TEORÍA DE COLAS

- **Modelo de Cola M/M/s**
- **Modelo de Cola M/M/s con entrada finita**

MODELO DE COLA M/M/s

El modelo supone que los tiempos entre llegadas y los tiempos de servicio son variables aleatorias distribuidas exponencialmente, la disciplina es FIFO y la población es infinita.

Se diferencia respecto al modelo M/M/1 en que el número de servidores s puede ser cualquier número natural tal que $s \geq 1$. Cuando el número de servidores es mayor que 1, las expresiones anteriores no son tan sencillas.

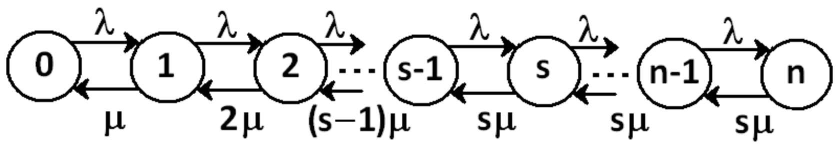
En esta línea, en la tasa de servicio μ_n hay que distinguir dos casos:

$$\mu_n = \begin{cases} \mu_n = n\mu & \text{cuando } n \leq s \\ \mu_n = s\mu & \text{cuando } n > s \end{cases} = \min(n\mu, s\mu)$$

$\mu \equiv$ **tasa media de servicio de todos los servidores en conjunto**

$s\mu \equiv$ **tasa máxima de servicio para *s* servidores**

El siguiente diagrama de tasas (cadena de Markov del modelo M/M/s) representa los posibles estados del sistema y las transiciones entre ellos.



En este caso, la tasa de llegadas no se encuentra afectada por el estado en que se encuentre el sistema, pero sí la tasa media de servicio, pudiendo ser tal múltiplo de la tasa media de servicio por servidor como servidores en activo haya.

Si el factor de utilización (factor de carga/ intensidad tráfico): $\rho = \dfrac{\lambda}{s\mu}$

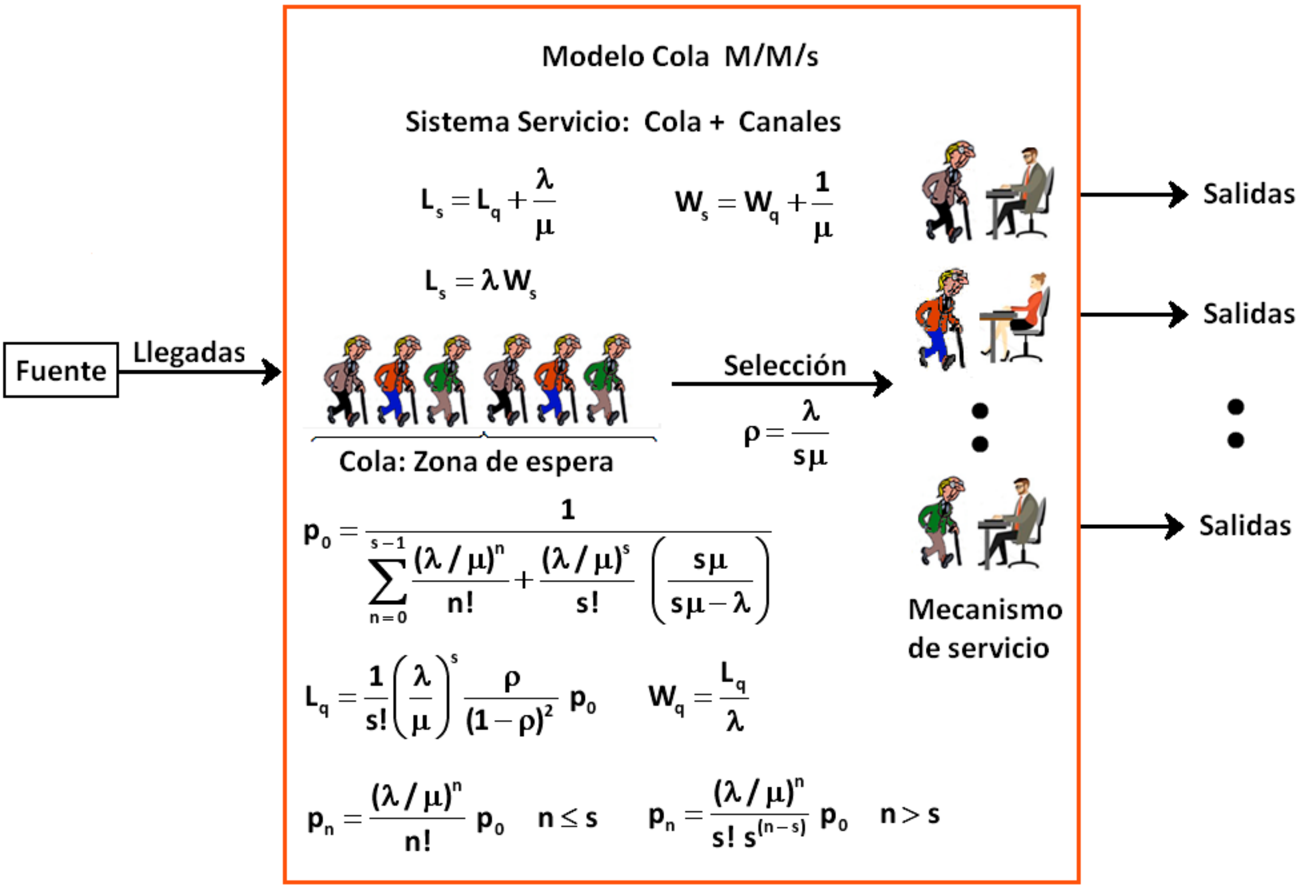
$$c_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ \dots \ \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \ \dots \ \mu_n} = \begin{cases} \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n & n = 1, 2, \ \dots \ , s-1 \\[2ex] \dfrac{1}{s!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^s \left(\dfrac{\lambda}{s\mu}\right)^{n-s} & n = s, s+1, \ \dots \end{cases}$$

