TEORÍA DE COLAS

- **Modelos de Cola no exponenciales**
- **Modelos: M/G/1 - M/D/1 - M/E_k/1**
- **Ejercicios varios Modelos de Colas**

MODELOS DE COLAS CON TIEMPOS DE SERVICIO NO EXPONENCIAL

Los modelos anteriores se basan en que las entradas y el servicio se distribuyen mediante procesos que siguen una distribución de Poisson/Exponencial.

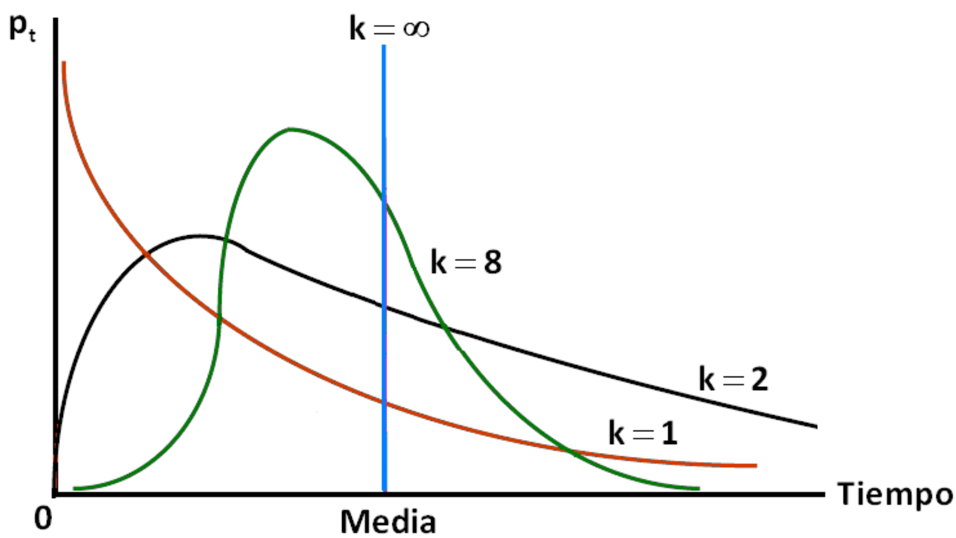
En un sistema de colas es necesario seleccionar una distribución de probabilidad para los tiempos de servicio. Hay tres distribuciones que representan tiempos de servicio:

- **La distribución de servicio exponencial** ($\sigma \equiv \text{media}$)
- **La distribución de servicio constante** ($\sigma \equiv 0$)
- **La distribución Erlang que posee un parámetro k que determina la desviación típica** $\sigma = \dfrac{1}{\sqrt{k}}\left(\dfrac{1}{\mu}\right) \;\rightarrow\; k = \dfrac{1}{\mu^2 x\, \sigma^2}$

$k = 1 \;\rightarrow$ **La distribución Erlang $\equiv$ La distribución Exponencial**

$k = \infty \;\rightarrow$ **La distribución Erlang $\equiv$ La distribución degenerada con tiempos constantes**

La distribución Erlang según los valores del parámetro k:



MODELO DE COLA M/G/1

Según la notación Kendall se trata de sistema de colas con tiempos de llegadas distribuidos exponencialmente (Proceso de Poisson de parámetro λ), con clientes que tienen tiempos de servicio independientes e idénticamente distribuidos de media $(1/\mu)$ y varianza σ^2

Cualquier sistema de colas de este tipo alcanza en algún momento el estado estable cuando el factor de utilización $\rho = \lambda / \mu < 1$.

Las medidas de rendimiento para este modelo toman las expresiones adjuntas, donde la referente a L_q recibe el nombre de fórmula de Pollaczek-Khinchine.

$p_n = \rho$

Utilización promedio : $p_0 = 1 - \rho$

Número promedio de clientes en la cola: $L_q = \dfrac{\lambda^2\sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)}$

Número promedio de clientes en el sistema: $L_s = L_q + \rho$

Tiempo promedio de espera en la cola: $W_q = \dfrac{L_q}{\lambda} = \dfrac{\lambda^2\sigma^2 + \rho^2}{2\lambda(1-\rho)}$

Tiempo promedio de estancia en el sistema: $W_s = \dfrac{L_s}{\lambda} = W_q + \dfrac{1}{\mu}$

Las medidas de eficiencia incrementan su valor conforme σ^2 aumenta, lo que indica que el funcionamiento del servidor tiene gran transcendencia en la eficiencia global del sistema.

