- **Cálculo de la solución óptima de un problema de transporte. Método de la esquina N.O.**
- **Problema de asignación. Solución óptima con el método húngaro.**

MODELO DE TRANSPORTE

Resolviendo modelos matemáticos se da solución a diferentes tipos de problemas de Investigación de Operaciones. En esta línea, se introducen algoritmos de solución del Problema de Transporte y del Problema de Asignación, ambos con alta presencia en cualquier tipo de negocio.

El Problema del Transporte se analiza mediante distintos algoritmos: Método de la Esquina Noroeste, Método de Vogel y Método de Modi. Mientras que el Problema de Asignación se trata por el Método Húngaro.

El Método de la Esquina Noroeste (o esquina superior izquierda) es una heurística que se aplica a una estructura especial de problemas de Programación Lineal llamada Modelo de Transporte, que permite asegurar que exista una solución básica factible inicial (no artificial).

En general, el Método de Vogel produce la mejor solución básica de inicio y el de la Esquina Noroeste la peor, sin embargo, el Método de la Esquina Noroeste implica el mínimo de cálculos, es también considerado por ser el menos probable para dar una buena solución de *bajo costo* al ignorar la magnitud relativa de los costos.

MODELO: **En cualquier actividad industrial, empresarial o negocio se encuentra presente el transporte de bienes o productos desde los centros de producción denominados *orígenes* a los centros de consumo llamados *destinos*, por lo que llevar a cabo esta actividad de manera óptima, es decir, al menor costo posible, representa ventajas económicas y competitivas.**

El transporte de bienes o productos, materias primas, equipos, etc., está inmerso en la tendencia actual de la globalización.

En la construcción de todo modelo es necesario partir con información, en este sentido, se supone conocer los *costos unitarios* de transporte desde cada uno de los *orígenes* a cada uno de los *destinos* del problema de transporte, así como la *oferta* y *demanda* de cada centro.

**Se utiliza el término *oferta* como la cantidad de bienes o productos disponibles en cada *origen*, centro de producción o fábrica, es decir, del centro de producción.
El término *demanda* se asocia con la cantidad de bienes o productos que cada *destino* requiere.**

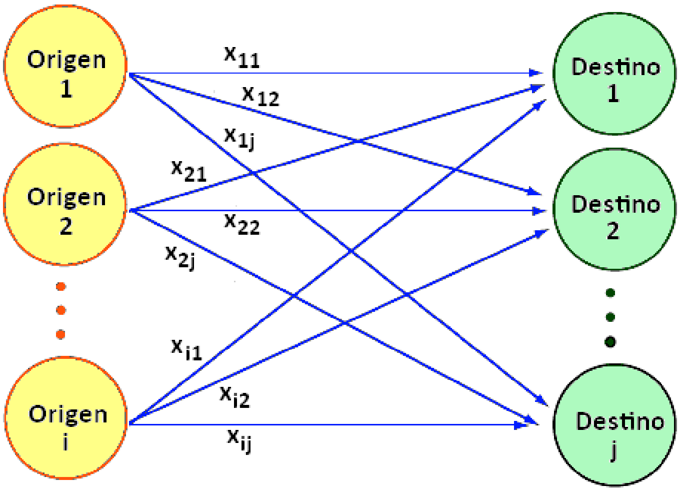
Las variables de decisión son la cantidad de productos que se envían del orígen *i-ésimo* al *destino j-ésimo*, que se denota por x_{ij} . Los *costos unitarios* por transportar un producto del i-ésimo origen al j-ésimo destino se denotan por c_{ij} , la función objetivo asociada al problema del transporte representa el costo total del transporte.

Función objetivo: $z_{mín} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$

Sujeto a:

$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$ **restricción de la oferta (a) de cada orígen.**

$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j$ **restricción de la demanda (d) de cada destino.**



Para este modelo se supone que existe el equilibrio entre la oferta y la demanda, es decir, que se cumple la igualdad: $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} d_j$

Si no se cumple esta igualdad, se añade un origen o destino artificial, según sea el caso, donde se producirá o recibirá, según corresponda el exceso de productos, ya sea para la oferta o para la demanda.

También está presente en el modelo la consición de no negatividad, es decir, $x_{ij} \geq 0$

♦ **MÉTODO DE LA ESQUINA NOROESTE**

El método parte en forma matricial, es decir, *filas* que representan *orígenes* y *columnas* que representan *destinos*. El algoritmo se inicia en la celda, ruta o esauina Noroeste de la tabla (esquina superior izquierda).

Una vez obtenida la tabla inicial del problema del transporte, el algoritmo de manera resumida consta de los siguientes pasos:

PASO 1: En la celda seleccionada como esquina noroeste se asigna la máxima cantidad de unidades posibles, cantidad que se encuentra restringida bien por las restricciones de oferta o bien de demanda.
En este paso se procede a ajustar la oferta y demanda de la fila y columna afectada, restándole la cantidad asignada a la celda.

PASO 2: Se procede a eliminar la fila o columna cuya oferta o demanda sea 0 después del Paso 1. Si ambas son 0 arbitrariamente se elige cual eliminar y la otra se deja con oferta o demanda 0, según sea el caso.

PASO 3: Pueden ocurrir dos posibilidades:

a) Que quede una sola fila o columna, en este caso ha finalizado el algoritmo.

b) Que quede más de una fila o columna, entonces se reinicia el Paso 1.

ESQUINA NOROESTE: **Tres silos satisfacen la demanda de cuatro molinos, los costes unitarios del transporte en euros de cada silo al molino correspondiente se adjuntan en la tabla adjunta. Se quiere obtener el costo mínimo.**

	Molino				
	1	2	3	4	Oferta
Silo 1	10	2	20	11	15
Silo 2	12	7	9	20	25
Silo 3	4	14	16	18	10
Demanda	5	15	15	15	50

Solución:

El algoritmo de transporte se basa en la hipótesis que el modelo está balanceado, es decir, que la demanda total es igual a la oferta total.

Cuando el modelo no está balanceado siempre se podrá aumentar con una fuente ficticia o un destino ficticio para restaurar el equilibrio o balance.

El primer paso es seleccionar la demanda a la esquina más al noroeste, de manera que no sobrepase la oferta, en caso contrario se asigna la mayor cantidad. En este caso se asignan 5 unidades al Molino 1.

	Molino					
	1		2	3	4	Oferta
Silo 1	5	10	2	20	11	15 – 5 = 10
Silo 2	12		7	9	20	25
Silo 3	4		14	16	18	10
Demanda	5 – 5 = 0		15	15	15	

La demanda del Molino 1 es cero, una vez restada la cantidad asignada. Se procede a eliminar la columna, continuando el proceso de asignación.

	Molino					
	1		2	3	4	Oferta
Silo 1	5	10	2	20	11	10
Silo 2	12		7	9	20	25
Silo 3	4		14	16	18	10
Demanda	0		15	15	15	

En la nueva esquina noroeste (Molino 2) se asigna las 10 unidades restantes, quedando la oferta del Silo 1 a cero. El Molino 2 queda todavía con una demanda de 5 unidades.

Molino

	1	2	3	4	Oferta
Silo 1	5 10	10 2	20	11	10 – 10 = 0
Silo 2	12	7	9	20	25
Silo 3	4	14	16	18	10
Demanda	0	15 – 10 = 5	15	15	

Se elimina la primera fila, el Silo 1 ya no presenta oferta.

Molino

	1	2	3	4	Oferta
Silo 1	5 10	10 2	20	11	0
Silo 2	12	7	9	20	25
Silo 3	4	14	16	18	10
Demanda	0	5	15	15	

La demanda del Molino 2 es ahora de 5 unidades, quedando la oferta del Silo 2 en 25 unidades. Se suben 5 unidades a la nueva esquina noroeste, quedando la demanda del Molino 2 en 0 unidades.

Molino

	1	2	3	4	Oferta
Silo 1	5 10	10 2	20	11	0
Silo 2	12	5 7	9	20	25 – 5 = 20
Silo 3	4	14	16	18	10
Demanda	0	5 – 5 = 0	15	15	

Se elimina la columna del Molino 2, ya no presenta demanda.

Molino

	1	2	3	4	Oferta
Silo 1	5 10	10 2	20	11	0
Silo 2	12	5 7	9	20	20
Silo 3	4	14	16	18	10
Demanda	0	0	15	15	

En la nueva esquina noroeste (Molino 3) se asigna 15 unidades, quedando la demanda del Molino 3 con 0 unidades, mientras que la oferta del Silo 2 es de 5 unidades.

Molino

	1		2		3		4		Oferta
Silo 1	5	10	10	2		20		11	0
Silo 2		12	5	7	15	9		20	20 – 15 = 5
Silo 3		4		14		16		18	10
Demanda		0		0		15 – 15 = 0		15	

El Molino 3 ya no tiene demanda, anulando la columna.

Molino

	1		2		3		4		Oferta
Silo 1	5	10	10	2		20		11	0
Silo 2		12	5	7	15	9		20	5
Silo 3		4		14		16		18	10
Demanda		0		0		0		15	

Se asignan 5 unidades a la esquina noroeste (Molino 4)

Molino

	1		2		3		4		Oferta
Silo 1	5	10	10	2		20		11	0
Silo 2		12	5	7	15	9	5	20	5 – 5 = 0
Silo 3		4		14		16		18	10
Demanda		0		0		0		15 – 5 = 10	

Se anula la fila del Silo 3 por no tener unidades que ofertar.

Molino

	1		2		3		4		Oferta
Silo 1	5	10	10	2		20		11	0
Silo 2		12	5	7	15	9	5	20	0
Silo 3		4		14		16		18	10
Demanda		0		0		0		10	

Finalmente, se asignan 10 unidades a la esquina restante.

Molino

	1		2		3		4		Oferta
Silo 1	5	10	10	2		20		11	0
Silo 2		12	5	7	15	9	5	20	0
Silo 3		4		14		16	10	18	10 – 10 = 0
Demanda		0		0		0		10 – 10 = 0	

En consecuencia, la solución básica factible inicial es:

	Molino							
	1		2		3		4	
Silo 1	5	10	10	2				
Silo 2			5	7	15	9	5	20
Silo 3							10	18
Costo	50		55		135		280	

Que reporta un costo mínimo (valor de la función objetivo) de:

$$Z = 5 \times 10 + \left(10 \times 2 + 5 \times 7\right) + 15 \times 9 + \left(5 \times 20 + 10 \times 18\right) = 520 \text{ euros}$$

Utilizando el programa Solver de Excel, como motor de resolución Simplex_LP , se alcanza la solución óptima con costo mínimo (valor óptimo) de 435 euros.

El método de la Esquina Noroeste tiene un mínimo de cálculos, ignorando los costos, considera todas las restricciones para su elaboración.

Es útil en problemas con innumerables origenes y destinos en los que importe satisfacer las restricciones.

Es el algoritmo de transporte menos probable para ofrecer una buena solución de bajo costo.