$$p_n = c_n\, p_0 = \begin{cases} \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0 & n = 1, 2, \ \dots \ , s-1 \\[2ex] \dfrac{1}{s!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^s \left(\dfrac{\lambda}{s\mu}\right)^{n-s} p_0 & n = s, s+1, \ \dots \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, p_0 = 1 \quad \rightarrow \quad p_0 = \frac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{n} c_n} = \frac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \sum_{n=s}^{\infty} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{n-s}} =$$

$$= \frac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \frac{1}{1-\rho}} = \frac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!}\left(\frac{s\mu}{s\mu-\lambda}\right)}$$

Bajo condiciones de estabilidad (factor de utilización $\rho < 1$), al igual que en el modelo M/M/1, se pueden aplicar fórmulas para obtener los principales parámetros del sistema.



Tiempo en el servicio: $\dfrac{1}{\mu}$

Utilización promedio del sistema: $u_s = \dfrac{\lambda}{\mu}$

Factor de utilización (factor de carga/ intensidad tráfico): $\rho = \dfrac{\lambda}{s\mu}$

Probabilidad de que ningún cliente se encuentre en el sistema de colas: $$p_0 = \frac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!}\left(\frac{s\mu}{s\mu-\lambda}\right)}$$

Probabilidad del estado n: $p_n = \dfrac{(\lambda/\mu)^n}{n!}\, p_0 \qquad n \le s$

Probabilidad del estado n: $p_n = \dfrac{(\lambda/\mu)^n}{s!\ s^{(n-s)}}\, p_0 \qquad n > s$

Número promedio de clientes en cola: $L_q = \dfrac{(\lambda/\mu)^s\, \lambda\mu}{(s-1)!\ (s\mu-\lambda)^2}\, p_0 = \dfrac{1}{s!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^s \dfrac{\rho}{(1-\rho)^2}\, p_0$

Número promedio de clientes en sistema: $L_s = L_q + \dfrac{\lambda}{\mu} \qquad (L_s = \lambda\, W_s)$

Tiempo promedio de espera en cola: $W_q = \dfrac{L_q}{\lambda} \qquad (L_q = \lambda\, W_q)$

Tiempo promedio de estancia en el sistema: $W_s = W_q + \dfrac{1}{\mu} \qquad \left(W_s = \dfrac{L_s}{\lambda}\right)$

A medida que se añaden servidores al sistema las fórmulas van siendo más complicadas, en especial para el cálculo de probabilidades.
Se asume que la probablidad de la función de tiempos de servicio es una exponencial negativa de parámetro μ_n.

$$P(W > t) = e^{-\mu t}\left(1 + \frac{\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^s}{s!\ (1-\rho)}\left(\frac{1-e^{-\mu t(s-1-\lambda/\mu)}}{s-1-\lambda/\mu}\right)\right)$$

Cuando $s-1-\lambda/\mu = 0$ se utiliza $\dfrac{1-e^{-\mu t(s-1-\lambda/\mu)}}{s-1-\lambda/\mu} = \mu t$

🖫 **Un terminal de facturación dispone de dos operarios que atienden a los clientes que llegan según una distribución de Poisson de media ochenta clientes por hora, que esperan en una única cola hasta que alguno de los operarios esté libre. El tiempo requerido para atender a un cliente se distribuye exponencialmente con medía 1,2 minutos. Se pide:**

a) ¿Cuál es el número esperado de clientes en el terminal de facturación?

b) ¿Cuál es el tiempo medio que un cliente pasa en el terminal de facturación?

c) ¿Qué porcentaje de tiempo está libre un determinado operario?