Curry y Feldman proponen una modificación del tiempo promedio de espera en la cola que proporciona una relación directa entre las colas M/M/1 y las colas M/G/1:

$$W_q\,(M/G/1) = \left(\frac{1+\mu^2\sigma^2}{2}\right) W_q\,(M/M/1)$$

$\mu^2\sigma^2 \equiv$ **Coeficiente de variación al cuadrado de los tiempos de servicio.**

MODELO DE COLA M/D/1

Es un sistema de colas con tiempos de llegadas distribuidos exponencialmente (Proceso de Poisson de parámetro λ), el servicio consiste básicamente en la misma tarea rutinaria que el servidor realiza para todos los clientes, tiende a haber poca variación en el tiempo de servicio requerido, asumiendo que el tiempo de servicio es igual a una constante fija.

Con un único servidor, el modelo M/D/1 se reduce a un caso particular del modelo M/G/1 en donde $\sigma^2 = 0$, con lo que las medidas de eficiencia son:

Utilización promedio : $p_0 = 1 - \rho$

Número promedio de clientes en la cola: $L_q = \dfrac{\rho^2}{2(1-\rho)}$

Número promedio de clientes en el sistema: $L_s = L_q + \rho$

Tiempo promedio de espera en la cola: $W_q = \dfrac{L_q}{\lambda}$

Tiempo promedio de estancia en el sistema: $W_s = \dfrac{L_s}{\lambda} = W_q + \dfrac{1}{\mu}$

MODELO DE COLA M/E$_k$/1

La distribución de Erlang de parámetros k y υ es la suma de k variables aleatorias independientes exponenciales de parámetro υ, con media $\dfrac{k}{\upsilon}$ y varianza $\sigma^2 = \dfrac{k}{\upsilon^2}$.

Al particularizar las expresiones del modelo M/G/1 a una distribución de Erlang, tomando $\upsilon = k\mu$, es decir, de media $\dfrac{1}{\mu}$, donde:

$$\sigma^2 = \frac{k}{\upsilon^2} = \frac{1}{k\mu^2} \quad \rightarrow \quad \sigma = \frac{1}{\sqrt{k}}\left(\frac{1}{\mu}\right) \qquad k = \frac{1}{\mu^2 \text{ x } \sigma^2}$$

Las medidas de eficiencia del modelo M/E$_k$/1, vienen dadas por:

Utilización promedio : $p_0 = 1 - \rho$

Número promedio de clientes en la cola: $L_q = \dfrac{\lambda^2(1+k)}{2k\mu(\mu-\lambda)} = \dfrac{\rho^2(1+k)}{2k(1-\rho)}$

Número promedio de clientes en el sistema: $L_s = L_q + \rho$

Tiempo promedio de espera en la cola: $W_q = \dfrac{L_q}{\lambda}$

Tiempo promedio de estancia en el sistema: $W_s = \dfrac{L_s}{\lambda} = W_q + \dfrac{1}{\mu}$

Un servicio de lavacoches tiene una tasa de llegadas de 9 vehículos/hora y puede atender un vehículo cada 5 minutos, con un error típico ($\sigma = 2$) minutos. Se pide:

a) Medidas de eficiencia según un modelo M/G/1

b) Probabilidad de tener 0 clientes en el sistema

c) Medidas de eficiencia según un modelo M/D/1

d) Medidas de eficiencia según un modelo M/E$_k$/1

Solución:

a) $\lambda = 9$ vehículos/hora $= \dfrac{9}{60} = 0,15$ vehículos/minuto

$\dfrac{1}{\mu} = 5 \rightarrow \mu = 0,2 \qquad \sigma = 2$

Factor de utilización: $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} = \dfrac{0,15}{0,2} = 0,75$

Promedio de vehículos en cola: $L_q = \dfrac{\lambda^2\sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)} = \dfrac{0,15^2 \times 2^2 + 0,75^2}{2 \times (1-0,75)} = 1,305$ vehículos

Promedio de vehículos en sistema: $L_s = L_q + \rho = 1,305 + 0,75 = 2,055$ vehículos

Tiempo promedio de espera en la cola: $W_q = \dfrac{L_q}{\lambda} = \dfrac{1,305}{0,15} = 8,7$ minutos

Tiempo promedio de estancia en lavacoches: $W_s = \dfrac{L_s}{\lambda} = \dfrac{2,055}{0,15} = 13,7$ minutos

b) $p_0 = 1 - \rho = 1 - 0,75 = 0,25$

c) Medidas de eficiencia según un modelo M/D/1:

