec{v}+\vec{w}|=14$, calcula el ángulo que forman los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

b) Calcula las ecuaciones paramétricas y la ecuación general del plano que pasa por los puntos $A(-1,5,0)$ y $B(0,1,1)$ y es paralelo a la recta

$$r\equiv\begin{cases} 3x+2y-3=0 \\ 2y-3z-1=0 \end{cases}$$

Solución:



a) $|\vec{v}|=6$, $|\vec{w}|=10$, $|\vec{v}+\vec{w}|=14$

Por el teorema del coseno:

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}$

$$14^2=6^2+10^2-2.6.10.\cos\hat{A} \quad \mapsto \quad 196=136-120.\cos\hat{A}$$

$$\cos\hat{A}=\frac{-1}{2} \quad \mapsto \quad \hat{A}=120º$$

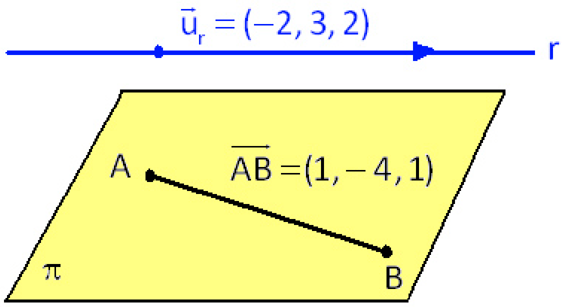
b) $A(-1,5,0)$, $\boxed{B(0,1,1)}$, $\boxed{\overrightarrow{AB}=(1,-4,1)}$

$$r\equiv\begin{cases} 3x+2y-3=0 & \mapsto \quad \vec{n}_{\pi_1}=(3,2,0) \\ 2y-3z-1=0 & \mapsto \quad \vec{n}_{\pi_2}=(0,2,-3) \end{cases}$$

$$\vec{u}_r=\vec{n}_{\pi_1}\ x\ \vec{n}_{\pi_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix}=(-6,9,6) \quad / \quad \boxed{\vec{u}_r=(-2,3,2)}$$

Ecuación paramétrica plano π:

$$\pi \equiv \begin{cases} x = \lambda - 2\mu \\ y = 1 - 4\lambda + 3\mu \\ z = 1 + \lambda + 2\mu \end{cases}$$



La ecuación general del plano π que pasa por el punto $B(0, 1, 1)$ con vectores directores $\overrightarrow{AB} = (1, -4, 1)$ y $\vec{u}_r = (-2, 3, 2)$:

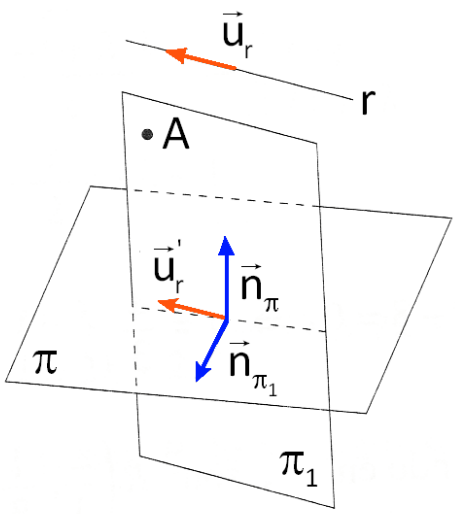
$$\pi \equiv \begin{vmatrix} 1 & -2 & x \\ -4 & 3 & y-1 \\ 1 & 2 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \quad \mapsto \quad \pi \equiv 11x + 4y + 5z - 9 = 0$$

21. Se considera el plano $\pi \equiv -x + 2y + z + 1 = 0$, la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-1}{2} = z - 3$ y el punto $A(1, 0, 2)$.

a) Obtener la ecuación del plano π_1 que pasa por el punto A, es paralelo a la recta r y es perpendicular al plano π.

b) Determinar, si es posible, un plano perpendicular a π que pase por A y que no sea paralelo a r.

Solución:



a) El vector normal $\vec{n}_\pi$ al plano π está contenido en el plano π_1.