Solución:

a) Es un modelo de cola M/M/2 con $s = 2$ servidores

Tasa de llegadas $\equiv \lambda = 80$ clientes/hora

Tasa de servicio por operario $\equiv \mu = \dfrac{60}{1,2} = 50$ clientes/hora

Factor de utilización o congestión del sistema: $\rho = \dfrac{\lambda}{s.\mu} = \dfrac{80}{2 \times 50} = 0,8$

Probabilidad de que ningún cliente se encuentre en el sistema de colas:

$$p_0 = \frac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \times \left(\frac{s\mu}{s\mu - \lambda}\right)} = \frac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{1} \frac{(80/50)^n}{n!} + \frac{(80/50)^2}{2!}\left(\frac{100}{100-80}\right)} = 0,111$$

$$\sum_{n=0}^{1} \frac{(80/50)^n}{n!} + \frac{(80/50)^2}{2!} \times \left(\frac{100}{100-80}\right) =$$

$$= \left[\frac{(80/50)^0}{0!} + \frac{(80/50)}{1!}\right] + \frac{(80/50)^2}{2!} \times 5 = (1 + 1,6) + 6,4 = 9$$

o bien $$p_0 = \frac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \frac{1}{1-\rho}} = \frac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{1} \frac{(80/50)^n}{n!} + \frac{1}{2}\left(\frac{80}{50}\right)^2 \left(\frac{1}{1-0,8}\right)} = 0,111$$

Número pomedio de clientes en la cola:

$$L_q = \frac{(\lambda/\mu)^s \, \lambda\mu}{(s-1)! \, (s\mu - \lambda)^2} \, p_0 = \frac{(80/50)^2 \times 80 \times 50}{1! \, (2 \times 50 - 80)^2} \, 0,111 = 2,84 \text{ clientes}$$

Número promedio de clientes en el sistema (terminal de facturación):

$$L_s = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = 2,84 + \frac{80}{50} = 4,44 \text{ clientes}$$

b) Tiempo medio de espera en cola: $W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{2,84}{80} = 0,0355$

Tiempo medio de estancia en el sistema (terminal de facturación):

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu} = 0,0355 + \frac{1}{50} = 0,0555 \text{ horas} = 3,33 \text{ minutos}$$

Es decir, el tiempo en el sistema es igual al tiempo en la cola (W_q) más el tiempo en el servicio $(1/\mu)$

o bien, $W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{4,44}{80} = 0,0555 \text{ horas} = 3,33 \text{ minutos}$

c) El porcentaje de tiempo que determinado operario esté libre: $p_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}\, p_0$

$$1\, p_0 + \frac{1}{2}\, p_1 = \frac{(80/50)^0}{0!}\, p_o + \frac{1}{2}\, \frac{(80/50)^1}{1!}\, p_o = p_o + 0,8\, p_o = 1,8\, p_o = 0,2$$

🖫 **En un ambulatorio con tres médicos, los pacientes llegan de forma aleatoria (tiempos de llegada exponenciales) a razón de 12 por hora. Estos son atendidos en orden de llegada por el primer médico que esté libre. Cada médico tarda una media de 13 minutos en atender a cada paciente (tiempos de atención exponenciales). Se pide:**

a) Calcular la proporción de tiempo que está cada médico atendiendo a pacientes.

b) Calcular el número promedio de pacientes que están en la sala de espera. Calcular el tiempo promedio total de espera de un paciente.

c) ¿Qué ocurriría en el ambulatorio si uno de los tres médicos se ausenta?

Solución:

a) Es un modelo de cola M/M/3 con $s = 3$ servidores

$$\lambda = 12 \text{ pacientes/hora} \quad , \quad \mu = \frac{60}{13} = 4,615 \text{ pacientes/hora} \quad \text{(tiempo de servicio)}$$

Utilización promedio del ambulatorio: $u_s = \lambda / \mu = 12 / 4,615 = 2,6$

La proporción de tiempo solicitada se expresa en la tasa de utilización del ambulatorio: $\rho = \dfrac{\lambda}{s.\mu} = \dfrac{12}{3 \times 4,615} = 0,87 \quad \to \quad 1 - \rho = 1 - 0,87 = 0,13$