ESQUINA NOROESTE: **Una empresa tiene cuatro depósitos de azufre que suministra a cuatro fábricas de productos químicos. Las capacidades de los depósitos son de 100, 120, 80 y 95 litros, respectivamente. Las fábricas solicitan a los depósitos, respectivamente, las cantidades de 125, 50, 130 y 90 litros. El coste que relaciona el transporte del litro de azufre entre depósitos y fábricas se establece en la tabla:**

	Fábrica 1	Fábrica 2	Fábrica 3	Fábrica 4
Depósito 1	2	3	4	6
Depósito 2	1	5	8	3
Depósito 3	8	5	1	4
Depósito 4	4	5	6	3

Obtener un modelo de programación que permita satisfacer las necesidades de las fábricas y minimizar los costos asociados.

Solución:

Para el modelo se supone que existe el equilibrio entre la oferta y la demanda. Los datos del problema se trasladan a la siguiente tabla:

	Fábrica 1	Fábrica 2	Fábrica 3	Fábrica 4	Oferta
Depósito 1	2	3	4	6	100
Depósito 2	1	5	8	3	120
Depósito 3	8	5	1	4	80
Depósito 4	4	5	6	3	95
Demanda	125	50	130	90	

El siguiente paso es seleccionar la demanda a la esquina más al noroeste, de manera que no sobrepase la oferta, en caso contrario se asigna la mayor cantidad. En este caso se asignan 100 litros a la Fábrica 1.

<table>
<tr><th></th><th colspan="2">Fábrica 1</th><th>Fábrica 2</th><th>Fábrica 3</th><th>Fábrica 4</th><th>Oferta</th></tr>
<tr><td>Depósito 1</td><td>100</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>6</td><td>100 – 100 = 0</td></tr>
<tr><td>Depósito 2</td><td colspan="2">1</td><td>5</td><td>8</td><td>3</td><td>120</td></tr>
<tr><td>Depósito 3</td><td colspan="2">8</td><td>5</td><td>1</td><td>4</td><td>80</td></tr>
<tr><td>Depósito 4</td><td colspan="2">4</td><td>5</td><td>6</td><td>3</td><td>95</td></tr>
<tr><td>Demanda</td><td colspan="2">125 – 100 = 25</td><td>50</td><td>130</td><td>90</td><td></td></tr>
</table>

El depósito 1 ha quedado a 0, se procede a eliminar la fila, continuando con el proceso de asignación.

	Fábrica 1	Fábrica 2	Fábrica 3	Fábrica 4	Oferta
Depósito 1	100 2	3	4	6	0
Depósito 2	1	5	8	3	120
Depósito 3	8	5	1	4	80
Depósito 4	4	5	6	3	95
Demanda	25	50	130	90	

La nueva esquina al noroeste es 1, contando con 25 litros requeridos por la Fábrica 1, que suben a la nueva esquina.

	Fábrica 1	Fábrica 2	Fábrica 3	Fábrica 4	Oferta
Depósito 1	100 2	3	4	6	0
Depósito 2	25 1	5	8	3	120 – 25 = 95
Depósito 3	8	5	1	4	80
Depósito 4	4	5	6	3	95
Demanda	25 – 25 = 0	50	130	90	

La Fábrica 1 ya ha cubierto su demanda, la cantidad demandada es 0, se procede a eliminar la columna. El proceso de asignación se repite de nuevo.

	Fábrica 1	Fábrica 2	Fábrica 3	Fábrica 4	Oferta
Depósito 1	100 2	3	4	6	0
Depósito 2	25 1	5	8	3	95
Depósito 3	8	5	1	4	80
Depósito 4	4	5	6	3	95
Demanda	0	50	130	90	

La nueva esquina al noroeste es 5, se suben los 50 litros requeridos por la Fábrica 2.

	Fábrica 1	Fábrica 2	Fábrica 3	Fábrica 4	Oferta
Depósito 1	100 2	3	4	6	0
Depósito 2	25 1	50 5	8	3	95 – 50 = 45
Depósito 3	8	5	1	4	80
Depósito 4	4	5	6	3	95
Demanda	0	50 – 50 = 0	130	90	

La Fábrica 2 ha cubierto su demanda, la cantidad demandada es 0, con lo que se procede a eliminar la columna.

	Fábrica 1	Fábrica 2	Fábrica 3	Fábrica 4	Oferta
Depósito 1	100 2	3	4	6	0
Depósito 2	25 1	50 5	8	3	45
Depósito 3	8	5	1	4	80
Depósito 4	4	5	6	3	95
Demanda	0	0	130	90	

La nueva asignación a la nueva esquina al noroeste es 45, cantidad que queda en el Depósito 2.

	Fábrica 1	Fábrica 2	Fábrica 3	Fábrica 4	Oferta
Depósito 1	100 2	3	4	6	0
Depósito 2	25 1	50 5	45 8	3	45 – 45 = 0
Depósito 3	8	5	1	4	80
Depósito 4	4	5	6	3	95
Demanda	0	0	130 – 45 = 85	90	

El Depósito 2 ha quedado vacío, la cantidad que oferta es 0, con lo que se procede a eliminar la fila.

	Fábrica 1	Fábrica 2	Fábrica 3	Fábrica 4	Oferta
Depósito 1	100 2	3	4	6	0
Depósito 2	25 1	50 5	45 8	3	0
Depósito 3	8	5	1	4	80
Depósito 4	4	5	6	3	95
Demanda	0	0	85	90	

La nueva asignación a la nueva esquina al noroeste es 80, cantidad que queda en el Depósito 3.

	Fábrica 1	Fábrica 2	Fábrica 3	Fábrica 4	Oferta
Depósito 1	100 2	3	4	6	0
Depósito 2	25 1	50 5	45 8	3	0
Depósito 3	8	5	80 1	4	80 – 80 = 0
Depósito 4	4	5	6	3	95
Demanda	0	0	85 – 80 = 5	90	

El Depósito 3 ha quedado vacío, oferta 0 litros, con lo que se procede a eliminar la fila, continuando el proceso.

	Fábrica 1	Fábrica 2	Fábrica 3	Fábrica 4	Oferta
Depósito 1	100 2	3	4	6	0
Depósito 2	25 1	50 5	45 8	3	0
Depósito 3	8	5	80 1	4	0
Depósito 4	4	5	6	3	95
Demanda	0	0	5	90	

La nueva asignación a la nueva esquina al noroeste es 5, cantidad que queda en el Depósito 4.

	Fábrica 1	Fábrica 2	Fábrica 3	Fábrica 4	Oferta
Depósito 1	100 2	3	4	6	0
Depósito 2	25 1	50 5	45 8	3	0
Depósito 3	8	5	80 1	4	0
Depósito 4	4	5	5 6	3	95 – 5 = 90
Demanda	0	0	5 – 5 = 0	90	

La Fábrica 3 ha cubierto su demanda, la cantidad demandada es 0, con lo que se procede a eliminar la columna.

	Fábrica 1	Fábrica 2	Fábrica 3	Fábrica 4	Oferta
Depósito 1	100 2	3	4	6	0
Depósito 2	25 1	50 5	45 8	3	0
Depósito 3	8	5	80 1	4	0
Depósito 4	4	5	5 6	90 3	90 – 90 = 0
Demanda	0	0	0	0	

El cuadro de asignaciones y de costo se refleja en la tabla:

	Fábrica 1	Fábrica 2	Fábrica 3	Fábrica 4
Depósito 1	100 2 200		7	
Depósito 2	25 1 25	50 5 250	45 8 360	
Depósito 3			80 1 80	
Depósito 4			5 6 30	90 3 270
Costo	225	250	470	270

La solución básica factible inicial reporta un costo mínimo (valor de la función objetivo) de: $Z = 225 + 250 + 470 + 270 = 1.215$ euros

ESQUINA NOROESTE: **Una empresa enérgetica dispone de cuatro centrales para satisfacer la demanda diaria de energía eléctrica en cuatro provincias de Castilla y León. Las centrales eléctricas pueden satisfacer, respectivamente, 80, 30, 60 y 45 millones de Kw diarios. Las necesidades de las provincias (A, B, C, D) , respectivamente, son de 70, 40, 70 y 35 millones de kw al día.**
La tabla adjunta refleja el costo asociado al envío de suministro eléctrico por cada millón de kw entre cada central y cada ciudad.

	A	B	C	D
Central 1	5	2	7	3
Central 2	3	6	6	1
Central 3	6	1	2	4
Central 4	4	3	6	6

Obtener un modelo de programación que permita satisfacer las necesidades de las cuatro provincias y minimizar los costos asociados al transporte de energía.

Solución:

Para el modelo se supone que existe el equilibrio entre la oferta y la demanda.

Las especificaciones del problema se completan en la siguiente tabla:

	A	B	C	D	Oferta
Central 1	5	2	7	3	80
Central 2	3	6	6	1	30
Central 3	6	1	2	4	60
Central 4	4	3	6	6	45
Demanda	70	40	70	35	

El siguiente paso es seleccionar la demanda a la esquina más al noroeste, de manera que no sobrepase la oferta, en caso contrario se asigna la mayor cantidad. En este caso se asignan 70 millones de kw a la provincia A.

	A		B	C	D	Oferta
Central 1	70	5	2	7	3	80 – 70 = 10
Central 2	3		6	6	1	30
Central 3	6		1	2	4	60
Central 4	4		3	6	6	45
Demanda	70 – 70 = 0		40	70	35	

La demanda de la provincia A es cero, una vez restada la cantidad asignada. Se procede a eliminar la columna, continuando el proceso de asignación.

En la nueva esquina noroeste (provincia B) se asigna los 10 kw restantes, quedando la oferta de la Central 1 a cero. La provincia B queda todavía con una demanda de 30 millones kw.

	A		B		C	D	Oferta
Central 1	70	5	10	2	7	3	10 – 10 = 0
Central 2	3		6		6	1	30
Central 3	6		1		2	4	60
Central 4	4		3		6	6	45
Demanda	70 – 70 = 0		40 – 10 = 30		70	35	

Se elimina la primera fila, la Central 1 ya no presenta oferta.

En la nueva esquina noroeste, la Central 2 tiene la misma oferta y demanda (30 milones kw)

	A		B		C	D	Oferta
Central 1	70	5	10	2	7	3	0
Central 2	3		30	6	6	1	30 – 30 = 0
Central 3	6		1		2	4	60
Central 4	4		3		6	6	45
Demanda	70 – 70 = 0		30 – 30 = 0		70	35	

En esta situación, tanto la Oferta como la Demanda se quedan a 0, se elimina arbitrariamente fila o columna, el que queda permanece con oferta o demanda 0.

Se puede utilizar el criterio de anular la fila o columna que presente los costos más elevados, en este caso sería la Central 2.

	A		B		C	D	Oferta
Central 1	70	5	10	2	7	3	0
Central 2	3		30	6	6	1	0
Central 3	6		1		2	4	60
Central 4	4		3		6	6	45
Demanda	0		0		70	35	

En este caso, a la esquina noroeste no se puede asignar valores, teniendo que buscar otra.