Siendo el plano $\pi_1 \parallel r$ un vector paralelo al vector director $\vec{u}_r$ de la recta r $(\vec{u}_r')$ está contenido en el plano π_1.

Un vector perpendicular al plano π_1 será $\vec{n}_{\pi_1} = \vec{u}_r \times \vec{n}_\pi$

$$r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{2} = z - 3 \quad \mapsto \quad \vec{u}_r = (3, 2, 1)$$

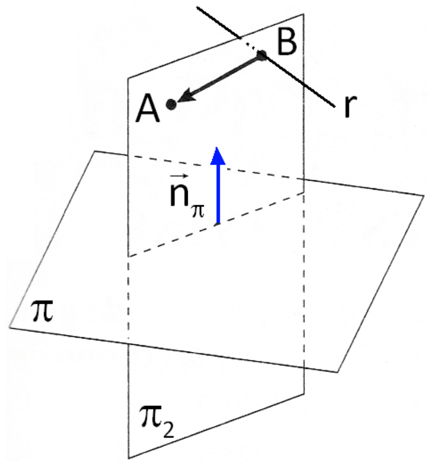
$\pi \equiv -x+2y+z+1=0 \quad \mapsto \quad \vec{n}_{\pi}=(-1,2,1)$

$$\vec{n}_{\pi_1} = \vec{u}_r \, x \, \vec{n}_{\pi} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -4\vec{j}+8\vec{k} \equiv (0,-4,8)$$

La ecuación del plano π_1 que pasa por el punto $A(1,0,2)$ con vector normal $\vec{n}_{\pi_1}=(0,-4,8)$ será:

$0.(x-1)-4.(y-0)+8.(z-2)=0 \quad \mapsto \quad \pi_1 \equiv -y+2z-4=0$

b) Un punto de $r \equiv \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-1}{2}=z-3$ es $B(2,1,3)$



Se impone que el vector $\overrightarrow{AB}$ pertenezca al plano π_2. De este modo, corta a la recta r en el punto B, y el nuevo plano π_2 y r no son paralelos.

$\overrightarrow{AB}=(2,1,3)-(1,0,2)=(1,1,1)$

Como $\pi_2 \perp \pi \equiv -x+2y+z+1=0 \quad \mapsto \quad \vec{v}_{\pi_2}=\vec{n}_{\pi}=(-1,2,1)$. Otro vector de π_2 será $\overrightarrow{AB}=(1,1,1)$, y un punto del plano es $B(2,1,3)$.

$$\pi_2 \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \mapsto \quad \pi_2 \equiv x+2y-3z+5=0$$

22. a) Hallar la recta que corta a las rectas:

$$r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-1}{3} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x+2y+2=0 \\ 2y+z-5=0 \end{cases}$$

y que pasa por el punto $A(-2, 0, -7)$

b) Calcular la distancia del punto A a la recta r.

Solución:

a) Para estudiar la posición relativa de las rectas r y s

Un punto P y un vector director $\vec{u}_r$ de la recta r:

$$r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-1}{3} \mapsto P(0, 2, 1) \qquad \vec{u}_r = (2, -3, 3)$$

Un punto B y un vector director $\vec{v}_s$ de la recta s:

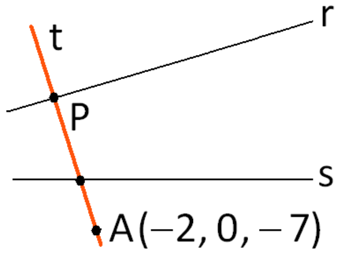
$$s \equiv \begin{cases} x+2y+2=0 \\ 2y+z-5=0 \end{cases} \mapsto \text{ si } x=0 \begin{cases} y=-1 \\ z=7 \end{cases} \mapsto B(0, -1, 7)$$

$$\vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \equiv (2, -1, 2)$$

Sean $\vec{u}_r = (2, -3, 3)$, $\vec{v}_s = (2, -1, 2)$ y $\overrightarrow{PB} = (0, -1, 7) - (0, 2, 1) = (0, -3, 6)$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 6 \end{vmatrix} \neq 0 \mapsto \text{ Las rectas } r \text{ y } s \text{ se cruzan}$$