El servicio del ambulatorio está utilizado un 87%, esto es, pasa ocioso el 13% del tiempo, sistema estable al ser $\rho = 0,87 < 1$

b) Número promedio de pacientes en la sala de espera: $L_q = \dfrac{(\lambda/\mu)^s \, \lambda \mu}{(s-1)! \, (s\mu - \lambda)^2} \, p_0$

$$p_0 = \frac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \frac{1}{1-\rho}} = \frac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{2} \frac{2,6^n}{n!} + \frac{1}{3!} 2,6^3 \left(\frac{1}{0,13}\right)} = \frac{1}{29,51} = 0,033$$

$$\sum_{n=0}^{2} \frac{2,6^n}{n!} + \frac{1}{3!} 2,6^3 \left(\frac{1}{0,13}\right) = \sum_{n=0}^{2} \frac{2,6^n}{n!} + 22,53 = 1 + 2,6 + 3,38 + 22,53 = 29,51$$

con lo que, $L_q = \dfrac{(\lambda/\mu)^s \, \lambda \mu}{(s-1)! \, (s\mu - \lambda)^2} \, p_0 = \dfrac{2,6^3 \times 12 \times 4,615}{2! \times 1,845^2} \times 0,033 = 4,72$ pacientes

Tiempo promedio de espera en cola: $W_q = \dfrac{L_q}{\lambda} = \dfrac{4,72}{12} = 0,39$ horas

Tiempo promedio estancia en el sistema: $W_s = W_q + \dfrac{1}{\mu} = 0,39 + \dfrac{1}{4,615} = 0,60$ horas

🖫 **El gerente de una multinacional quiere analizar el coste total por hora del sistema de descargas de su terminal (mano de obra y camiones ociosos). La terminal de carga funciona con cuatro plataformas de descarga, cada una de éstas con un equipo de dos empleados que descargan un semirremolque en una hora, con tiempos de servicios exponenciales, y un coste de cuarenta euros/hora. El tiempo de llegadas de camiones es de tres/hora siguiendo una disribución de Poisson, con un coste estimado de sesenta euros/hora por camión ocioso.**

Solución:

Es un modelo de cola M/M/4 con $s = 4$ servidores

Para calcular el coste total de mano de obra y de los camiones ociosos hay que saber el tiempo promedio de espera en el sistema de descarga y el número promedio de camiones en el mismo.

Tasa de llegadas: $\lambda = 3$ **camiones/hora**

Tasa de servicio por empleado $\equiv \mu = 4 \times \dfrac{1}{4} = 1$ **camiones/hora**

Utilización promedio del sistema: $u_s = \lambda / \mu = 3/1 = 3$

Utilización promedio de las cuatro plataformas: $\rho = \dfrac{\lambda}{s\mu} = \dfrac{3}{4 \times 1} = 0,75$

Probabilidad de que no haya ningún camión en el sistema de descargas:

$$p_0 = \frac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \frac{1}{1-\rho}} = \frac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{3} \frac{3^n}{n!} + \frac{1}{4!} 3^4 \left(\frac{1}{0,25}\right)} = \frac{1}{26,5} = 0,0377$$

$$\sum_{n=0}^{3} \frac{3^n}{n!} + \frac{1}{4!} 3^4 \left(\frac{1}{0,25}\right) = \sum_{n=0}^{3} \frac{3^n}{n!} + 13,5 = 1 + 3 + 4,5 + 4,5 + 13,5 = 26,5$$

Número promedio de camiones en espera:

$$L_q = \frac{(\lambda/\mu)^s \, \lambda\mu}{(s-1)! \, (s\mu - \lambda)^2} \, p_0 = \frac{3^4 \times 3 \times 1}{3!\,(4-3)^2} \times 0,0377 = 1,53$$

Tiempo promedio de espera de camiones cola: $W_q = \dfrac{L_q}{\lambda} = \dfrac{1,53}{3} = 0,51$ **hora**

Tiempo promedio de estancia de camiones en el sistema:

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu} = 0,51 + \frac{1}{1} = 1,51 \text{ horas}$$

Número promedio camiones en el sistema: $L_s = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = 1,53 + 3 = 4,53$ **camiones**

o bien, $L_s = \lambda\, W_s = 3 \text{ x } 1,51 = 4,53$ **camiones**

Los costes/hora por mano de obra ociosa y camiones ociosos son:

$$\text{Coste total} = \text{Coste mano de obra ociosa } + \text{ Coste camiones ociosos} =$$

$$= 40 \text{ x } s + 60 \text{ x } L_s = 40 \text{ x } 4 + 60 \text{ x } 4,53 = 431,8 \text{ euros}$$