	A	B	C	D	Oferta
Central 1	70 5	10 2	7	3	0
Central 2	3	30 6	6	1	0
Central 3	6	1 $\xrightarrow{60}$	2	4	60
Central 4	4	3	6	6	45
Demanda	0	0	70	35	

	A	B	C	D	Oferta
Central 1	70 5	10 2	7	3	0
Central 2	3	30 6	6	1	0
Central 3	6	1	60 2	4	60 – 60 = 0
Central 4	4	3	6	6	45
Demanda	0	0	70 – 60 = 10	35	

Se elimina la Central 3 que oferta 0 millones de kw.

	A	B	C	D	Oferta
Central 1	70 5	10 2	7	3	0
Central 2	3	30 6	6	1	0
Central 3	6	1	60 2	4	0
Central 4	4	3	6	6	35
Demanda	0	0	10	35	

Queda solamente la Central 4 para ofertar, asignando a las provincias C y D las cantidades requeridas.

	A	B	C	D	Oferta
Central 1	70 5	10 2	7	3	0
Central 2	3	30 6	6	1	0
Central 3	6	1	60 2	4	0
Central 4	4	3	10 6	35 6	35 – 35 = 0
Demanda	0	0	0	0	

El cuadro de asignaciones y de costo se refleja en la tabla:

	A	B	C	D
Central 1	**70** **5** **350**	**10** **2** **20**	**7**	
Central 2		**30** **6** **180**		
Central 3			**60** **2** **120**	
Central 4			**10** **6** **60**	**35** **6** **210**
Costo	**350**	**200**	**180**	**210**

Adviértase que método de la Esquina Noroeste tiene un mínimo de cálculos, ignorando los costos, considera todas las restricciones para su elaboración.

Es útil en problemas con innumerables origenes y destinos en los que importe satisfacer las restricciones. Es el algoritmo de transporte menos probable para ofrecer una buena solución de bajo costo.

PROBLEMA DE ASIGNACIÓN

Es una variación el problema original del transporte, variación donde las variables de decisión x_{ij} solo pueden tomar valores binarios (0 o 1) en la solución óptima, lo que supone que la oferta y la demanda están perfectamente alineadas, de hecho ambas son iguales a 1.

El objetivo fundamental del modelo de asignación es resolver ¿Qué origen satisface mejor el destino?

Dado que el modelo está asociado a una gran diversidad de circunstancias, la pregunta puede plantearse en múltiples contextos, como ¿Qué candidato es idóneo para la vacante?, ¿Qué personal es indicado para la línea de producción?, ¿Qué personal es el mejor para ejecutar determinada tarea?.

Una característica particular del modelo de asignación es que para su resolución no es necesario que sea igual el número de orígenes y de destinos, circunstancia que es común en la vida real, generalmente en el contexto laboral, la cantidad de aspirantes es superior al número de vacantes.

El problema del Transporte y el Problema de Asignación son casos particulares de un gran grupo de problemas, llamados Problemas de Flujo en redes.

El objetivo del Problema de Asignación consiste en minimizar cómo deben realizarse las asignaciones para minimizar el coste total, bajo los siguientes supuestos:

- **El número de asignados (n) es igual al número de tareas**
- **Cada asignado se dirige exactamente a una tarea**
- **Cada tarea debe realizarla exactamente un asignado**
- **Hay un costo c_{ij} asociado con el asignado i-ésimo, $i = 1, 2, \ldots, n$**

• MÉTODO HÚNGARO

Es un método de optimización de problemas de asignación, recibe el nombre porque los primeros aportes al métoco clásico fueron de dos matemáticos húngaros: Dénes Kőnig y Jenő Egerváry.

El método húngaro requiere el número de filas y columnas, está diseñado para la resolución de problemas de minimización.

CONTEXTUALIZACIÓN DEL MÉTODO HÚNGARO:

PASO 1: El método construye una *Matriz de Coste* $(n \times m)$, conocida como matriz $(m \times m)$ dado que el número de filas es igual al número de columnas, donde se debe encontrar el elemento más pequeño en cada fila.

PASO 2: Se construye una nueva matriz $(n \times m)$, donde se consignan los valores resultantes de la diferencia entre cada coste (columna de la matriz original) y el valor mínimo de la fila a la que corresponde cada coste (valor mínimo encontrado en el Paso 1). Así se garantiza la obtención de por lo menos un 0 en cada fila y columna.

PASO 3: Con la matriz resultante en el Paso 2, se repiten los dos pasos anteriores ahora con las columnas, es decir, se obtiene el valor mínimo de cada columna, y se calcula la diferencia entre cada elemento de la columna con el correspondiente valor mínimo encontrado. Obteniendo la *Matriz de Coste Reducido*.

PASO 4: Se trazan líneas horizontales o verticales o ambas con el objetivo de cubrir todos los ceros de la *Matriz de Coste Reducido* con el menor número de líneas posibles. Si el número de líneas es gual al número de filas o columnas se ha obrtenido la solución óptima (mejor asignación en el contexto de optimización). Sí el número de líneas es inferior al número de filas o columnas hay que continuar con el Paso 5.

PASO 5: Tomar el menor elemento no cubierto (atravesado) por una línea.
(a) Restar este valor a todos los elementos de las filas no cubiertas (no cruzadas)
(b) Sumar este valor a todos los elementos de las columnas cubiertas (cruzadas)
Finalizado el proceso se vuelve al Paso 4.

ASIGNACIONES: Se inician por la fila que tenga menos ceros y tachando los ceros de la fila y columna donde se realizó la asignación.

MAXIMIZAR POR EL MÉTODO HÚNGARO: Para abordar problemas de maximización es necesario añadir variables de holgura o ficticias hasta obtener el mismo número de filas y columnas, equivalentes a 0 en todas sus componentes.
Si el problema lo permite, pueden crearse variables ficticias duplicadas de una existente.
Como operación adicional se busca el mayor valor tabulado y se resta éste valor a cada una de las celdas.
A partir de la nueva matriz obtenida se aplica el método húngaro como se haría en el caso normal de minimización.

🖫 **MÉTODO HÚNGARO:** Una empresa compra tres impresoras, una de inyección de tinta, una de punto matriz y una láser. Las impresoras se deben asignar a los departamentos de recursos humanos, facturación y dirección.
Debido a lafrecuencia de uso en cada departamento y al tipo de impresora hay un costo en euros de asignación que se adjunta en la tabla. Se desea saber el costo total mínimo de asignación.

	R. Humanos	Facturación	Dirección
Inyección	5	8	9
P. matriz	10	4	7
Láser	4	10	6

Solución:

Para aplicar el método húngaro el modelo tiene que ser balanceado, es decir, el número de filas y el de columnas debe de ser igual.

PASO 1: Se encuentra el menor elemento de cada fila:

	R. Humanos	Facturación	Dirección
Inyección	5	8	9
P. matriz	10	4	7
Láser	4	10	6

PASO 2: Se resta en cada fila de la matriz original el menor elemento encontrado de cada fila:

	R. Humanos	Facturación	Dirección
Inyección	5 − 5 = 0	8 − 5 = 3	9 − 5 = 4
P. matriz	10 − 4 = 6	4 − 4 = 0	7 − 4 = 3
Láser	4 − 4 = 0	10 − 4 = 6	6 − 4 = 2

PASO 3: Se repite en la nueva matriz el mismo proceso con las columnas:

	R. Humanos	Facturación	Dirección
Inyección	0	3	4
P. matriz	6	0	3
Láser	0	6	2

Se resta en cada columna de la nueva matriz el menor elemento encontrado de cada columna:

	R. Humanos	Facturación	Dirección
Inyección	0 − 0 = 0	3 − 0 = 3	4 − 2 = 2
P. matriz	6 − 0 = 6	0 − 0 = 0	3 − 2 = 1
Láser	0 − 0 = 0	6 − 0 = 6	2 − 2 = 0

PASO 4: Se traza la menor cantidad de combinaciones líneas horizontales y verticales a la matriz resultante, con el objetivo de cubrir todos los 0 de la matriz de coste reducido.

MATRIZ DE COSTO REDUCIDO

	R. Humanos	Facturación	Dirección
Inyección	~~0~~	~~3~~	~~2~~
P. matriz	~~6~~	~~0~~	~~1~~
Láser	~~0~~	~~6~~	~~0~~

El algoritmo finaliza al ser el número de líneas tazadas igual al grado de la matriz.

Queda la **Asignación**: En la matriz de costo reducido se inicia por la fila que tenga menos ceros y tachando los ceros de la fila y columna donde se realizó la asignación.

En este caso, no es necesario tachar ceros de fila y columna, la asignación es directa al tener un solo 0 en fila o columna.

	R. Humanos	Facturación	Dirección
Inyección	0 5	3	2
P. matriz	6	0 4	1
Láser	4	6	0 6

La impresora de inyección de tinta va al departamento de recursos humanos. La impresora de punto matriz va al departamento de facturación y la impresora láser va a la dirección.

El costo total mínimo de asignación es: 5 + 4 + 6 = 15 euros.

MÉTODO HÚNGARO: Una compañía eléctrica semanalmente tiene que realizar un mantenimiento preventivo a tres centrales. El tiempo que demanda el mantenimiento de cada central no puede durar más de un día.
La compañía eléctrica trabaja con tres empresas auxiliares de servicios a las que debe asignar el mantenimiento, que dependiendo de su grado de especialización varía el coste de revisión de las centrales. El coste en miles de euros se refleja en la tabla adjunta:

	Central 1	Central 2	Central 3
Empresa A	10	9	5
Empresa B	9	8	3
Empresa C	6	4	7

¿Cuál debe ser la asignación de la empresa auxiliar para que el coste sea el mínimo?

Solución:

Para aplicar el método húngaro el modelo tiene que ser balanceado, es decir, el número de filas y el de columnas debe de ser igual.

PASO 1: Se encuentra el menor elemento de cada fila:

	Central 1	Central 2	Central 3
Empresa A	10	9	5
Empresa B	9	8	3
Empresa C	6	4	7

PASO 2: Se resta en cada fila de la matriz original el menor elemento encontrado de cada fila:

	Central 1	Central 2	Central 3
Empresa A	10 – 5 = 5	9 – 5 = 4	5 – 5 = 0
Empresa B	9 – 3 = 6	8 – 3 = 5	3 – 3 = 0
Empresa C	6 – 4 = 2	4 – 4 = 0	7 – 4 = 3

PASO 3: Se repite en la nueva matriz el mismo proceso con las columnas:

	Central 1	Central 2	Central 3
Empresa A	5	4	0
Empresa B	6	5	0
Empresa C	2	0	3

Se resta en cada columna de la nueva matriz el menor elemento encontrado de cada columna:

MATRIZ DE COSTO REDUCIDO

	Central 1	Central 2	Central 3
Empresa A	5 – 2 = 3	4 – 0 = 4	0 – 0 = 0
Empresa B	6 – 2 = 4	5 – 0 = 5	0 – 0 = 0
Empresa C	2 – 2 = 0	0 – 0 = 0	3 – 0 = 3

PASO 4: Se traza la menor cantidad de combinaciones líneas horizontales y verticales con el objetivo de cubrir todos los 0 de la matriz de coste reducido.