- Sea t la recta que corta a las rectas r y s y que pasa por A



El plano π que pasa por A y contiene a s:

$$\pi \equiv x + 2y + 2 = 0$$

El punto $A(-2, 0, -7)$ cumple la ecuación del plano $\pi \equiv x + 2y + 2 = 0$

- Se calcula el punto $P = \pi \cap r$

Las ecuaciones paramétricas de $r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 2 - 3\lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases}$

Sustituyendo r en el plano π, resulta:

$$\pi \equiv x + 2y + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad 2\lambda + 2(2 - 3\lambda) + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{3}{2}$$

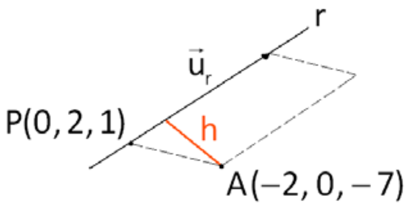
Sustituyendo el valor $\lambda = \dfrac{3}{2}$ en r: $\quad P\left(3, -\dfrac{5}{2}, \dfrac{11}{2}\right)$

- Las ecuaciones paramétricas de la recta t que pasa por los puntos $A(-2, 0, -7)$ y $P\left(3, -\dfrac{5}{2}, \dfrac{11}{2}\right)$ con $\overrightarrow{AP} = \left(5, -\dfrac{5}{2}, \dfrac{25}{2}\right)$:

$$t \equiv \begin{cases} x = -2 + 5\lambda \\ y = -\dfrac{5}{2}\lambda \\ z = -7 + \dfrac{25}{2}\lambda \end{cases} \qquad \mapsto \qquad t \equiv \frac{x+2}{5} = \frac{y}{-5/2} = \frac{z+7}{25/2}$$

b) $S = \left|\vec{u}_r \times \overrightarrow{PA}\right| = h \, . \left|\vec{u}_r\right|$

$$h = d(A, r) = \frac{\left|\vec{u}_r \times \overrightarrow{PA}\right|}{\left|\vec{u}_r\right|}$$



$(2, -3, 3) \quad \overrightarrow{PA} = (-2, 0, -7) - (0, 2, 1) = (-2, -2, -8)$

$$\vec{u}_r \times \overrightarrow{PA} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & -8 \end{vmatrix} = 30\vec{i} + 10\vec{j} - 10\vec{k} \equiv (30, 10, -10)$$

$$\left|\vec{u}_r \times \overrightarrow{PA}\right| = \sqrt{30^2 + 10^2 + (-10)^2} = \sqrt{1100} = 10\sqrt{11}$$

$$\left|\vec{u}_r\right| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 3^2} = \sqrt{22} = \sqrt{2} \, . \sqrt{11}$$

$$d(A, r) = h = \frac{\left|\vec{u}_r \times \overrightarrow{PA}\right|}{\left|\vec{u}_r\right|} = \frac{10 \, . \cancel{\sqrt{11}}}{\sqrt{2} \, . \cancel{\sqrt{11}}} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$$

23. Hallar la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el origen de coordenadas y pasa por los focos de la elipse $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$

Solución:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1 \quad \mapsto \quad a^2=25 \ , \ b^2=9$$

Al ser una elipse se cumple que: $a^2=b^2+c^2 \ \rightarrow \ 25=9+c^2 \ \rightarrow \ c=\pm 4$

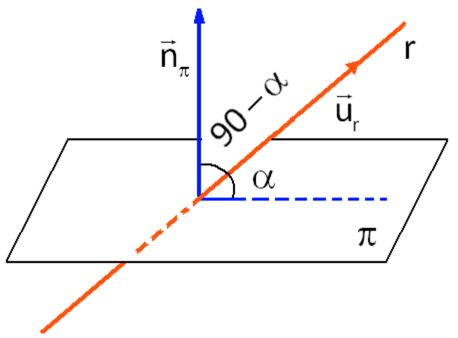
Los focos de la elipse son: $(-4,0)$ y $(4,0)$

El radio de la circunferencia es 4.