Un mayorista de agencias de viajes tiene un sistema de reservas por teléfono, atendido por 4 comerciales, las llamadas en espera son atendidas después en estricto orden de llegada. Se sabe que las llamadas son aleatorias con un promedio de 20 llamadas a la hora, mientras que el tiempo medio de respuesta (tiempo que una llamada permanece en el sistema) es de 6,51 minutos, y el número medio de llamadas en espera es de 0,17. Se pide:

a) Tiempo medio que una llamada ha de esperar hasta ser atendida por uno de los comerciales.

b) Qué ocurriría con el uso del sistema si hubiera dos comerciales menos.

c) Si el mayorista valora la hora de inactividad de cada comercial en doscientos euros, ¿cuál es la pérdida media por hora debida a la inactividad de los comerciales?

d) Si los tiempos entre llamadas y los tiempos de atención al cliente son variables aleatorias exponenciales, representar el diagrama de tasas de transición entre estados. Sí la probabilidad de que el estado esté vacío es 2/19, calcular la probabilidad de que una llamada quede en espera.

Solución:

a) Tasa de llegadas: $\lambda = 20$ **clientes/hora**

Tiempo medio de respuesta: $W_s = \frac{6,51}{60} = 0,1085$ **horas** $\quad \left(W_s = W_q + \frac{1}{\mu} \right)$

Número medio de clientes en la cola: $L_q = 0,17$ **clientes**

Luego,

Tiempo medio de espera en cola: $W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{0,17}{20} = 0,0085$ **horas**

b) $W_s = W_q + \dfrac{1}{\mu} \rightarrow \dfrac{1}{\mu} = W_s - W_q = 0{,}1085 - 0{,}0085 = 0{,}1 \rightarrow \mu = 10$ clientes/hora

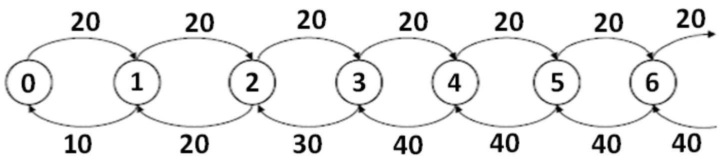
Factor de utilización del sistema: $\rho = \dfrac{\lambda}{s\mu} = \dfrac{20}{4 \times 10} = 0{,}5$

Con dos comerciales menos $\rho = \dfrac{\lambda}{s\mu} = \dfrac{20}{2 \times 10} = 1$ el sistema se vuelve inestable.

c) Número medio de comerciales ocupados $\equiv \dfrac{\lambda}{\mu} = \dfrac{20}{10} = 2$

Con lo que el número de comerciales ociosos es de $4 - 2 = 2$, en consecuencia, la pérdida por hora por la inactividad de los comerciales es de 400 euros.

d) Diagrama de tasas de transición, cuando los tiempos entre llamadas y los tiempos de atención al cliente son variables aleatorias exponenciales.



Una llamada queda en espera cuando todos los comerciales están ocupados.

$$P(N \geq 4) = 1 - P(N < 4) = 1 - p_0 - p_1 - p_2 - p_3$$

Por ser el sistema estacionario, la tasa media de llegada es igual a la tasa media de salida para cualquier estado n, es decir, $\lambda_{n-1}\, p_{n-1} + \mu_{n+1}\, p_{n+1}$

$$p_0 = \frac{2}{19}$$

$$10 p_1 = 20 p_0 \quad \rightarrow \quad p_1 = \frac{20}{10} p_0 = 2 \times \frac{2}{19} = \frac{4}{19}$$

$$20 p_2 + 20 p_0 = 10 p_1 + 20 p_1 \quad \xrightarrow{10 p_1 = 20\, p_0} \quad 20 p_2 = 20 p_1 \quad \rightarrow \quad p_2 = p_1 = \frac{4}{19}$$

$$30 p_3 + 20 p_1 = 20 p_2 + 20 p_2 \quad \xrightarrow{20 p_1 = 20\, p_2} \quad 30 p_3 = 20 p_2 \quad \rightarrow \quad p_3 = \frac{20}{30} p_2 = \frac{8}{57}$$

$$P(N \geq 4) = 1 - P(N < 4) = 1 - p_0 - p_1 - p_2 - p_3 = 1 - \frac{2}{19} - \frac{4}{19} - \frac{4}{19} - \frac{8}{57} = \frac{1}{3}$$

🗎 Adviértase que se trata de un modelo de cola M/M/4 con $s = 4$ servidores

En la tasa de servicio μ_n hay que distinguir: $\begin{cases} \mu_n = n\mu & \text{cuando } n < s \\ \mu_n = s\mu & \text{cuando } n \geq s \end{cases}$