Promedio de vehículos en cola: $L_q = \dfrac{\rho^2}{2(1-\rho)} = \dfrac{0,75^2}{2 \times (1-0,75)} = 1,125$ vehículos

Promedio de vehículos en sistema: $L_s = L_q + \rho = 1,125 + 0,75 = 1,875$ vehículos

Tiempo promedio de espera en la cola: $W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{1,125}{0,15} = 7,5$ minutos

Tiempo promedio de estancia en lavacoches: $W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{1,875}{0,15} = 12,5$ minutos

d) Medidas de eficiencia según un modelo $M/E_k/1$:

$$k = \frac{1}{\mu^2 \times \sigma^2} = \frac{1}{0,2^2 \times 2^2} = 6,25$$

Promedio de clientes en la cola: $L_q = \frac{\rho^2 (1+k)}{2k(1-\rho)} = \frac{0,75^2 \times (1+6,25)}{2 \times 6,25 \times (1-0,75)} = 1,305$ clientes

Promedio de clientes en el sistema: $L_s = L_q + \rho = 1,305 + 0,75 = 2,055$ clientes

Tiempo promedio en la cola: $W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{1,305}{0,15} = 8,7$ minutos

Tiempo promedio en el sistema: $W_s = \frac{L_s}{\lambda} = W_q + \frac{1}{\mu} = 8,7 + 5 = 13,7$ minutos

Se observa que cuando $\sigma = \frac{1}{\mu} \rightarrow k = \frac{1}{\mu^2 \times \sigma^2} = 1$, el modelo de cola $M/E_k/1$ es un modelo de cola M/M/1 con tiempo de servicio exponencial

Promedio de clientes en la cola: $L_q = \frac{\rho^2 \times (1+1)}{2 \times 1 \times (1-\rho)} = \frac{\rho^2}{(1-\rho)}$

EJERCICIOS DE VARIOS MODELOS DE COLAS

1. Una tienda de servicio por correo tiene una sola línea telefónica, atendida por una operadora que tiene instrucciones de mantener en espera a un máximo de 3 clientes en la línea mientras toma sus órdenes. Las llamadas llegan según una distribución de Poisson cada 5 minutos. El tiempo necesario para tomar cada orden es exponencial con un promedio de 6 minutos.

a) Explicar el motivo por el que a pesar de que $\mu < \lambda$, este sistema en particular no se desborda.

b) En promedio, ¿cuánto tiempo espera un cliente antes de ser atendido por la operadora?

Solución:

a) Es un modelo M/M/1/4 $\quad k = 3$ en espera $+1$ atendido

Tasa media de llegadas: $\lambda = \dfrac{1}{5}$ llamadas/minuto $= 0,2$ llamadas/minutos

Tasa media de servicio: $\mu = \dfrac{1}{6}$ llamadas/minuto $= 0,166$ llamadas/minutos

El sistema no se desborda porque su capacidad máxima es 4

b) El factor de saturación $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} = \dfrac{0,2}{0,166} = 1,2048$ determina como varían las probabilidades p_n de que haya n llamadas en el sistema.

Probabilidad de que no haya ningún cliente en espera:

$$p_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{k+1}} = \frac{1-1,2048}{1-1,2048^5} = 0,1331$$

Promedio de llamadas en el sistema:

$$L_s = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(k+1)\rho^{k+1}}{1-\rho^{k+1}} = \frac{1,2048}{1-1,2048} - \frac{5 \times 1,2048^5}{1-1,2048^5} = -5,8828 + 8,2499 = 2,3671 \text{ llamadas}$$

Tiempo de llamadas en el sistema: $W_s = \dfrac{L_s}{\lambda} = \dfrac{2,3671}{0,2} = 11,8355$ minutos

Tiempo de llamadas en la cola: $W_q = W_s - \dfrac{1}{\mu} = 11,8355 - 6 = 5,8355$ minutos

Una pequeña empresa de mensajería urgente tiene 2 motos para transportar los envíos de los clientes. El servicio está restringido al área de la ciudad y las solicitudes se atienden telefónicamente.

2. Un asesor fiscal dispone de un local para atender a sus clientes, los cuales se concentran mayoritariamente entre los meses de mayo y junio. El local tiene una capacidad máxima de 8 asientosen espera, el cliente se va si no encuentra un asiento libre, y el tiempo entre llegada de clientes se puede considerar distribuido exponencialmente según un parámetro $\lambda = 20$ clientes por hora en período punta. El tiempo de una consulta esta distribuido exponencialmente con una media de 12 minutos.
¿Cuántas consultas por hora realizará en promedio?
¿Cuál es el tiempo medio de permanencia en el local?