Su ecuación es: $x^2+y^2=r^2 \ \mapsto \ x^2+y^2=16$

24. Calcular el ángulo que forma la recta $r\equiv\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{5}=\dfrac{z-1}{-1}$ con el plano $\pi\equiv 2x-5y+7z-11=0$

Solución:



$\text{ang}(r,\pi)=\alpha$

$\vec{n}_\pi\,.\,\vec{u}_r=|\vec{n}_\pi|\,.\,|\vec{u}_r|\,.\cos(\vec{n}_\pi\,\hat{}\,\vec{u}_r)$

$$\text{sen}\,\alpha=\cos(90-\alpha)=\frac{\vec{n}_\pi\,.\,\vec{u}_r}{|\vec{n}_\pi|\,.\,|\vec{u}_r|}$$

$$r\equiv\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{5}=\frac{z-1}{-1} \ \rightarrow \ \vec{u}_r=(2,5,-1) \ \rightarrow \ |\vec{u}_r|=\sqrt{2^2+5^2+(-1)^2}=\sqrt{30}$$

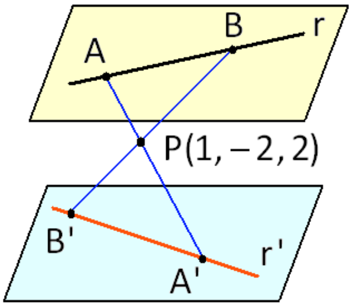
$$\vec{n}_\pi=(2,-5,7) \ \rightarrow \ |\vec{n}_\pi|=\sqrt{2^2+(-5)^2+7^2}=\sqrt{78}$$

$$\vec{n}_\pi\,.\,\vec{u}_r=(2,-5,7)\,.\,(2,5,-1)=4-25-7=-28$$

$$\text{sen}\,\alpha=\cos(90-\alpha)=\frac{\vec{n}_\pi\,.\,\vec{u}_r}{|\vec{n}_\pi|\,.\,|\vec{u}_r|}=\frac{-28}{\sqrt{78}\,.\,\sqrt{30}} \ \mapsto \ \alpha=35^\circ\ 22'$$

25. Dado el punto $P(1,-2,2)$. Calcula la ecuación de la recta r' simétrica de $r \equiv \begin{cases} x = 2-\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$ respecto del punto P.

Solución:



Sean A y B dos puntos de la recta r, se calculan las coordenadas de sus simétricos A' y B' respecto del punto P. Es decir, P es el punto medio de los segmentos $\overline{AA'}$ y $\overline{BB'}$.

La recta r' es la que une los puntos A' y B'

$$r \equiv \begin{cases} x = 2-\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \begin{array}{l} \nearrow \lambda = 0 \quad \rightarrow \quad x=2 \quad y=1 \quad z=0 \quad \Rightarrow \quad A(2,1,0) \\ \\ \searrow \lambda = 1 \quad \rightarrow \quad x=1 \quad y=2 \quad z=2 \quad \Rightarrow \quad B(1,2,2) \end{array}$$

$$P(1,-2,2) \begin{cases} \bullet\ A(2,1,0) \ \text{ y } \ A'(a,b,c) \ \rightarrow \ \dfrac{2+a}{2}=1 \quad \dfrac{1+b}{2}=-2 \quad \dfrac{0+c}{2}=2 \\ \\ \bullet\ B(1,2,2) \ \text{ y } \ B'(d,e,f) \ \rightarrow \ \dfrac{1+d}{2}=1 \quad \dfrac{2+e}{2}=-2 \quad \dfrac{2+f}{2}=2 \end{cases}$$