	Central 1	Central 2	Central 3
Empresa A	3	4	0
Empresa B	4	5	0
Empresa C	0	0	3

El menor número de líneas horizontales y/o verticales necesarias para cubrir todos los 0 de la matriz de coste reducido es igual a 2, que es menor que el número de filas o columnas.
En caso de haber sido igual el número de líneas trazadas que el número de filas o columnas, el Algoritmo Húngaro hubiera finalizado.

PASO 5: Hay que seleccionar el menor elemento de los elementos no marcados.

	Central 1	Central 2	Central 3
Empresa A	3	4	0
Empresa B	4	5	0
Empresa C	0	0	3

- Se resta 3 a todos los elementos de las filas no cubiertas (no cruzadas)

	Central 1	Central 2	Central 3
Empresa A	3 – 3 = 0	4 – 3 = 1	0
Empresa B	4 – 3 = 1	5 – 3 = 2	0
Empresa C	0	0	3

- Se suma 3 a todos los elementos de las columnas cubiertas (cruzadas)

MATRIZ DE COSTE REDUCIDO

	Central 1	Central 2	Central 3
Empresa A	0	1	0
Empresa B	1	2	0
Empresa C	0	0	3 + 3 = 6

Se pasa al PASO 4: Se traza la menor cantidad de combinaciones líneas horizontales y verticales con el objetivo de cubrir todos los 0 de la matriz de coste reducido.

MATRIZ DE COSTO REDUCIDO

	Central 1	Central 2	Central 3
Empresa A	~~0~~	~~1~~	~~0~~
Empresa B	~~1~~	~~2~~	~~0~~
Empresa C	~~0~~	~~0~~	~~6~~

El algoritmo finaliza al ser el número de líneas tazadas igual al grado de la matriz.

Queda la Asignación: En la matriz de costo reducido se inicia por la fila que tenga menos ceros y tachando los ceros de la fila y columna donde se realizó la asignación.

En este sentido:

- **Primero: Se asigna a la Empresa B a la Central 3 y se tacha el 0 que hay en la columna de la Central 3**

	Central 1	Central 2	Central 3
Empresa A	0	1	~~0~~
Empresa B	1	2	0
Empresa C	0	0	6

- **Segundo: Se asigna a la Empresa A a la Central 1 y se tacha el 0 que hay en la columna de la Central 1**

	Central 1	Central 2	Central 3
Empresa A	0	1	~~0~~
Empresa B	1	2	0
Empresa C	~~0~~	0	6

- **Tercero: Se asigna a la Empresa C a la Central 2**

	Central 1	Central 2	Central 3
Empresa A	0	1	~~0~~
Empresa B	1	2	0
Empresa C	~~0~~	0	6

	Central 1		Central 2		Central 3	
Empresa A	0	10				
Empresa B					0	3
Empresa C			0	4		

El costo total mínimo de asignación es: (10 + 4 + 3) x 1000 = 17.000 euros.

MÉTODO HÚNGARO (MAXIMIZAR BENEFICIOS): La compañía cafetera Fuenterrebollo dispone de cuatro terrenos disponibles para comercializar su producto. Los terrenos, dependiendo de su ubicación, tienen condiciones particulares de rendimiento. Tres equipos de la compañía cafetera se tienen que hacer cargo del proceso, teniendo que hacerse cargo de dos terrenos un equipo. Un ingenierio agrónomo de la compañía, disponiendo de la capacidad de cosecha (en cientos de sacos de café) de cada uno de los equipos tiene que realizar la asignación para maximizar el rendimiento. La información disponible de capacidad de cosecha se refleja en la tabla adjunta:

	Terreno 1	Terreno 2	Terreno 3	Terreno 4
Equipo A	13	7	12	12
Equipo B	10	13	15	7
Equipo C	13	10	8	8

Solución:

Para aplicar el método húngaro el número de filas y el de columnas debe de ser igual. En consecuencia, hay que crear un Equipo Ficticio y asignarle un número de sacos cosechados equivalente a cero en cada uno de los terrenos.

No obstante, la empresa cafetera ha previsto que uno de los equipos se encargase de dos terrenos, en este caso se crea un Equipo B Bis, que permite prescindir del Equipo Ficticio, con la misma capacidad de cosecha que el Equipo B.

	Terreno 1	Terreno 2	Terreno 3	Terreno 4
Equipo A	13	7	12	12
Equipo B	10	13	15	7
Equipo B Bis	10	13	15	7
Equipo C	13	10	8	8

Una vez que el tabulado se encuentra balanceado hay que encargarse del criterio de optimización, el método húngaro está diseñado para resolver ejercicios de minimización y ahora el objetivo es maximizar.

Para ello, se busca el mayor valor tabulado inicial, en este caso es 15.

	Terreno 1	Terreno 2	Terreno 3	Terreno 4
Equipo A	13	7	12	12
Equipo B	10	13	15	7
Equipo B Bis	10	13	15	7
Equipo C	13	10	8	8

Se resta a 15 el valor de cada una de las celdas:

	Terreno 1	Terreno 2	Terreno 3	Terreno 4
Equipo A	15 – 13 = 2	15 – 7 = 8	15 – 12 = 3	15 – 12 = 3
Equipo B	15 – 10 = 5	15 – 13 = 2	15 – 15 = 0	15 – 7 = 8
Equipo B Bis	15 – 10 = 5	15 – 13 = 2	15 – 15 = 0	15 – 7 = 8
Equipo C	15 – 13 = 2	15 – 10 = 5	15 – 8 = 7	15 – 8 = 7

El tabulado ha quedado de la siguiente manera:

	Terreno 1	Terreno 2	Terreno 3	Terreno 4
Equipo A	2	8	3	3
Equipo B	5	2	0	8
Equipo B Bis	5	2	0	8
Equipo C	2	5	7	7

A partir de este tabulado se puede aplicar el algoritmo del método húngaro como se haría en el caso normal de minimización.

PASO 1: Se encuentra el menor elemento de cada fila:

	Terreno 1	Terreno 2	Terreno 3	Terreno 4
Equipo A	2	8	3	3
Equipo B	5	2	0	8
Equipo B Bis	5	2	0	8
Equipo C	2	5	7	7

PASO 2: Se resta en cada fila de la matriz el menor elemento encontrado en cada fila:

	Terreno 1	Terreno 2	Terreno 3	Terreno 4
Equipo A	2 – 2 = 0	8 – 2 = 6	3 – 2 = 1	3 – 2 = 1
Equipo B	5 – 0 = 5	2 – 0 = 2	0 – 0 = 0	8 – 0 = 8
Equipo B Bis	5 – 0 = 5	2 – 0 = 2	0 – 0 = 0	8 – 0 = 8
Equipo C	2 – 2 = 0	5 – 2 = 3	7 – 2 = 5	7 – 2 = 5

PASO 3: Se repite en la matriz el mismo proceso con las columnas:

	Terreno 1	Terreno 2	Terreno 3	Terreno 4
Equipo A	0	6	1	1
Equipo B	5	2	0	8
Equipo B Bis	5	2	0	8
Equipo C	0	3	5	5

Se resta en cada columna de la matriz el menor elemento encontrado en cada columna:

MATRIZ DEL MÁXIMO RENDIMIENTO

	Terreno 1	Terreno 2	Terreno 3	Terreno 4
Equipo A	0 − 0 = 0	6 − 2 = 4	1 − 0 = 1	1 − 1 = 0
Equipo B	5 − 0 = 5	2 − 2 = 0	0 − 0 = 0	8 − 1 = 7
Equipo B Bis	5 − 0 = 5	2 − 2 = 0	0 − 0 = 0	8 − 1 = 7
Equipo C	0 − 0 = 0	3 − 2 = 1	5 − 0 = 5	5 − 1 = 4

PASO 4: Se traza la menor cantidad de combinaciones líneas horizontales y verticales con el objetivo de cubrir todos los 0 de la matriz de coste reducido.

	Terreno 1	Terreno 2	Terreno 3	Terreno 4
Equipo A	~~0~~	~~4~~	~~1~~	~~0~~
Equipo B	~~5~~	~~0~~	~~0~~	~~7~~
Equipo B Bis	~~5~~	~~0~~	~~0~~	~~7~~
Equipo C	~~0~~	~~1~~	~~5~~	~~4~~

El algoritmo finaliza al ser el número de líneas igual al grado de la matriz.

Queda la Asignación: En la matriz de costo reducido se inicia por la fila que tenga menos ceros y tachando los ceros de la fila y columna donde se realizó la asignación.

En este sentido:

- Primero: Al Equipo C se le asigna el Terreno 1 y se tacha el 0 de la columna del Terreno 1

	Terreno 1	Terreno 2	Terreno 3	Terreno 4
Equipo A	~~0~~	4	1	0
Equipo B	5	0	0	7
Equipo B Bis	5	0	0	7
Equipo C	0	1	5	4

♦ **Segundo: Al equipo A se asigna el Terreno 4**

	Terreno 1	Terreno 2	Terreno 3	Terreno 4
Equipo A	~~0~~	4	1	0
Equipo B	5	0	0	7
Equipo B Bis	5	0	0	7
Equipo C	0	1	5	4

♦ **Tercero: El equipo B se encarga del Terreno 3 y el equipo B Bis del Terreno 2.**

	Terreno 1	Terreno 2	Terreno 3	Terreno 4
Equipo A	~~0~~	4	1	0
Equipo B	5	~~0~~	0	7
Equipo B Bis	5	0	~~0~~	7
Equipo C	0	1	5	4

MÁXIMO BENEFICIO: Considerando la capacidad de la cosecha, la cantidad máxima de sacos de café cosechados (en cientos) será:

	Terreno 1	Terreno 2	Terreno 3	Terreno 4
Equipo A				12
Equipo B			15	
Equipo B Bis		13		
Equipo C	13			

Máximo de sacos cosechados: $100 \times (13 + 13 + 15 + 12) = 5.300$ **sacos de café**

MÉTODO HÚNGARO: Una empresa de transportes tiene cuatro modelos diferentes de camiones. Dependiendo de la pericia del conductor para manejar los cambios de la caja de velocidades, el camión consume más o menos combustible. En la actualidad la planta cuenta con tres conductores. Los costos en euros por uso adicional de combustible se muestran en la tabla adjunta.
Encontrar la asignación que minimiza los costos de combustible adicional.

	Camión 1	Camión 2	Camión 3	Camión 4
Conductor A	180	150	200	200
Conductor B	250	305	450	500
Conductor C	200	208	320	100

Solución:

Para aplicar el método húngaro el número de filas y el de columnas debe de ser igual. En consecuencia, hay que crear un Conductor Ficticio y asignarle un número adicional de combustible equivalente a cero en cada uno de los camiones, para que de esta manera no afecte el resultado de la función objetivo.