$\mu \equiv$ **tasa media de servicio de todos los servidores en conjunto**

$s\mu \equiv$ **tasa máxima de servicio para *s* servidores**

$$p_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0 \text{ para } n = 1, 2, \ \dots \ , s-1 \qquad p_n = \frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{n-s} p_0 \text{ para } n = s, s+1, \ \dots$$

$$p_1 = \frac{1}{1!}(2)^1 \frac{2}{19} = \frac{4}{19} \qquad p_2 = \frac{1}{2!}(2)^2 \frac{2}{19} = \frac{4}{19} \qquad p_3 = \frac{1}{3!}(2)^3 \frac{2}{19} = \frac{8}{57}$$

MODELO DE COLA M/M/s con fuente de entrada finita

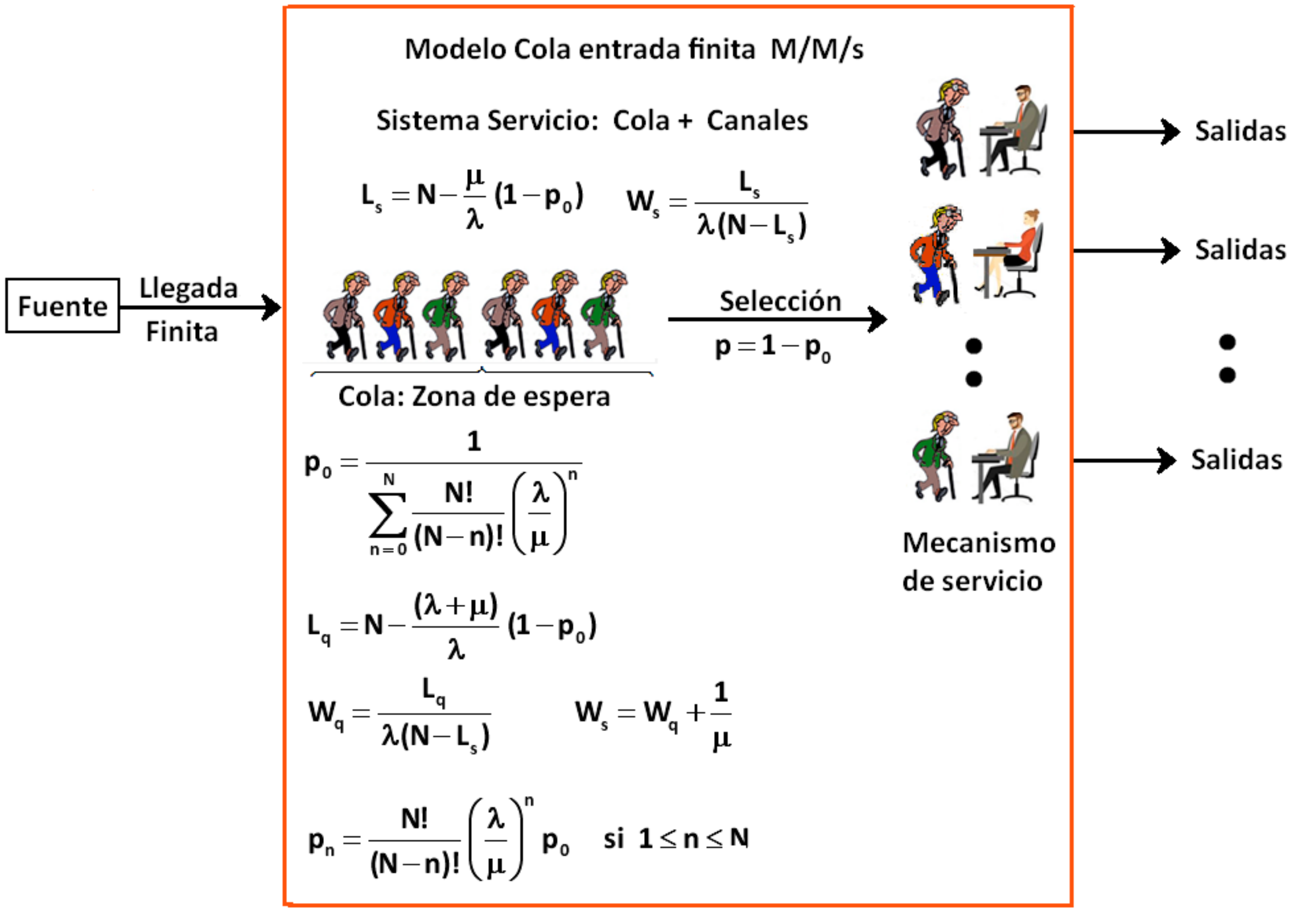
Es una variación del modelo M/M/s consistente en que la fuente de variación de entrada es limitada, esto es, el tamaño de la población de posibles clientes es finita.