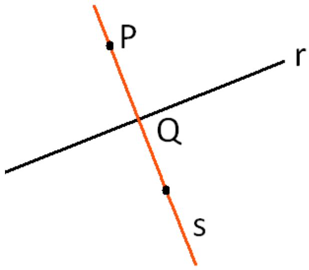
con lo que $A'(0,-5,4)$ y $B'(1,-6,2) \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{A'B'}=(1,-1,-2)$

$$r' \equiv \begin{cases} x = \mu \\ y = -5-\mu \\ z = 4-2\mu \end{cases}$$

26. Dados el plano $\pi \equiv x+y+z=1$, la recta $(x,y,z)=(1,0,0)+\lambda(0,1,1)$,
y el punto $P(1,1,0)$, se pide:
a) Hallar la ecuación de una recta s que sea perpendicular a r y pase por P.
b) Hallar el punto P', simétrico de P respecto de r.
c) Hallar el punto P'', simétrico de P respecto de π.

Solución:

a) Se halla el plano π_1 , perpendicular a r que pasa por P:



$$r \equiv \begin{cases} x=1 \\ y=\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \rightarrow \vec{u}_r = \vec{n}_{\pi_1} = (0,1,1)$$

$$\pi_1 \equiv y+z+D=0 \xrightarrow{P\in\pi_1} 1+0+D=0 \rightarrow D=-1 \Rightarrow \pi_1 \equiv y+z-1=0$$

Sustituyendo r en π_1 resulta:

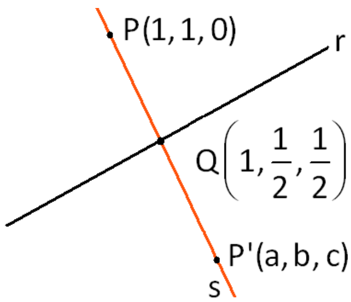
$$\pi_1 \equiv y+z-1=0 \rightarrow \lambda+\lambda-1=0 \rightarrow \lambda=\frac{1}{2}$$

$$Q(1,\lambda,\lambda) \rightarrow Q\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \rightarrow \overrightarrow{QP}=\left(0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

La ecuación de la recta s que pasa por $P(1,1,0)$ con $\overrightarrow{QP}=\left(0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$:

$$s \equiv \begin{cases} x=1 \\ y=1+\dfrac{\mu}{2} \\ z=-\dfrac{\mu}{2} \end{cases}$$

b) El punto Q es el punto medio del segmento $\overline{PP'}$: $Q=\dfrac{P+P'}{2}$

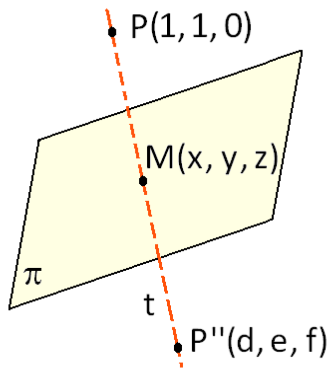


$$Q=\frac{P+P'}{2} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 1=\dfrac{1+a}{2} & \mapsto \quad a=1 \\ \dfrac{1}{2}=\dfrac{1+b}{2} & \mapsto \quad b=0 \\ \dfrac{1}{2}=\dfrac{c}{2} & \mapsto \quad c=1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad P'(1,0,1)$$

c) $\pi \equiv x+y+z=1 \quad \rightarrow \quad \vec{n}_\pi=(1,1,1)$

Sea la recta PP'': $\vec{v}_{PP''}=\vec{n}_\pi=(1,1,1)$

$$t_{PP''} \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$$



El punto M es el punto medio del segmento $\overline{PP''}$: $M=\pi \cap \overline{PP''}$

Sustituyendo $t_{PP''}$ en π resulta:

$$\pi \equiv x+y+z=1 \quad \rightarrow \quad (1+\lambda)+(1+\lambda)+\lambda=1 \quad \rightarrow \quad \lambda=-\frac{1}{3}$$

$$M(1+\lambda,1+\lambda,\lambda) \equiv M\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$$

Las coordenadas del punto P'':

$$M=\frac{P+P''}{2} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{2}{3}=\dfrac{1+d}{2} & \mapsto \quad d=\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{2}{3}=\dfrac{1+e}{2} & \mapsto \quad e=\dfrac{1}{3} \\ -\dfrac{1}{3}=\dfrac{f}{2} & \mapsto \quad f=-\dfrac{2}{3} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad P''\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$$

27. a) Determina el centro y el radio de la esfera:

$$x^2+y^2+z^2-2x+4y+8z-4=0$$

b) Determina el centro y el radio de la circunferencia intersección de la esfera del apartado anterior con el plano $z=0$.