Al agregar un nuevo conductor, la tabla inicial del problema queda de la siguiente forma:

	Camión 1	Camión 2	Camión 3	Camión 4
Conductor A	180	150	200	200
Conductor B	250	305	450	500
Conductor C	200	208	320	100
Conductor D	0	0	0	0

PASO 1: Se encuentra el menor elemento de cada fila:

	Camión 1	Camión 2	Camión 3	Camión 4
Conductor A	180	150	200	200
Conductor B	250	305	450	500
Conductor C	200	208	320	100
Conductor D	0	0	0	0

PASO 2: Se resta en cada fila de la matriz el menor elemento encontrado en cada fila:

	Camión 1	Camión 2	Camión 3	Camión 4
Conductor A	30	0	50	50
Conductor B	0	55	200	250
Conductor C	100	108	220	0
Conductor D	0	0	0	0

PASO 3: Se repite en la matriz el mismo proceso con las columnas, encontrando el menor elemento por columna.

	Camión 1	Camión 2	Camión 3	Camión 4
Conductor A	30	0	50	50
Conductor B	0	55	200	250
Conductor C	100	108	220	0
Conductor D	0	0	0	0

Se resta en cada columna de la matriz el menor elemento encontrado en cada columna, que no es necesario hacer al tratarse de 0 en cada columna.

PASO 4: Se traza la menor cantidad de combinaciones líneas horizontales y verticales con el objetivo de cubrir todos los 0 de la matriz de costo reducido.

	Camión 1	Camión 2	Camión 3	Camión 4
Conductor A	~~30~~	~~0~~	~~50~~	~~50~~
Conductor B	~~0~~	~~55~~	~~200~~	~~250~~
Conductor C	~~100~~	~~108~~	~~220~~	~~0~~
Conductor D	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~

El algoritmo finaliza al ser el número de líneas igual al grado de la matriz.

Queda la **Asignación**: En la matriz de costo reducido se inicia por la fila que tenga menos ceros y tachando los ceros de la fila y columna donde se realizó la asignación.

En la práctica, se intercambian las filas para obtener 0 de asignación en la diagonal principal.

	Camión 1	Camión 2	Camión 3	Camión 4
Conductor B	0	55	200	250
Conductor A	30	0	50	50
Conductor D	0	0	0	0
Conductor C	100	108	220	0

- Al Conductor B se asigna el Camión 1 y se tacha el 0 de la columna del Camión 1

	Camión 1	Camión 2	Camión 3	Camión 4
Conductor B	0	55	200	250
Conductor A	30	0	50	50
Conductor D	~~0~~	0	0	0
Conductor C	100	108	220	0

- Al Conductor A se asigna el Camión 2 y se tacha el 0 de la columna del Camión 2

	Camión 1	Camión 2	Camión 3	Camión 4
Conductor B	0	55	200	250
Conductor A	30	0	50	50
Conductor D	~~0~~	~~0~~	0	0
Conductor C	100	108	220	0

- Al Conductor D se le asigna el Camión 3

	Camión 1	Camión 2	Camión 3	Camión 4
Conductor B	0	55	200	250
Conductor A	30	0	50	50
Conductor D	~~0~~	~~0~~	0	0
Conductor C	100	108	220	0

- Al Conductor C se asigna el Camión 4 y se tacha el 0 de la columna del Camión 4

	Camión 1	Camión 2	Camión 3	Camión 4
Conductor B	0	55	200	250
Conductor A	30	0	50	50
Conductor D	~~0~~	~~0~~	0	~~0~~
Conductor C	100	108	220	0

La asignación óptima es:

	Camión 1	Camión 2	Camión 3	Camión 4
Conductor B	0 250			
Conductor A		0 150		
Conductor D			0 0	
Conductor C				0 100

El costo total mínimo de asignación es: 250 + 150 + 100 = 500 euros.

🖫 **MÉTODO HÚNGARO:** En informatica de ENAIRE hay tres lugares que ocupar durante seis meses: programador, analista y supervisor. Hay cuatro candidatos seleccionados para ocupar estos puestos, dependiendo el salario de cada uno del puesto que tenga. En tabla adjunta se facilita esta información en euros. Se pide el costo mínimo de asignación de los candidatos.

	Programador	Analista	Supervisor
Candidato A	11.800	15.000	20.000
Candidato B	12.500	13.000	14.400
Candidato C	20.000	18.000	23.000
Candidato D	18.000	17.000	16.000

Solución:

Para aplicar el método húngaro el número de filas y el de columnas debe de ser igual. En consecuencia, hay que crear un Puesto Ficticio para balancear el problema y asignarle una cantidad económica equivalente a cero, para que de esta manera no afecte el resultado de la función objetivo.

Al agregar un nuevo puesto, la tabla inicial del problema queda:

	Programador	Analista	Supervisor	Ficticio
Candidato A	11.800	15.000	20.000	0
Candidato B	12.500	13.000	14.400	0
Candidato C	20.000	18.000	23.000	0
Candidato D	18.000	17.000	16.000	0

PASO 1 - PASO 2: Se encuentra el menor elemento de cada fila, restando en cada fila de la matriz el menor elemento encontrado en cada fila.
En este caso, no tiene sentido porque el menor elemento de cada fila es 0. La tabla inicial queda sin alterar.

PASO 3: Se encuentra el menor elemento de cada columna.

	Programador	Analista	Supervisor	Ficticio
Candidato A	11.800	15.000	20.000	0
Candidato B	12.500	13.000	14.400	0
Candidato C	20.000	18.000	23.000	0
Candidato D	18.000	17.000	16.000	0

Se resta en cada columna de la matriz el menor elemento encontrado en cada columna.

	Programador	Analista	Supervisor	Ficticio
Candidato A	0	2.000	5.600	0
Candidato B	700	0	0	0
Candidato C	8.200	5.000	8.600	0
Candidato D	6.200	4.000	1.600	0

PASO 4: **Se traza la menor cantidad de combinaciones líneas horizontales y verticales con el objetivo de cubrir todos los 0 de la matriz de costo reducido.**

	Programador	Analista	Supervisor	Ficticio
Candidato A	~~0~~	~~2.000~~	~~5.600~~	~~0~~
Candidato B	~~700~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~
Candidato C	8.200	5.000	8.600	~~0~~
Candidato D	6.200	4.000	1.600	~~0~~

El menor número de líneas horizontales y/o verticales necesarias para cubrir todos los 0 de la matriz de coste reducido es igual a 3, que es menor que el número de filas o columnas. El Algoritmo Húngaro no termina.

PASO 5: **Hay que seleccionar el menor elemento de los elementos no marcados.**

	Programador	Analista	Supervisor	Ficticio
Candidato A	~~0~~	~~2.000~~	~~5.600~~	~~0~~
Candidato B	~~700~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~
Candidato C	8.200	5.000	8.600	~~0~~
Candidato D	6.200	4.000	1.600	~~0~~

- **Se resta 1.600 a todos los elementos de las filas no cubiertas (no cruzadas)**

	Programador	Analista	Supervisor	Ficticio
Candidato A	~~0~~	~~2.000~~	~~5.600~~	~~0~~
Candidato B	~~700~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~
Candidato C	8.200 – 1.600 = = 6.600	5.000 – 1.600 = = 3.400	8.600 – 1.600 = = 7.000	~~0~~
Candidato D	6.200 – 1.600 = = 4.600	4.000 – 1.600 = = 2.400	1.600 – 1.600 = = 0	~~0~~

	Programador	Analista	Supervisor	Ficticio
Candidato A	0	2.000	5.600	0
Candidato B	700	0	0	0
Candidato C	6.600	3.400	7.000	0
Candidato D	4.600	2.400	0	0

- **Se suma 1.600 a todos los elementos de las columnas cubiertas (líneas cruzadas)**

	Programador	Analista	Supervisor	Ficticio
Candidato A	0	2.000	5.600	1.600
Candidato B	700	0	0	1.600
Candidato C	6.600	3.400	7.000	0
Candidato D	4.600	2.400	0	0

Se pasa al PASO 4: Se traza la menor cantidad de combinaciones líneas horizontales y verticales con el objetivo de cubrir todos los 0 de la matriz de coste reducido.

	Programador	Analista	Supervisor	Ficticio
Candidato A	0	2.000	5.600	1.600
Candidato B	700	0	0	1.600
Candidato C	6.600	3.400	7.000	0
Candidato D	4.600	2.400	0	0

El algoritmo finaliza al ser el número de líneas igual al grado de la matriz.

Queda la Asignación: En la matriz de costo reducido se inicia por la fila que tenga menos ceros y tachando los ceros de la fila y columna donde se realizó la asignación.

Para una visualización más sencilla, se intercambian las filas para obtener 0 de asignación en la diagonal principal.

	Programador	Analista	Supervisor	Ficticio
Candidato A	0	2.000	5.600	1.600
Candidato B	700	0	0	1.600
Candidato D	4.600	2.400	0	0
Candidato C	6.600	3.400	7.000	0

- **El Candidato A ocupa el puesto de Programador**
- **El Candidato B ocupa el puesto de Analista**
- **El Candidato D ocupa el puesto de Supervisor**

- **Al Candidato C no se slecciona.**

El costo total mínimo de asignación es:

	Programador		Analista		Supervisor	
Candidato A	**0**	**11.800**				
Candidato B			**0**	**13.000**		
Candidato D					**0**	**16.000**

11.800 + 13.000 + 16.000 = 40.800 euros.

Una fábrica dispone de tres centros de distribución A, B y C, cuyas disponibilidades de materia prima son 100, 120 y 120 toneladas respectivamente. Dicha materia prima debe de ser entregada a cinco almacenes I, II, III, IV y V, los cuales deben recibir respectivamente 40, 50, 70, 90 y 90 toneladas. Determinar una solución inicial por el método de la esquina N.O.

MATRIZ DE COSTES

ORÍGENES	DESTINOS (Almacenes)				
	I	II	III	IV	V
Centro A	10	20	5	9	10
Centro B	2	10	8	30	5
Centro C	1	20	7	10	4

Solución:

Las especificaciones del modelo se completan en la tabla:

MATRIZ DE COSTES

ORÍGENES	DESTINOS (Almacenes)					Oferta
	I	II	III	IV	V	
Centro A	10	20	5	9	10	100
Centro B	2	10	8	30	5	120
Centro C	1	20	7	10	4	120
Demanda	40	50	70	90	90	

La matriz es balanceada, las unidades que se ofertan coinciden con las unidades que se demandan.

El siguiente paso es seleccionar la demanda a la esquina más al noroeste, de manera que no sobrepase la oferta. En caso contrario, se asigna la mayor cantidad posible. En este caso se asignan 40 toneladas.

ORÍGENES	DESTINOS (Almacenes)					Oferta
	I	II	III	IV	V	
Centro A	40 | 10	20	5	9	10	60
Centro B	2	10	8	30	5	120
Centro C	1	20	7	10	4	120
Demanda	0	50	70	90	90	

La demanda del Almacén I es cero, una vez que se ha asignado la cantidad de 40 toneladas. Se procede a eliminar la columna, quedando la oferta del Centro A con 60 toneladas, se continúa con el proceso.