Solución:

Es un modelo M/M/1/9 $\quad k = 8$ clientes espera $+$ 1 cliente atendido

$\lambda = 20$ clientes/hora $\qquad \mu = \dfrac{60}{12} = 5$ clientes/hora

El factor de saturación $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} = \dfrac{20}{5} = 4$ determina como varían las probabilidades p_n de que haya n clientes en el sistema.

Probabilidades del estado: $p_n = \dfrac{(1-\rho)\,\rho^n}{1-\rho^{k+1}} \quad \rightarrow \quad p_9 = \dfrac{(1-4)\,4^9}{1-4^{10}} = 0{,}75$

Tasa media de llegada (entrada efectiva):

$$\lambda_{ef} = \lambda\,(1-p_k) = 20\,(1-0{,}75) = 5 \text{ clientes/hora}$$

Promedio de clientes en el sistema:

$$L_s = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(k+1)\rho^{k+1}}{1-\rho^{k+1}} = \frac{4}{1-4} - \frac{10 \times 4^{10}}{1-4^{10}} = 8{,}67 \text{ clientes}$$

Tiempo promedio de estancia en el sistema: $W_s = \dfrac{L_s}{\lambda_{ef}} = \dfrac{8{,}67}{5} = 1{,}734$ horas

3.A) **Una compañía estatal, para verificar que el peso de los vehículos cumple con el reglamento, tiene un numero de estaciones para el pesado de camiones a lo largo de una autopista. La administración esta considerando mejorar la calidad del servicio en sus estaciones de pesado y ha seleccionado una de las instalaciones como modelo a estudiar.**
Se desea analizar y entender el desempeño del sistema actual durante las horas de mayor afluencia, cuando llega a la bascula el mayor numero de camiones.
Se sabe que al sistema llegan 70 clientes por hora, de acuerdo a una distribución de probabilidad de Poisson, y se atienden a una tasa de 73 clientes por hora, con una distribución de probabilidad exponencial. El sistema tiene capacidad para albergar 15 camiones.
Encontrar:

a) Factor de utilización.
b) Tiempo promedio de espera de un camión en la fila.
c) Numero promedio de camiones en la fila.
d) Tiempo promedio de un camión en el sistema.
e) Numero promedio de camiones en el sistema.
f) Probabilidad de que no haya camiones en el sistema.

3.B) La compañía estatal coloca una bascula adicional en las instalaciones de pesado, y cada una atiende a una tasa de 40 camiones por hora. La tasa de llegada sigue siendo de 70 camiones por hora.
Evaluar el nuevo sistema de atención a los clientes, calculando las medidas de rendimiento.

Solución:

3.A) Tasa de llegada:

$$\lambda = 70 \text{ camiones/hora} = \frac{70}{60} \text{camiones/minuto} = 1,167 \text{ camiones/minuto}$$

Tasa de servicio a los camiones:

$$\mu = 73 \text{ camiones/hora} = \frac{73}{60} \text{ camiones/minuto} = 1,217 \text{ camiones/minuto}$$

Como hay un único servidor, el factor de utilización coincide con la probabilidad de que un cliente nuevo tenga que esperar en el servicio.

Probabilidad del sistema ocupado: $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} = \dfrac{1,167 \text{ camiones-minuto}}{1,217 \text{ camiones-minuto}} = 0,9589$

Probabilidad del sistema sin ocupar: $1 - \rho = 1 - 0,9598 = 0,0402$

b) Tiempo promedio de camiones en la fila:

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{1,167}{1,217 \times (1,217-1,167)} = 19,178$$

c) Número promedio de camiones en la fila: $L_q = \lambda \,.\, W_q = 1,167 \times 19,178 = 22,38$

d) Tiempo promedio de un camión en el sistema:

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu} = 19,178 + \frac{1}{1,217} = 20 \text{ minutos}$$

e) Número promedio de camiones en el sistema: $L_s = \lambda \,.\, W_s = 1,167 \times 20 = 23,34$

f) Probabilidad de que no haya camiones en el sitema:

$$p_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - 0,9598 = 0,0402$$

3.B) Se trata de un modelo de cola M/M/2

a) Tasa de llegada: $\lambda = 70 \text{ camiones/hora} = 1,167 \text{ camiones/minuto}$