Solución:

a) La ecuación de una esfera de centro $C(a,b,c)$ y radio r es:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

$$x^2-2ax+y^2-2by+z^2-2zx+a^2+b^2+c^2-r^2=0$$

Comparando con la ecuación: $x^2+y^2+z^2-2x+4y+8z-4=0$

$$\begin{cases}-2a=-2\\ -2b=4\\ -2c=8\\ a^2+b^2+c^2-r^2=-4\end{cases} \mapsto \begin{cases}a=1\\ b=-2\\ c=-4\\ r^2=1+4+16+4=25 \quad \rightarrow \quad r=5\end{cases}$$

El centro de la esfera es el punto $C(1,-2,-4)$ y el radio $r=5$

b) Primero se calcula la ecuación de la circunferencia resolviendo el sistema:

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2-2x+4y+8z-4=0\\ z=0\end{cases} \rightarrow \quad x^2+y^2-2x+4y-4=0$$

- La ecuación de la circunferencia de centro $C(a,b)$ y radio r:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \quad \rightarrow \quad x^2-2ax+y^2-2by+a^2+b^2-r^2=0$$

Comparando con la ecuación: $x^2+y^2-2x+4y-4=0$

$$\begin{cases}-2a=-2\\ -2b=4\\ a^2+b^2-r^2=-4\end{cases} \rightarrow \begin{cases}a=1\\ b=-2\\ r^2=1+4+4 \quad \rightarrow \quad r=3\end{cases}$$

El centro de la circunferencia es el punto $C(1,\text{-}2)$ y radio $r=3$

28. Halla la distancia entre el punto $P(2,1,3)$ y la recta $r:\begin{cases}2x-y-z-3=0\\x-y+z-2=0\end{cases}$

Solución:

- La recta r en forma paramétrica:

$$r:\begin{cases}2x-y-z-3=0\\x-y+z-2=0\end{cases}\xrightarrow{1^o-2^o}\begin{cases}x=1+2z\\y=x+z-2=-1+3z\end{cases}\rightarrow r:\begin{cases}x=1+2\lambda\\y=-1+3\lambda\\z=\lambda\end{cases}$$

También se podía haber hecho:

$$r:\begin{cases}2x-y-z-3=0\\x-y+z-2=0\end{cases}\xrightarrow{z=0}\begin{cases}2x-y=3\\x-y=2\end{cases}\rightarrow x=1\quad y=-1\rightarrow A(1,-1,0)$$

$$r:\begin{cases}2x-y-z-3=0\rightarrow \vec{n}=(2,-1,-1)\\x-y+z-2=0\rightarrow \vec{n}'=(1,-1,1)\end{cases}\rightarrow \vec{u}_r=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&-1&1\\2&-1&-1\end{vmatrix}=(2,3,1)$$

- El plano π que pasa por $P(2,1,3)$ y es perpendicular a r: $\vec{n}_\pi=\vec{u}_r=(2,3,1)$

$$\pi\equiv 2(x-2)+3(y-1)+(z-3)=0\rightarrow \pi\equiv 2x+3y+z-10=0$$

- El punto de corte del plano $\pi\equiv 2x+3y+z-10=0$ con $r:\begin{cases}x=1+2\lambda\\y=-1+3\lambda\\z=\lambda\end{cases}$

$$2(1+2\lambda)+3(-1+3\lambda)+\lambda-10=0\rightarrow \lambda=\frac{11}{14}$$

El punto de corte $Q(1+2\lambda,-1+3\lambda,\lambda)\equiv Q\left(\frac{36}{14},\frac{19}{14},\frac{11}{14}\right)$