En la nueva esquina noroeste (Almacén II) se asignan 50 toneladas, quedadno la demanda del Almacén II surtida, mientras que en el Centro A solo quedan 10 toneladas. Se elimina la columna del Almacén II.

ORÍGENES	DESTINOS (Almacenes)					Oferta
	I	II	III	IV	V	
Centro A	40 10	50 20	5	9	10	10
Centro B	2	10	8	30	5	120
Centro C	1	20	7	10	4	120
Demanda	0	0	70	90	90	

En la esquina noroeste (Almacén III) se pueden asignar 10 toneladas, dado que el Centro A solo dispone de ésta cantidad. En el Almacén III quedan 60 toneladas por cumplimentar, mientras que el Centro A se encuentra a cero. Se tacha la fila del Centro A.

ORÍGENES	DESTINOS (Almacenes)					Oferta
	I	II	III	IV	V	
Centro A	40 10	50 20	10 5	9	10	0
Centro B	2	10	8	30	5	120
Centro C	1	20	7	10	4	120
Demanda	0	0	60	90	90	

En la nueva esquina noroeste (Almacén III) se asignan las 60 toneladas restantes, mientras que la disponibilidad del Centro B queda reducida a 60 toneladas. El Almacén III ha quedado servido, por lo que se tacha la columnas del Almacén III

ORÍGENES	DESTINOS (Almacenes)					Oferta
	I	II	III	IV	V	
Centro A	40 10	50 20	10 5	9	10	0
Centro B	2	10	60 8	30	5	60
Centro C	1	20	7	10	4	120
Demanda	0	0	0	90	90	

En la nueva esquina noroeste (Almacén IV) solo se pueden asignar 60 toneladas, ofertada por el Centro B, quedando pendientes 30 toneladas que servir, mientras el Centro B se queda inutilizado, se tacha la fila del Centro B.

<table>
<tr><th rowspan="2">ORÍGENES</th><th colspan="10">DESTINOS (Almacenes)</th><th rowspan="2">Oferta</th></tr>
<tr><th colspan="2">I</th><th colspan="2">II</th><th colspan="2">III</th><th colspan="2">IV</th><th colspan="2">V</th></tr>
<tr><td>Centro A</td><td>40</td><td>10</td><td>50</td><td>20</td><td>10</td><td>5</td><td colspan="2">9</td><td colspan="2">10</td><td>0</td></tr>
<tr><td>Centro B</td><td colspan="2">2</td><td colspan="2">10</td><td>60</td><td>8</td><td>60</td><td>30</td><td colspan="2">5</td><td>0</td></tr>
<tr><td>Centro C</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">20</td><td colspan="2">7</td><td colspan="2">10</td><td colspan="2">4</td><td>120</td></tr>
<tr><td>Demanda</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">30</td><td colspan="2">90</td><td></td></tr>
</table>

En la nueva esquina noroeste (Almacén IV) se asignan las 30 toneladas restantes, que cumplimenta la oferta del Centro C. La columna del Almacén IV se tacha porque ha sido surtido.

<table>
<tr><th rowspan="2">ORÍGENES</th><th colspan="10">DESTINOS (Almacenes)</th><th rowspan="2">Oferta</th></tr>
<tr><th colspan="2">I</th><th colspan="2">II</th><th colspan="2">III</th><th colspan="2">IV</th><th colspan="2">V</th></tr>
<tr><td>Centro A</td><td>40</td><td>10</td><td>50</td><td>20</td><td>10</td><td>5</td><td colspan="2">9</td><td colspan="2">10</td><td>0</td></tr>
<tr><td>Centro B</td><td colspan="2">2</td><td colspan="2">10</td><td>60</td><td>8</td><td>60</td><td>30</td><td colspan="2">5</td><td>0</td></tr>
<tr><td>Centro C</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">20</td><td colspan="2">7</td><td>30</td><td>10</td><td colspan="2">4</td><td>90</td></tr>
<tr><td>Demanda</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">90</td><td></td></tr>
</table>

Finalmente, se asigna las 90 toneladas demandadas por el Almacén IV a la nueva esquina noroeste, mientras que el Centro C se queda a cero.

<table>
<tr><th rowspan="2">ORÍGENES</th><th colspan="10">DESTINOS (Almacenes)</th><th rowspan="2">Oferta</th></tr>
<tr><th colspan="2">I</th><th colspan="2">II</th><th colspan="2">III</th><th colspan="2">IV</th><th colspan="2">V</th></tr>
<tr><td>Centro A</td><td>40</td><td>10</td><td>50</td><td>20</td><td>10</td><td>5</td><td colspan="2">9</td><td colspan="2">10</td><td>0</td></tr>
<tr><td>Centro B</td><td colspan="2">2</td><td colspan="2">10</td><td>60</td><td>8</td><td>60</td><td>30</td><td colspan="2">5</td><td>0</td></tr>
<tr><td>Centro C</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">20</td><td colspan="2">7</td><td>30</td><td>10</td><td>90</td><td>4</td><td>0</td></tr>
<tr><td>Demanda</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">0</td><td></td></tr>
</table>

Solución inicial:

ORÍGENES	DESTINOS (Almacenes)					Oferta
	I	II	III	IV	V	
Centro A	40	50	10			100
Centro B			60	60		120
Centro C				30	90	120
Demanda	40	50	70	90	90	

Una estación terminal tiene capacidad para acomodar seis camiones simultáneamente. El situar cada camión en uno de los seis lugares (A, B, C, D, E y F) implica un coste (de distribución y transferencia de cargas) que se refleja en la tabla adjunta.

Camión	Lugares de carga					
	A	B	C	D	E	F
1	5	5	6	3	7	3
2	7	2	4	8	1	6
3	6	4	3	5	4	2
4	2	3	7	8	4	6

Un determinado día hay que situar los camiones 1, 2, 3 y 4 en la terminal. Determinar el estacionamiento óptimo.

Solución:

Para aplicar el método húngaro debe ser igual el número de filas y columnas, en consecuencia hay que crear dos variables ficticias y asignar un coste igual a 0 en cada uno de los lugares de carga.

Camión	Lugares de carga					
	A	B	C	D	E	F
1	5	5	6	3	7	3
2	7	2	4	8	1	6
3	6	4	3	5	4	2
4	2	3	7	8	4	6
F1	0	0	0	0	0	0
F2	0	0	0	0	0	0

- **Se encuentra el menor elemento de cada fila y se resta éste valor a cada elemento encontrado en la fila.**

Camión	Lugares de carga					
	A	B	C	D	E	F
1	5 − 3 = 2	5 − 3 = 2	6 − 3 = 3	3 − 3 = 0	7 − 3 = 4	3 − 3 = 0
2	7 − 1 = 6	2 − 1 = 1	4 − 1 = 3	8 − 1 = 7	1 − 1 = 0	6 − 1 = 5
3	6 − 2 = 4	4 − 2 = 2	3 − 2 = 1	5 − 2 = 3	4 − 2 = 2	2 − 2 = 0
4	2 − 2 = 0	3 − 2 = 1	7 − 2 = 5	8 − 2 = 6	4 − 2 = 2	6 − 2 = 4
F1	0	0	0	0	0	0
F2	0	0	0	0	0	0

- **No hay que hacer la misma operación con cada columna porque el menor elemento de cada columna es 0.**

MATRIZ DE COSTE REDUCIDO

Camión	Lugares de carga					
	A	B	C	D	E	F
1	2	2	3	0	4	0
2	6	1	3	7	0	5
3	4	2	1	3	2	0
4	0	1	5	6	2	4
F1	0	0	0	0	0	0
F2	0	0	0	0	0	0

- **Se traza el menor número de líneas horizontales y/o vérticales necesarias para cubrir todos los 0 de la matriz:**

Camión	Lugares de carga					
	A	B	C	D	E	F
1	2	2	3	0	4	0
2	6	1	3	7	0	5
3	4	2	1	3	2	0
4	0	1	5	6	2	4
F1	0	0	0	0	0	0
F2	0	0	0	0	0	0

Se requieren trazar seis líneas para cubrir todos los 0, la misma cantidad que el número de filas o columnas de la matriz, con lo que el algoritmo por el método húngaro ha finalizado.

- **La Asignación comienza por la fila que tenga menos ceros y tachando los ceros de la fila y columna de la celda donde se realizó la asignación.**

Camión	Lugares de carga					
	A	B	C	D	E	F
1	2	2	3	0	4	0
2	6	1	3	7	0	5
3	4	2	1	3	2	0
4	0	1	5	6	2	4
F1	~~0~~	0	0	0	0	0
F2	~~0~~	0	0	0	0	0

Camión	Lugares de carga					
	A	B	C	D	E	F
1	2	2	3	0	4	0
2	6	1	3	7	0	5
3	4	2	1	3	2	0
4	0	1	5	6	2	4
F1	~~0~~	0	0	0	~~0~~	0
F2	~~0~~	0	0	0	~~0~~	0

Camión	Lugares de carga					
	A	B	C	D	E	F
1	2	2	3	0	4	~~0~~
2	6	1	3	7	0	5
3	4	2	1	3	2	0
4	0	1	5	6	2	4
F1	~~0~~	0	0	0	~~0~~	~~0~~
F2	~~0~~	0	0	0	~~0~~	~~0~~

Camión	Lugares de carga					
	A	B	C	D	E	F
1	2	2	3	0	4	~~0~~
2	6	1	3	7	0	5
3	4	2	1	3	2	0
4	0	1	5	6	2	4
F1	~~0~~	0	0	~~0~~	~~0~~	~~0~~
F2	~~0~~	0	0	~~0~~	~~0~~	~~0~~

La asignación óptima:

Camión	Lugares de carga					
	A	B	C	D	E	F
1				3		
2					1	
3						2
4	2					

El estacionamiento óptimo implica un coste mínimo $z = 2 + 3 + 1 + 2 = 8$

Una empresa dispone de cinco máquinas, así como de otros tantos operarios para asignarlos a las mismas. Siendo la matriz de costes:

Operarios	Máquinas				
	1	2	3	4	5
A	40	30	80	80	60
B	80	70	40	30	0
C	85	75	50	60	25
D	45	60	80	70	90
E	50	70	40	55	55

a) Establecer la asignación de coste mínimo.
b) Resolver suponiendo que la matriz dada corresponde a la utilidad de asignar a cada operario a una máquina determinada.

Solución:

a) Se encuentra el menor elemento de cada fila y se resta éste valor a cada elemento de la fila correspondiente.

Operarios	Máquinas				
	1	2	3	4	5
A	40 – 30 = 10	30 – 30 = 0	80 – 30 = 50	80 – 30 = 50	60 – 30 = 30
B	80	70	40	30	0
C	85 – 25 = 60	75 – 25 = 50	50 – 25 = 25	60 – 25 = 35	25 – 25 = 0
D	45 – 45 = 0	60 – 45 = 15	80 – 45 = 35	70 – 45 = 25	90 – 25 = 45
E	50 – 40 = 10	70 – 40 = 30	40 – 40 = 0	55 – 40 = 15	55 – 40 = 15

- Se encuentra el menor elemento de cada columna y se resta éste valor a cada elemento de la columna correspondiente.