Tasa de servicio a los camiones:

$$\mu = 40 \text{ camiones/hora} = \frac{40}{60} \text{camiones/minuto} = 0,667 \text{ camiones/minuto}$$

Factor de utilización o congestión del sistema: $\rho = \frac{\lambda}{s\,.\,\mu} = \frac{1,167}{2\,.\,0,667} = 0,8748$

c) Número promedio de camiones en la fila:

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{1,167}{0,667} = 1,75$$

Probabilidad de que ningún camión se encuentre en el sistema de colas:

$$p_0 = \frac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \,.\, \left(\frac{1}{1-\rho}\right)} = \frac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{1} \frac{(1,75)^n}{n!} + \frac{(1,75)^2}{2!} \,.\, \left(\frac{1}{1-0,8748}\right)}$$

$$\sum_{n=0}^{1} \frac{(1,75)^n}{n!} + \frac{(1,75)^2}{2!} \,.\, \left(\frac{1}{1-0,8748}\right) = \frac{(1,75)^0}{0!} + \frac{(1,75)^1}{1!} + \frac{(1,75)^2}{2!} \,.\, 7,99 = 14,98$$

$$p_0 = \frac{1}{14,98} = 0,067$$

$$L_q = \frac{(\lambda / \mu)^s \, . \, \lambda \, . \, \mu}{(s-1)! \, (s \, . \, \mu - \lambda)^2} \, . \, p_0 = \frac{(1,75)^2 \, . \, 1,167 \, . \, 0,667}{(2 \, . \, 0,667 - 1,167)^2} \, . \, 0,0607 = 5,19$$

b) Tiempo promedio de camiones en la fila: $W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{5,19}{1,167} = 4,45$

d) Tiempo promedio de un camión en el sistema:

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu} = 4,45 + \frac{1}{0,667} = 5,95$$

e) Número promedio de camiones en el sistema: $L_s = \lambda \, . \, W_s = 1,167 \times 5,95 = 6,94$

f) Probabilidad de que no haya camiones en el sitema: $p_0 = \frac{1}{14,98} = 0,067$

4A. Se considera una línea de espera con dos canales con llegadas de Poisson y tiempos de servicio exponenciales. Para canal, la tasa media de llegada es de 14 unidades por hora, y la tasa media de servicio es de 10 unidades por hora.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que no haya unidades en el sistema?

b) ¿Cuál es la cantidad de unidades promedio en el sistema?

c) ¿Cuál es el tiempo promedio que espera una unidad por servicio?

d) ¿Cuál es el tiempo promedio que una unidad esta en el sistema?

e) ¿Cuál es la probabilidad de tener que esperar por el servicio?

4B. Si el sistema se expande a una operación de tres canales

a) Calcular los apartados anteriores para este sistema de línea de tres canales

b) Si el objetivo del servicio es proporcionar capacidad suficiente de modo que no más del 25% de los clientes tenga que esperar por el servicio, ¿es preferible el sistema de dos canales o el de tres canales?

Solución:

4.A - a) Es un modelo de cola M/M/2

Tasas media de llegada y servicios: $\lambda = 14$ **unidades/hora ,** $\mu = 10$ **unidades/hora**

$$\lambda / \mu = 14 / 10 = 1,4$$

$$p_0 = \frac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!}\left(\frac{s\,.\,\mu}{s\,.\,\mu - \lambda}\right)} = \frac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^2}{2!}\left(\frac{2\,.\,\mu}{2\,.\,\mu - \lambda}\right)} = \frac{1}{5,667} = 0,1764$$

$$\sum_{n=0}^{1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} = \frac{1,4^0}{0!} + \frac{1,4^1}{1!} = 2,4$$

$$\frac{(\lambda/\mu)^2}{2!}\left(\frac{2\,.\,\mu}{2\,.\,\mu - \lambda}\right) = \frac{1,4^2}{2!}\left(\frac{2\,.\,10}{2\,.\,10 - 14}\right) = 3,267$$

b) Factor de utilización: $\rho = \dfrac{\lambda}{s\,.\,\mu} = \dfrac{14}{2\,.\,10} = 0,7$

$$L_q = \frac{1}{s!}\,.\,\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s.\,\frac{\rho}{(1-\rho)^2}\,.\,p_0 = \frac{1}{2!}\,.\,1,4^2.\,\frac{0,7}{(1-0,7)^2}\,.\,0,1764 = 1,345$$

c) $W_q = \dfrac{L_q}{\lambda} = \dfrac{1,345}{14} = 0,096 \text{ horas} = 5,76 \text{ minutos}$

d) $W_s = W_q + \dfrac{1}{\mu} = 0,096 + \dfrac{1}{10} = 0,196 \text{ horas} = 11,176 \text{ minutos}$

e) $p_W = \dfrac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \,.\, \left(\dfrac{s\,.\,\mu}{s\,.\,\mu-\lambda}\right) .\, p_0 = \dfrac{1,4^2}{2!} \,.\, \left(\dfrac{2\,.\,10}{2\,.\,10-14}\right) .\, 0,1764 = 0,57624$