Sea N el tamaño de la población, cuando en el sistema se encuentran n clientes, quedan $(N-n)$ posibles clientes en la fuente de entrada.

En el modelo con población finita los clientes alternan entre estar dentro y fuera del sistema. Por analogía con el modelo M/M/s se supone que el tiempo que pasa cada cliente fuera del sistema es una variable aleatoria exponencial $\text{Exp}(\lambda)$.

Cuando n clientes están dentro, $(N-n)$ clientes están fuera, y por tanto la distribución de probabilidad del tiempo que falta para la próxima llegada al sistema es el mínimo de $(N-n)$ variables exponenciales independientes de parámetro $\lambda(N-n)$. De este modo,

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda(N-n) & 0 \le n \le N \\ 0 & n > N \end{cases} \qquad\qquad \mu_n = \begin{cases} n\mu\lambda & 1 \le n \le s \\ s\mu\lambda & s \le n \le N \\ 0 & n > N \end{cases}$$



La aplicación más importante de este modelo es la *reparación de máquinas*, donde se asigna a uno o más técnicos la responsabilidad de tener operativas un grupo de N máquinas.

Cuando las máquinas se estropean acuden al sistema de mantenimiento en espera de ser reparadas, y cuando están operativas quedan fuera del sistema.

$$p_0 = \frac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{(N-n)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n} \qquad p_n = \frac{N!}{(N-n)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0 \quad \text{si } 1 \le n \le N$$

Utilización promedio del servidor: $p = 1 - p_0$

Número promedio de clientes en el sistema: $L_s = N - \dfrac{\mu}{\lambda}(1 - p_0)$

Número promedio de clientes en la cola: $L_q = N - \dfrac{(\lambda + \mu)}{\lambda}(1 - p_0)$

Tiempo promedio de estancia en el sistema, incluido el servicio: $W_s = \dfrac{L_s}{\lambda(N - L_s)}$

Tiempo promedio de espera en la cola: $W_q = \dfrac{L_q}{\lambda(N - L_s)} \quad \left(W_s = W_q + \dfrac{1}{\mu}\right)$

En la terminal de un aeropuerto se han incorporado diez robots para incrementar el servicio al cliente, surgiendo el problema que no se aplica un mantenimiento preventivo a los robots y presentan una gran variabilidad en la distribución de averías. Cada robot sigue una distribución exponencial de averías (o distribución entre llegadas) con un tiempo promedio de 200 horas entre una y otra avería, y un coste de 30 euros/hora. Para afrontar la situación se encarga a una persona para el mantenimiento, que necesita un promedio de diez horas para reparar un robot, con tiempos de reparación distribuidos exponencialmente, y un coste de 10 euros/hora, dedicándose a otras actividades cuando no hay robots que reparar. ¿Cuál es el coste diario que origina el tiempo ocioso de la mano de obra y los robots?

Solución:

Es un modelo de cola M/M/1 de población finita, los $N = 10$ robots constituyen la población de clientes, verificándose las demás condiciones.

Tasa de llegadas: $\lambda = \dfrac{1}{200} = 0,005$ **averías/hora**

Tasa de servicio: $\mu = \dfrac{1}{10} = 0,1$ **robots/hora**

Para calcular el coste diario del tiempo ocioso de la mano de obra y los robots se necesita estimar la utilización promedio del empleado de mantenimiento (p) y el número promedio de robots incluidos en el mantenimiento.

Utilización promedio del empleado de mantenimiento: $p = 1 - p_0$

$$p_0 = \frac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{(N-n)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n} = \frac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{10} \frac{10!}{(10-n)!}\left(\frac{0,005}{0,1}\right)^n} = \frac{1}{1,85886} = 0,538$$

$$\sum_{n=0}^{10} \frac{10!}{(10-n)!}\left(\frac{0,005}{0,1}\right)^n = \sum_{n=0}^{10} \frac{10!}{(10-n)!}\,0,05^n = 1 + 10 \times 0,05 + 90 \times 0,05^2 + 720 \times 0,05^3 +$$

$$+ 5040 \times 0,05^4 + 30240 \times 0,05^5 + 151200 \times 0,05^6 + 604800 \times 0,05^7 + 1814400 \times 0,05^8 +$$

$$+ 3628800 \times 0,05^9 + 3628800 \times 0,05^{10} = 1,85886$$

con lo que, $p = 1 - p_0 = 1 - 0,538 = 0,462$

Número promedio de robots en espera de ser reparados:

$$L_q = N - \frac{(\lambda+\mu)}{\lambda}(1-p_0) = 10 - \frac{(0,005+0,1)}{0,005}(0,462) = 0,298 \ \text{ robots}$$