MATRIZ DE COSTE REDUCIDO

Operarios	Máquinas				
	1	2	3	4	5
A	10	0	50	50 – 15 = 35	30
B	80	70	40	30 – 15 = 15	0
C	60	50	25	35 – 15 = 20	0
D	0	15	35	25 – 15 = 10	45
E	10	30	0	15 – 15 = 0	15

- Se traza el menor número de líneas horizontales y/o vérticales necesarias para cubrir todos los 0 de la matriz:

MATRIZ DE COSTE REDUCIDO

Operarios	Máquinas				
	1	2	3	4	5
A	10	0	50	35	30
B	80	70	40	15	0
C	60	50	25	20	0
D	0	15	35	10	45
E	10	30	0	0	15

El menor número de líneas horizontales y/o verticales necesarias para cubrir todos los 0 de la matriz de coste reducido son 4, que es menor que el número de filas o columnas.

- En este caso, se selecciona el menor elemento de los elementos no marcados (valor 10) y se resta 10 a a todos los elementos de las filas no cubiertas (no cruzadas)

Operarios	Máquinas				
	1	2	3	4	5
A	10	0	50	35	30
B	80	70 − 10 = 60	40 − 10 = 30	15 − 10 = 5	0
C	60	50 − 10 = 40	25 − 10 = 15	20 − 10 = 10	0
D	0	15 − 10 = 5	35 − 10 = 25	10 − 10 = 0	45
E	10	30	0	0	15

- Se suma 10 a todos los elementos de las columnas cubiertas (cruzadas)

Operarios	Máquinas				
	1	2	3	4	5
A	10 + 10 = 20	0	50	35	30 + 10 = 40
B	80	60	30	5	0
C	60	40	15	10	0
D	0	5	35	0	45
E	10 + 10 = 20	30	0	0	15 + 10 = 25

- Se repite la traza del menor número de líneas horizontales y/o vérticales necesarias para cubrir todos los 0 de la matriz:

Operarios	Máquinas				
	1	2	3	4	5
A	20	0	50	35	40
B	80	60	30	5	0
C	60	40	15	10	0
D	0	5	35	0	45
E	20	30	0	0	25

El número de líneas trazadas vuelve a ser menor que el número de filas o columnas.

- Se selecciona el menor elemento de los elementos no marcados (valor 5) y se resta 5 a a todos los elementos de las filas no cubiertas (no cruzadas)

Operarios	Máquinas				
	1	2	3	4	5
A	15	0	45	30	40
B	75	60	25	0	0
C	55	40	10	5	0
D	0	5	35	0	45
E	20	30	0	0	25

- Se suma 5 a todos los elementos de las columnas cubiertas (cruzadas en celdas)

Operarios	Máquinas				
	1	2	3	4	5
A	15	0	45	30	40
B	75	60	25	0	0
C	55	40	10	5	0
D	0	10	35	0	50
E	20	35	0	0	30

- Se repite la traza del menor número de líneas horizontales y/o vérticales necesarias para cubrir todos los 0 de la matriz:

Operarios	Máquinas				
	1	2	3	4	5
A	15	0	45	30	40
B	75	60	25	0	0
C	55	40	10	5	0
D	0	10	35	0	50
E	20	35	0	0	30

El menor número de líneas trazadas es igual al número de filas o columnas, el algoritmo del método húngaro ha finalizado.

- **ASIGNACIONES: Se inician por la fila que tenga menos ceros y tachando los ceros de la fila y columna donde se realizó la asignación. En caso de tener que elegir se hace en el orden alfabético de los destinos.**

Se procede al marcado de ceros:

Operarios	Máquinas				
	1	2	3	4	5
A	15	0	45	30	40
B	75	60	25	0	0
C	55	40	10	5	0
D	0	10	35	0	50
E	20	35	0	0	30

Asignación óptima:

Operario	Máquina
A	2
B	4
C	5
D	1
E	3

Valor de la función objetivo: $z = 30 + 30 + 25 + 45 + 40 = 170$

b) La matriz de costes asigna a cada operario a una máquina determinada

Operarios	Máquinas				
	1	2	3	4	5
A	40	30	80	80	60
B	80	70	40	30	0
C	85	75	50	60	25
D	45	60	80	70	90
E	50	70	40	55	55

Se transforma a un problema de mínimo cambiando todos los elementos de la matriz: Se resta en la celda de cada columna el mayor dato de la columna corresponddiente del dato obtenido.

Operarios	Máquinas				
	1	2	3	4	5
A	85 – 40 = 45	75 – 30 = 45	80 – 80 = 0	80 – 80 = 0	90 – 60 = 30
B	85 – 80 = 5	75 – 70 = 5	80 – 40 = 40	80 –30 = 50	90 – 0 = 90
C	85 – 85 = 0	75 – 75 = 0	80 – 50 = 30	80 –60 = 20	90 – 25 = 65
D	85 – 45 = 40	75 – 60 = 15	80 – 80 = 0	80 –70 = 10	90 – 90 = 0
E	85 – 50= 35	75 – 70 = 5	80 – 40 = 40	80 –55 = 25	90 – 55 = 35

Obteniendo:

Operarios	Máquinas				
	1	2	3	4	5
A	45	45	0	0	30
B	5	5	40	50	90
C	0	0	30	20	65
D	40	15	0	10	0
E	35	5	40	25	35

- **Se encuentra el menor elemento de cada fila y se resta éste valor a cada elemento de la fila correspondiente.**

Operarios	Máquinas				
	1	2	3	4	5
A	45	45	0	0	30
B	5 – 5 = 0	5 – 5 = 0	40 – 5 = 35	50 – 5 = 45	90 – 5 = 85
C	0	0	30	20	65
D	40	15	0	10	0
E	35 – 5 = 30	5 – 5 = 0	40 – 5 = 35	25 – 5 = 20	35 – 5 = 30

- **Como en cada columna hay al menos un cero, la tabla no se transforma al restar a cada elemento de cada columna el menor elemento encontrado en la correspondiente columna.**

Operarios	Máquinas				
	1	2	3	4	5
A	45	45	0	0	30
B	0	0	35	45	85
C	0	0	30	20	65
D	40	15	0	10	0
E	30	0	35	20	30

- **Se traza el menor número de líneas horizontales y/o vérticales necesarias para cubrir todos los 0 de la matriz:**

Operarios	Máquinas				
	1	2	3	4	5
A	45	45	0	0	30
B	0	0	35	45	85
C	0	0	30	20	65
D	40	15	0	10	0
E	30	0	35	20	30

El menor número de líneas trazadas 4 inferior al número de filas o columnas.

- **Se selecciona el menor elemento de los elementos no marcados (valor 20) y se resta 20 a a todos los elementos de las filas no cubiertas (no cruzadas)**

Operarios	Máquinas				
	1	2	3	4	5
A	45	45	0	0	30
B	0	0	15	25	65
C	0	0	10	0	45
D	40	15	0	10	0
E	30	0	15	0	10

- **Se suma 20 a todos los elementos de las columnas cubiertas (cruzadas en celdas)**

Operarios	Máquinas				
	1	2	3	4	5
A	65	65	0	0	30
B	0	0	15	25	65
C	0	0	10	0	45
D	60	35	0	10	0
E	30	0	15	0	10

- **Se traza el menor número de líneas horizontales y/o vérticales necesarias para cubrir todos los 0 de la matriz:**

Operarios	Máquinas				
	1	2	3	4	5
A	65	65	0	0	30
B	0	0	15	25	65
C	0	0	10	0	45
D	60	35	0	10	0
E	30	0	15	0	10

El menor número de líneas trazadas 5 ies igual al número de filas o columnas, el algoritmo del método húngaro ha finalizado.

ASIGNACIONES: Se inician por la fila que tenga menos ceros y tachando los ceros de la fila y columna donde se realizó la asignación. En caso de tener que elegir se hace en el orden alfabético de los destinos.
Se procede al marcado de ceros:

Operarios	Máquinas				
	1	2	3	4	5
A	65	65	0	~~0~~	30
B	0	~~0~~	15	25	65
C	~~0~~	0	10	~~0~~	45
D	60	35	~~0~~	10	0
E	30	~~0~~	15	0	10

O bien,

Operarios	Máquinas				
	1	2	3	4	5
A	65	65	0	0	30
B	0	~~0~~	15	25	65
C	0	~~0~~	10	0	45
D	60	35	0	10	0
E	30	0	15	~~0~~	10

Operarios	Máquinas				
	1	2	3	4	5
A	65	65	0	0	30
B	0	$\cancel{0}$	15	25	65
C	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	10	0	45
D	60	35	0	10	0
E	30	0	15	$\cancel{0}$	10

Operarios	Máquinas				
	1	2	3	4	5
A	65	65	0	0	30
B	0	$\cancel{0}$	15	25	65
C	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	10	0	45
D	60	35	0	10	0
E	30	0	15	$\cancel{0}$	10

Operarios	Máquinas				
	1	2	3	4	5
A	65	65	0	0	30
B	0	$\cancel{0}$	15	25	65
C	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	10	0	45
D	60	35	$\cancel{0}$	10	0
E	30	0	15	$\cancel{0}$	10

Asignación óptima:

Operario	Máquina
A	3
B	1
C	4
D	5
E	2

Valor de la función objetivo: $z = 80 + 80 + 60 + 90 + 70 = 380$

Lugar	Exigencia
A1	47
A2	82
A3	31
A4	29
A5	66

Delta Airlines se especializa en el transpote de vuelos charters. Cierto día se encuentra con aviones vacíos en los lugares y cantidades descritos en la tabla

Al día siguiente necesita aviones para los siguientes lugares

Lugar	Exigencia
A1	28
A4	36
A6	79
A7	68

El supervisor del tráfico aéreo de la compañía elabora una tabla de distancias en cientos de millas entre los lugares en cuestión, resultando:

Destino / Origen	A1	A4	A6	A7
A1	0	176	49	76
A2	213	72	149	68
A3	39	132	105	163
A4	91	0	63	82
A5	34	76	92	132

Observando el horario de aviones, encuentra que no habrá aviones de A4 a A7, ni desde A3 a A1, resultando imposible los vuelos entre estos lugares.

Calcular una solución inicial y determinar el mejor esquema de vuelos.

Solución:

Las especificaciones del problema se muestran en tabla:

Destino / Origen	A1	A4	A6	A7	Oferta	
A1	0	176	49	76	47	
A2	213	72	149	68	82	
A3	39	132	105	163	31	
A4	91	0	63	82	29	
A5	34	76	92	132	66	
Demanda	28	36	79	68	211	255

La matriz es desbalanceada, es decir, la oferta (exitencias) no es igual a la demanda (exigencias), superando la oferta en 44 unidades a la demanda, por lo que se necesita incluir en la tabla un destino ficticio (A0).