- $d(P,r)=d(P,Q)=|\overrightarrow{PQ}|=\left|\left(\frac{8}{14},\frac{5}{14},\frac{-31}{14}\right)\right|=\sqrt{\left(\frac{8}{14}\right)^2+\left(\frac{5}{14}\right)^2+\left(\frac{-31}{14}\right)^2}=\sqrt{\frac{75}{14}}$

29. Calcula la distancia del punto $P(1,2,3)$ a la recta $r: \frac{x+1}{-2}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{2}$

Solución:

$$r: \frac{x+1}{-2}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{2} \quad \rightarrow \quad A(-1,0,2) \quad \vec{u}_r=(-2,1,2) \quad \overrightarrow{AP}=(2,2,1)$$

• Utilizando la expresión vectorial la distancia del punto P a la recta r:

$$d(P,r)=\frac{\left|\overrightarrow{AP}\times\vec{u}_r\right|}{\left|\vec{u}_r\right|}=\frac{\left|(2,2,1)\times(-2,1,2)\right|}{\left|(-2,1,2)\right|}=\frac{\left\|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 2\end{matrix}\right\|}{\left|(-2,1,2)\right|}=\frac{\left|(3,-6,6)\right|}{\left|(-2,1,2)\right|}=$$

$$=\frac{\sqrt{3^2+(-6)^2+6^2}}{\sqrt{(-2)^2+1^2+2^2}}=\frac{9}{3}=3$$

• La distancia del punto a la recta es independiente del punto de la recta que se tome y del vector director.

$$r:\begin{cases}x=-1-2\lambda\\ y=\lambda\\ z=2+2\lambda\end{cases} \quad \rightarrow \quad B(-3,1,4) \quad \vec{v}_r=(4,2,-4) \qquad \overrightarrow{BP}=(4,1,-1)$$

$$d(P,r)=\frac{\left|\overrightarrow{BP}\times\vec{v}_r\right|}{\left|\vec{v}_r\right|}=\frac{\left|(4,1,-1)\times(4,-2,-4)\right|}{\left|(4,-2,-4)\right|}=\frac{\left\|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & 1 & -1\\ 4 & -2 & -4\end{matrix}\right\|}{\left|(4,-2,-4)\right|}=\frac{\left|(-6,12,-12)\right|}{\left|(4,-2,-4)\right|}=3$$

30. a) Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los planos de ecuaciones $3x-4y+5=0$ y $2x-2y+z+9=0$

b) ¿Qué puntos del eje OY equidistan de ambos planos?

Solución:

a) Si $P(x,y,z)$ es uno de los puntos del lugar geométrico, entonces:

$$\frac{|3x-4y+5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|2x-2y+z+9|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}} \rightarrow \frac{|3x-4y+5|}{5}=\frac{|2x-2y+z+9|}{3}$$

$$3|3x-4y+5|=5|2x-2y+z+9| \begin{array}{l} \nearrow 9x-12y+15=10x-10y+5z+45 \\ \searrow 9x-12y+15=-10x+10y-5z-45 \end{array}$$

resultando $\begin{cases} x+2y+5z+30=0 \\ 19x-22y+5z+60=0 \end{cases}$

Son los planos bisectores del diedro que determinan los dos planos dados.

b) Un punto del eje OY tiene la forma $P(0,y,0)$. La distancia de P a cada uno de los planos ha de ser igual, es decir:

$$\frac{|-4y+5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|-2y+9|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}} \rightarrow \frac{|-4y+5|}{5}=\frac{|-2y+9|}{3}$$

$$3|-4y+5|=5|-2y+9| \begin{array}{l} \nearrow -12y+15=-10y+45 \quad \mapsto \quad y=-15 \\ \searrow -12y+15=10y-45 \quad \mapsto \quad y=\dfrac{30}{11} \end{array}$$

Hay dos puntos $P_1(0,-15,0)$ y $P_2\left(0,\dfrac{30}{11},0\right)$