Número promedio de robots que están en el sistema (en la cola y en proceso de reparación):

$$L_s = N - \frac{\mu}{\lambda}(1-p_0) = 10 - \frac{0,1}{0,005}(0,462) = 0,76 \ \text{ robots}$$

Tiempo promedio de espera de los robots en la cola para ser atendidos por el encargado de mantenimiento:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda(N-L_s)} = \frac{0,298}{0,005(10-0,76)} = 6,45 \text{ horas}$$

Tiempo promedio de estancia de los robots en el sistema (en la cola y en proceso de reparación):

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda(N-L_s)} = \frac{0,76}{0,005(10-0,76)} = 16,45 \ \text{ horas}$$

o bien, $W_s = W_q + \frac{1}{\mu} = 6,45 + \frac{1}{0,1} = 16,45 \ \text{ horas}$

Los costes/hora por mano de obra ociosa y robots ociosos son:

$$\text{Coste total} = \text{Coste mano de obra} + \text{Coste camiones ociosos} =$$

$$= 40 \times 4 + 60 \times 4,53 = 431,8 \text{ euros}$$

🖫 **Una empresa tiene seis equipos idénticos de manufactura, el tiempo entre fallas de cada uno de los equipos de producción sigue una distribución exponencial, con un tiempo promedio entre fallas de veinte horas. Para la atención de las fallas en el equipo de manufactura hay un único equipo de mantenimiento, el tiempo de duración del servicio de reparación de las máquinas sigue una distribución exponencial con una media de 2 horas/falla. Se pide:**

a) Utilización promedio de mantenimiento.
b) Probabilidad de que *n* clientes se encuentren en el sistema de colas.
c) Número promedio de máquinas en espera de ser reparadas.
d) Número promedio de máquinas que están en el sistema.
e) Tiempo promedio de espera de las máquinas en la cola.

Solución:

a) Es un modelo de cola M/M/1 de población finita, los $N=6$ equipos de manufactura constituyen la población de clientes, verificándose las demás condiciones

Tasa de llegadas: $\lambda = \dfrac{1}{20} = 0,05$ máquinas/hora

Tasa de servicio: $\mu = \dfrac{1}{2} = 0,5$ máquinas/hora

Utilización promedio del equipo de mantenimiento: $p = 1 - p_0$

$$p_0 = \frac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{(N-n)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n} = \frac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{6} \frac{6!}{(6-n)!}\left(\frac{0,05}{0,5}\right)^n} = \frac{1}{2,06392} = 0,4845$$

$$\sum_{n=0}^{6} \frac{6!}{(6-n)!}\left(\frac{0,05}{0,5}\right)^n = \sum_{n=0}^{6} \frac{6!}{(6-n)!}\,0,1^n = 1 + 6 \times 0,1 + 30 \times 0,1^2 + 120 \times 0,1^3 +$$

$$+ 360 \times 0,1^4 + 720 \times 0,1^5 + 720 \times 0,1^6 = 2,06392$$

Utilización promedio de mantenimiento: $p = 1 - p_0 = 1 - 0,4845 = 0,5155$

b) Probabilidad de que *n* clientes se encuentren en el sistema de colas:

$$p_n = \frac{N!}{(N-n)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0 = \frac{N!}{(N-n)!} \times 0,1^n \times 0,4845 \quad \text{si} \;\; 1 \le n \le N$$

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
0,290708942	0,145354471	0,058141788	0,017442537	0,003488507	0,000348851

c) Número promedio de máquinas en espera de ser reparadas:

$$L_q = N - \frac{(\lambda+\mu)}{\lambda}(1-p_0) = 6 - \frac{(0,05+0,5)}{0,05}(0,5155) = 0,3295 \text{ máquinas}$$

d) Número promedio de máquinas que están en el sistema (en la cola y en proceso de reparación):

$$L_s = N - \frac{\mu}{\lambda}(1-p_0) = 6 - \frac{0,5}{0,05}(0,5155) = 0,845 \text{ máquinas}$$

e) Tiempo promedio de espera de las máquinas en la cola para ser atendidas:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda(N-L_s)} = \frac{0,3295}{0,05(6-0,845)} = 1,278 \text{ horas}$$

f) Tiempo promedio de estancia de las máquinas en el sistema (en la cola y en proceso de reparación):

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda(N-L_s)} = \frac{0,845}{0,05(6-0,845)} = 3,278 \text{ horas}$$

o bien, $W_s = W_q + \frac{1}{\mu} = 1,278 + \frac{1}{0,5} = 3,278 \text{ horas}$