Por otra parte, la imposibilidad de comunicación ente $A3 - A1$ y de $A4 - A7$ obliga a modificar los costes, asignando un coste muy elevado (1000).

Las especificaciones del problema se completan en la siguiente tabla:

Destino Origen	A1	A4	A6	A7	A0	Oferta
A1	0	176	49	76	0	47
A2	213	72	149	68	0	82
A3	1000	132	105	163	0	31
A4	91	0	63	1000	0	29
A5	34	76	92	132	0	66
Demanda	28	36	79	68	44	

♦ Se determinan las medidas de penalización se identifican las distancias más bajas por fila y columna. Después se restan dichos valores y el resultado se denomina *Penalización* (Pe).

	A1	A4	A6	A7	A0	Oferta	1 Pe
A1	0	176	49	76	0	47	0 – 0 = 0
A2	213	72	149	68	0	82	68 – 0 = 68
A3	1000	132	105	163	0	31	105 – 0 = 105
A4	91	0	63	1000	0	29	0 – 0 = 0
A5	34	76	92	132	0	66	34 – 0 = 34
Demanda	28	36	79	68	44		
1 Pe	34 – 0 = 34	72	63 – 49 = 14	8	0		

Se busca la fila o columna donde se encuentre la mayor penalización (Fila A3), donde la menor distancia es 0, asignando a esa celda la mayor cantidad posible de unidades.

En la celda c_{35} se pueden asignar como máximo 31 unidades ofertadas por A1

	A1	A4	A6	A7	A0	Oferta	1 Pe
A1	0	176	49	76	0	47	0
A2	213	72	149	68	0	82	68
A3	1000	132	105	163	31 0	31 – 31 = 0	105
A4	91	0	63	1000	0	29	0
A5	34	76	92	132	0	66	34
Demanda	28	36	79	68	44 – 31 = 13		
1 Pe	34	72	14	8	0		

Queda vacía la oferta de la fila A3 por lo que se procede a eliminarla, reiterando el proceso con nuevas penalizaciones.

	A1	A4	A6	A7	A0		Oferta	2 Pe
A1	0	176	49	76	0		47	0
A2	213	72	149	68	0		82	68
A3	1000	132	105	163	31	0	0	105
A4	91	0	63	1000	0		29	0
A5	34	76	92	132	0		66	34
Demanda	28	36	79	68	13			
2 Pe	34	72	14	8	0			

♦ Se busca la fila o columna donde se encuentre la mayor penalización (Columna A4), donde el menor valor es 0, asignando a la celda c_{42} la mayor cantidad posible de unidades de forma que no sobrepase la cantidad ofertada. En este sentido, se pueden asignar 29 unidades.

	A1	A4		A6	A7	A0		Oferta	2 Pe
A1	0	176		49	76	0		47	0
A2	213	72		149	68	0		82	68
A3	1000	132		105	163	31	0	0	105
A4	91	29	0	63	1000	0		29 – 29 = 0	0
A5	34	76		92	132	0		66	34
Demanda	28	36 – 29 = 7		79	68	13			
2 Pe	34	72		14	8	0			

Queda vacía la oferta de la fila A4 por lo que se procede a eliminarla, reiterando el proceso con nuevas penalizaciones.

	A1	A4		A6	A7	A0		Oferta	3 Pe
A1	0	176		49	76	0		47	49
A2	213	72		149	68	0		82	68
A3	1000	132		105	163	31	0	0	105
A4	91	29	0	63	1000	0		0	0
A5	34	76		92	132	0		66	34
Demanda	28	7		79	68	13			
3 Pe	34	4		43	8	0			

♦ Se busca la fila o columna donde se encuentre la mayor penalización (Fila A2), donde el menor valor es 0, asignando a la celda c_{25} la mayor cantidad posible de unidades de forma que no sobrepase la cantidad ofertada.
En esesta línea, se pueden asignar 13 unidades.

	A1	A4	A6	A7	A0	Oferta	3 Pe
A1	0	176	49	76	0	47	0
A2	213	72	149	68	13 0	82 – 13 = 69	68
A3	1000	132	105	163	31 0	0	105
A4	91	29 0	63	1000	0	0	0
A5	34	76	92	132	0	66	34
Demanda	28	7	79	68	13 – 13 = 0		
3 Pe	34	4	43	8	0		

Queda vacía la oferta de la columna (A0) por lo que se procede a eliminarla.

	A1	A4	A6	A7	A0	Oferta	3 Pe
A1	0	176	49	76	0	47	49
A2	213	72	149	68	13 0	69	68
A3	1000	132	105	163	31 0	0	105
A4	91	29 0	63	1000	0	0	0
A5	34	76	92	132	0	66	34
Demanda	28	7	79	68	0		
3 Pe	34	4	43	8	0		

Se reitera el proceso con nuevas penalizaciones.

♦ Se busca la fila o columna donde se encuentre la mayor penalización (Fila A1), donde el menor valor es 0, asignando a la celda c_{11} la mayor cantidad posible de unidades de forma que no sobrepase la cantidad ofertada. Se pueden asignar 28 unidades.

	A1	A4	A6	A7	A0	Oferta	4 Pe
A1	0	176	49	76	0	47	49
A2	213	72	149	68	13 0	69	72 – 68 = 4
A3	1000	132	105	163	31 0	0	105
A4	91	29 0	63	1000	0	0	0
A5	34	76	92	132	0	66	76 – 34 = 42
Demanda	28	7	79	68	0		
4 Pe	34	4	43	8	0		

	A1	A4	A6	A7	A0	Oferta	4 Pe
A1	28	0	176	49	76	0	47 – 28 = 19	49
A2	213	72	149	68	13	0	69	4
A3	1000	132	105	163	31	0	0	105
A4	91	29	0	63	1000	0	0	0
A5	34	76	92	132	0	66	42
Demanda	28 – 28 = 0	7	79	68	0		
4 Pe	34	4	43	8	0		

Queda vacía la oferta de la columna (A1) por lo que se procede a eliminarla.

	A1	A4	A6	A7	A0	Oferta	4 Pe
A1	28	0	176	49	76	0	19	49
A2	213	72	149	68	13	0	69	4
A3	1000	132	105	163	31	0	0	105
A4	91	29	0	63	1000	0	0	0
A5	34	76	92	132	0	66	42
Demanda	0	7	79	68	0		
4 Pe	34	4	43	8	0		

♦ Se busca la fila o columna donde se encuentre la mayor penalización (columna A6), donde el menor valor es 49, asignando a la celda c_{13} la mayor cantidad posible de unidades de forma que no sobrepase la cantidad ofertada. En esesta línea, se pueden asignar 19 unidades.

	A1	A4	A6	A7	A0	Oferta	5 Pe
A1	28	0	176	49	76	0	19	27
A2	213	72	149	68	13	0	69	4
A3	1000	132	105	163	31	0	0	105
A4	91	29	0	63	1000	0	0	0
A5	34	76	92	132	0	66	16
Demanda	0	7	79	68	0		
5 Pe	34	4	43	8	0		

	A1	A4	A6	A7	A0	Oferta	5 Pe
A1	28	0	176	19	49	76	0	19 – 19 = 0	27
A2	213	72	149	68	13	0	69	4
A3	1000	132	105	163	31	0	0	105
A4	91	29	0	63	1000	0	0	0
A5	34	76	92	132	0	66	16
Demanda	0	7	79 – 19 = 60	68	0		
5 Pe	34	4	43	8	0		

Queda vacía la oferta de la fila (A1) por lo que se procede a eliminarla.

	A1	A4	A6	A7	A0	Oferta	5 Pe
A1	28 0	176	19 49	76	0	0	27
A2	213	72	149	68	13 0	69	4
A3	1000	132	105	163	31 0	0	105
A4	91	29 0	63	1000	0	0	0
A5	34	76	92	132	0	66	16
Demanda	0	7	60	68	0		
5 Pe	34	4	43	8	0		

♦ Se busca la fila o columna donde se encuentre la mayor penalización (columna A6), donde el menor valor es 92, asignando a la celda c_{53} la mayor cantidad posible de unidades de forma que no sobrepase la cantidad ofertada. Se pueden asignar 60 unidades.

	A1	A4	A6	A7	A0	Oferta	6 Pe
A1	28 0	176	19 49	76	0	0	27
A2	213	72	149	68	13 0	69	4
A3	1000	132	105	163	31 0	0	105
A4	91	29 0	63	1000	0	0	0
A5	34	76	60 92	132	0	66 – 60 = 6	16
Demanda	0	7	60 – 60 = 0	68	0		
6 Pe	34	4	57	64	0		

Queda vacía la oferta de la columna (A6) por lo que se procede a eliminarla.

	A1	A4	A6	A7	A0	Oferta	6 Pe
A1	28 0	176	19 49	76	0	0	27
A2	213	72	149	68	13 0	69	4
A3	1000	132	105	163	31 0	0	105
A4	91	29 0	63	1000	0	0	0
A5	34	76	60 92	132	0	6	16
Demanda	0	7	0	68	0		
6 Pe	34	4	57	64	0		

♦ Se busca la fila o columna donde se encuentre la mayor penalización (columna A7), donde el menor valor es 68, asignando a la celda c_{13} la mayor cantidad posible de unidades de forma que no sobrepase la cantidad ofertada. En esesta línea, se pueden asignar 68 unidades.

	A1	A4	A6	A7	A0	Oferta	7 Pe
A1	28 0	176	19 49	76	0	0	27
A2	213	72	149	68 68	13 0	69 – 68 = 1	4
A3	1000	132	105	163	31 0	0	105
A4	91	29 0	63	1000	0	0	0
A5	34	76	60 92	132	0	6	56
Demanda	0	7	0	68 – 68 = 0	0		
7 Pe	34	4	57	64	0		

Queda vacía la oferta de la columna (A7) por lo que se procede a eliminarla.

	A1	A4	A6	A7	A0	Oferta	7 Pe
A1	28 0	176	19 49	76	0	0	27
A2	213	72	149	68 68	13 0	1	4
A3	1000	132	105	163	31 0	0	105
A4	91	29 0	63	1000	0	0	0
A5	34	76	60 92	132	0	6	56
Demanda	0	7	0	0	0		
7 Pe	34	4	57	64	0		

♦ Finalmente, queda por asignar 6 unidades a la celda c_{52} dado que A5 oferta esa cantidad y 1 unidad a la celda c_{22} cumplimentado la oferta de A2.

	A1	A4	A6	A7	A0	Oferta
A1	28 0	176	19 49	76	0	0
A2	213	1 72	149	68 68	13 0	0
A3	1000	132	105	163	31 0	0
A4	91	29 0	63	1000	0	0
A5	34	6 76	60 92	132	0	0
Demanda	0	0	0	0	0	

Valor de la función objetivo: $z = 1 \times 72 + 6 \times 76 + 19 \times 49 + 60 \times 92 + 68 \times 68 = 11.603$