4.B - a) Es un modelo de cola M/M/3

$$p_0 = \frac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{2} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^3}{3!}\left(\frac{3\,.\,\mu}{3\,.\,\mu-\lambda}\right)} = \frac{1}{4,2375} = 0,2359$$

$$\sum_{n=0}^{2} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} = \frac{1,4^0}{0!} + \frac{1,4^1}{1!} + \frac{1,4^2}{2!} = 3,38$$

$$\frac{(\lambda/\mu)^3}{3!}\left(\frac{3\,.\,\mu}{3\,.\,\mu-\lambda}\right) = \frac{1,4^3}{3!}\left(\frac{3\,.\,10}{3\,.\,10-14}\right) = 0,8575$$

Factor de utilización: $\rho = \dfrac{\lambda}{s\,.\,\mu} = \dfrac{14}{3\,.\,10} = 0,467$

$$L_q = \frac{1}{s!} \,.\, \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s .\, \frac{\rho}{(1-\rho)^2} .\, p_0 = \frac{1}{3!} \,.\, 1,4^3 .\, \frac{0,467}{(1-0,467)^2} .\, 0,2359 = 0,1773$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{0,1773}{14} = 0,0127 \text{ horas} = 0,759 \text{ minutos}$$

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu} = 0,0127 + \frac{1}{10} = 0,1127 \text{ horas} = 6,76 \text{ minutos}$$

$$p_W = \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \,.\, \left(\frac{s\,.\,\mu}{s\,.\,\mu-\lambda}\right) .\, p_0 = \frac{1,4^3}{3!} \,.\, \left(\frac{3\,.\,10}{3\,.\,10-14}\right) .\, 0,2359 = 0,20228$$

4.B - b) Es preferible el sistema de 3 canales, al cumplirse que menos del 25% tiene que esperar por el servicio.

5. Un cajero bancario puede atender a los clientes a una velocidad promedio de diez clientes por hora. Además, se supone que los clientes llegan a la ventanilla del cajero a una tasa promedio de 7 por hora. Se considera que las llegadas siguen una distribución de Poisson y el tiempo de servicio sigue la distribución exponencial.
a) Realizar un análisis acerca de la situación actual del Banco.
b) Si el Banco coloca un segundo cajero, en las condiciones anteriormente descritas, ¿qué tanto se mejora el servicio?

Solución:

a) Se trata de un modelo M/M/1

Tasas media de llegada y servicios: $\lambda = 7$ **clientes/hora ,** $\mu = 10$ **clientes/hora**

Factor de utilización: $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} = \dfrac{7}{10} = 0,7$

Que es la probabilidad de que el cajero se encuentre ocupado, que al ser un solo servidor, coincid con la probabilidad de que un cliente nuevo tenga que esperar en el servicio, es decir, $p = \dfrac{\lambda}{\mu} = 0,7$

En definitiva, con probabilidad $p_0 = 1 - 0,7 = 0,3$ **el cajero del banco se encuentra vacío, que es la probabilidad de tener 0 clientes en el sistema**

Número medio de clientes en cola: $L_q = \dfrac{\lambda^2}{\mu\,(\mu-\lambda)} = \dfrac{7^2}{10\,(10-7)} = 1,63$

Número medio de clientes en sistema: $L_s = \dfrac{\lambda}{\mu-\lambda} = \dfrac{7}{10-7} = 2,33$

Tiempo medio de clientes en cola: $W_q = \dfrac{L_q}{\lambda} = \dfrac{1,63}{7} = 0,233$ **horas (14 minutos)**

Tiempo medio de clientes en sistema: $W_s = \dfrac{L_s}{\lambda} = \dfrac{2,33}{7} = 0,333$ **horas (20 minutos)**

b) Es un modelo M/M/2

Factor de intensidad de tráfico: $\rho = \dfrac{\lambda}{s\,.\,\mu} = \dfrac{7}{2\,.\,10} = 0,35$

La probabilidad de que ningún cliente se encuentre en el sistema:

$$p_0 = \frac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!}\left(\frac{s.\mu}{s.\mu-\lambda}\right)} = \frac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{1} \frac{0,7^n}{n!} + \frac{0,7^2}{2!}\left(\frac{20}{20-7}\right)} = \frac{1}{2,0769} = 0,4814$$

$$\sum_{n=0}^{1} \frac{0,7^n}{n!} + \frac{0,7^2}{2!}\left(\frac{20}{20-7}\right) = \frac{0,7^0}{0!} + \frac{0,7}{1!} + 0,3769 = 2,0769$$

Número medio de clientes en cola:

$$L_q = \frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \frac{\rho}{(1-\rho)^2}\, p_0 = \frac{1}{2!}\, 0,7^2 \frac{0,35}{(1-0,35)^2}\, 0,4814 = 0,0977$$

Número medio de clientes en sistema: $L_s = L_q + \dfrac{\lambda}{\mu} = 0,0977 + 0,7 = 0,7977$

Tiempo medio de clientes en cola: $W_q = \dfrac{L_q}{\lambda} = \dfrac{0,0977}{7} = 0,0139$ **horas**

Tiempo medio de clientes en sistema: $W_s = \dfrac{L_s}{\lambda} = \dfrac{0,7977}{7} = 0,1139$ **horas**

6. Una entidad bancaria considera la posibilidad de instalar una red de cajeros en una de sus oficinas. Dado que se desconoce la afluencia de público que va a demandar dicho servicio, coloca un único cajero durante un mes. Diariamente se recogen datos sobre los tiempos de llegadas de los clientes, así como de los tiempos de servicio. Suponiendo que la sucursal se encuentra emplazada en un barrio dende no existe otro servicio semejante, el cliente que llega prefiere esperar para poder utilizar el cajero, cuando éste esté ocupado.
Tras el oportuno análisis de los datos recogidos, se estima que las llegadas siguen un proceso de Poisson, la distribución del tiempo de servicio es exponencial, el tiempo medio transcurrido entre dos llegadas consecutivas es de 7.5 minutos, y el tiempo medio de servicio es de 5 minutos por cliente.
Calcular:
a) Tiempo medio de espera que debe sufrir cada cliente en cola.
b) Tamaño medio de la cola y probabilidad de que al acudir al cajero ya haya alguna persona en la cola.

Solución:

a) Es un modelo de cola M/M/1

Tasas media de llegada y servicios:

$\lambda = \dfrac{1}{7,5} = 0,1333$ clientes/minuto , $\mu = \dfrac{1}{5} = 0,2$ clientes/minuto

Factor de utilización: $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} = \dfrac{0,1333}{0,2} = 0,666$

Que es la probabilidad de que el cajero se encuentre ocupado, que al ser un solo servidor, coincid con la probabilidad de que un cliente nuevo tenga que esperar en el servicio, es decir, $p = \dfrac{\lambda}{\mu} = 0,666$

En definitiva, con probabilidad $p_0 = 1 - 0,666 = 0,334$ el cajero del banco se encuentra vacío, que es la probabilidad de tener 0 clientes en el sistema

Número medio de clientes en cola:

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu\,(\mu - \lambda)} = \frac{0,1333^2}{0,2\,(0,2 - 0,1333)} = 1,32 \text{ clientes}$$

Tiempo medio de clientes en cola: $W_q = \dfrac{L_q}{\lambda} = \dfrac{1,32}{0,1333} = 9,90$ minutos

b) El número medio de clientes en cola es $L_q = 1,32$ clientes

La probabilidad de que haya al menos dos personas en el sistema es $1 - p_0 - p_1$

$$p_n = \frac{(\lambda / \mu)^n}{n!} \,.\, p_0 \quad \rightarrow \quad p_1 = \frac{0,666}{1!} \,.\, 0,334 = 0,222$$

$$1 - p_0 - p_1 = 1 - 0,334 - 0,222 = 0,444$$

7. En una fábrica existe una oficina de la Seguridad Social a la que los obreros tienen acceso durante las horas de trabajo. El jefe de personal, que ha observado la afluencia de obreros a la ventanilla, ha solicitado que se haga un estudio relativo al funcionamiento de este servicio. Se designa a un especialista para que determine el tiempo medio de espera de los obreros en la cola y la duración media de la conversación que cada uno mantiene con el empleado de la ventanilla.
Este analista llega a la conclusión de que durante la primera y la última media hora de la jornada la afluencia es muy reducida y fluctuante, pero que durante el resto de la jornada el fenómeno se puede considerar estacionario.
Del análisis de 100 periodos de 5 minutos, sucesivos o no, pero situados en la fase estacionaria, se dedujo que el número medio de obreros que acudían a la ventanilla era de 1,25 por periodo y que el tiempo entre llegadas seguía una distribución exponencial. Un estudio similar sobre la duración de las conversaciones, llevó a la conclusión de que se distribuían exponencialmente con duración media de 3,33 minutos.
Determinar:
a) Número medio de obreros en cola
b) Tiempo medio de espera en la cola
c) Comparar el tiempo perdido por los obreros con el tiempo perdido por el oficinista. Calcula el coste para la empresa, si una hora de inactividad del oficinista vale 250 euros y una hora del obrero 400 euros. ¿Sería rentable poner otra ventanilla?

Solución:

a) Es un modelo de cola M/M/1

Tasas media de llegada y servicios:

$$\lambda = \frac{1,25}{5} = 0,25 \text{ obreros/minuto} \ , \ \ \mu = \frac{1}{3,33} = 0,3 \text{ obreros/minuto}$$

Factor de utilización: $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} = \dfrac{0,25}{0,3} = 0,833$

Número medio de obreros en cola:

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu\,(\mu - \lambda)} = \frac{0,25^2}{0,3\,(0,3 - 0,25)} = 4,166 \text{ obreros}$$

b) Tiempo medio de espera en la cola: $W_q = \dfrac{L_q}{\lambda} = \dfrac{4,166}{0,25} = 16,664$ **minutos**

c) Durante cada hora, hay de media $L_q = 4,166$ **obreros en cola, con lo cual el coste por obreros ociosos es:**

$\text{Coste/hora} = 4{,}166 \times 400 = 1.666{,}4 \text{ euros}$

La probabilidad de que el oficinista este ocioso es $1 - \rho = 1 - 0{,}833 = 0{,}167$, que tiene un $\text{Coste/hora} = 0{,}167 \times 250 = 41{,}75 \text{ euros}$.

La suma de los dos costes sería: $1.666{,}4 + 41{,}75 = 1.708{,}15$ euros

- Al poner otra ventanilla es un modelo de cola M/M/2

Factor de utilización: $\rho = \dfrac{\lambda}{s\,.\,\mu} = \dfrac{0{,}25}{2\,.\,0{,}3} = 0{,}4166$

$$p_0 = \frac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!}\left(\frac{s\,.\,\mu}{s\,.\,\mu - \lambda}\right)} = \frac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^2}{2!}\left(\frac{2\,.\,\mu}{2\,.\,\mu - \lambda}\right)} = \frac{1}{2{,}4277} = 0{,}4119$$

$$\sum_{n=0}^{1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} = \frac{0{,}833^0}{0!} + \frac{0{,}833^1}{1!} = 1{,}833$$

$$\frac{(\lambda/\mu)^2}{2!}\left(\frac{2\,.\,\mu}{2\,.\,\mu - \lambda}\right) = \frac{0{,}833^2}{2!}\left(\frac{2\,.\,0{,}3}{2\,.\,0{,}3 - 0{,}25}\right) = 0{,}5947$$

$$p_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}\,.\,p_0 \quad \rightarrow \quad p_1 = \frac{0{,}833}{1!}\,.\,0{,}4119 = 0{,}3431$$

En media, el tiempo que perdería cada oficinista será:

$2p_0 + p_1 = 2 \times 0{,}4119 + 0{,}3431 = 1{,}1669$

que tiene un $\text{Coste/hora} = 1{,}1669 \times 250 = 291{,}725 \text{ euros}$

De otra parte, cada hora el número medio de obreros en cola:

$$L_q = \frac{1}{s!}\,.\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s.\,\frac{\rho}{(1-\rho)^2}\,.\,p_0 \quad \rightarrow \quad L_q = \frac{1}{2!}.\ 0{,}833^2\,.\,\frac{0{,}4166}{(1 - 0{,}4166)^2}\,.\,0{,}4119 = 0{,}1749$$

que tendría un $\text{Coste/hora} = 0{,}1749 \times 400 = 69{,}96 \text{ euros}$

La suma de los dos costes sería: $69{,}96 + 291{,}725 = 361{,}685$ euros

Es recomendable porner una segunda ventanilla, dado que el coste es menor.


Facultad de Ciencias
ACCESO NORTE