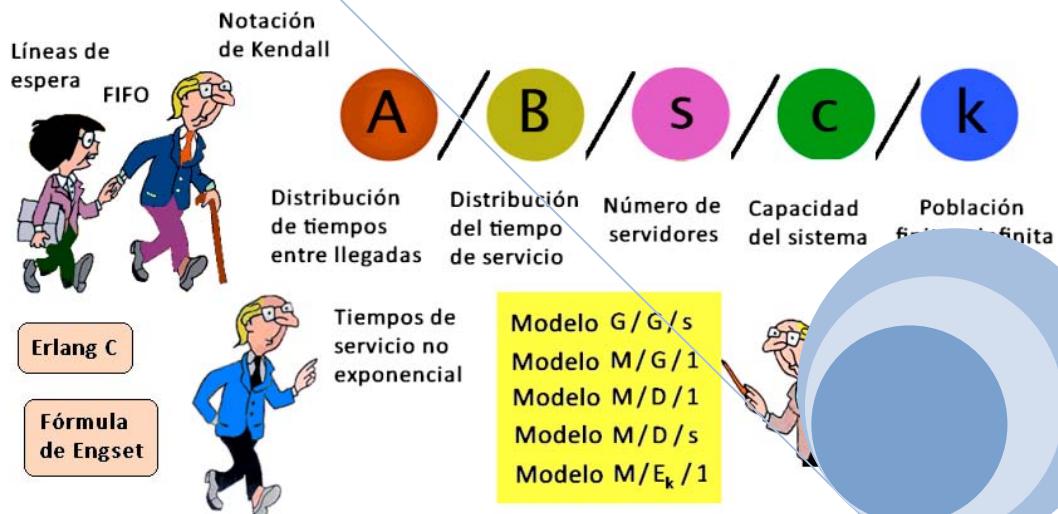
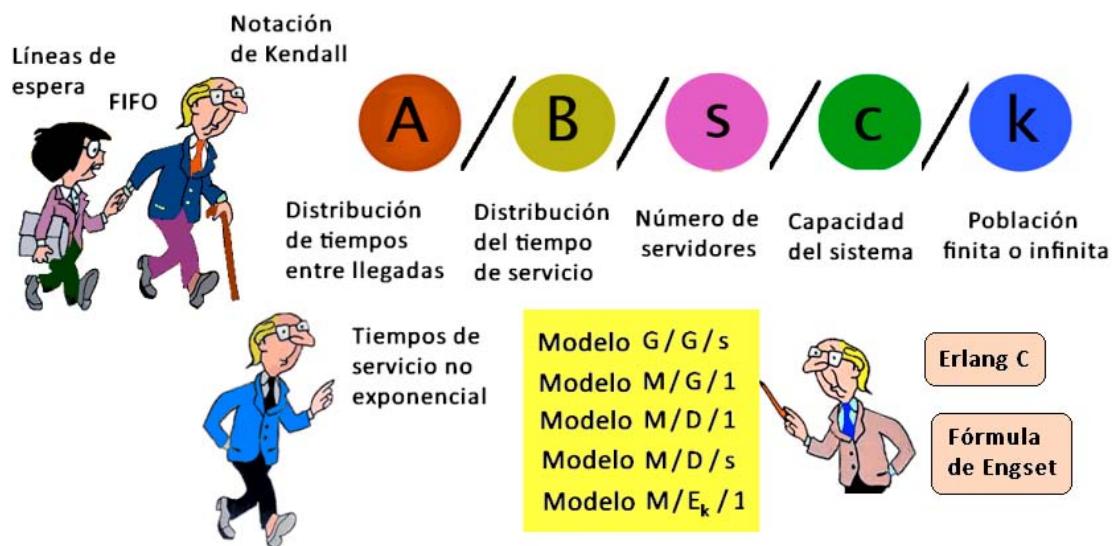


TEORÍA DE COLAS: MODELOS NO EXPONENCIALES INTERRUPCIONES - PRIORIDAD



Hay supuestos en que no es válido que la distribución del tiempo de servicio sea exponencial, dado que la exponencial tiene la propiedad de amnesia. La cantidad que queda en el servicio debería ser independiente del tiempo que ya pasó en ese servicio. Cabe esperar que una distribución modal, como la normal o la de Erlang, sean un modelo más fiel de los tiempos de servicio en la mayoría de las circunstancias.





Los modelos de teoría de colas vistos anteriormente se basan en el proceso de nacimiento y muerte, lo que hace necesario que tanto los tiempos entre llegadas como los de servicio tengan distribuciones exponenciales. Este tipo de distribuciones de probabilidad proporciona un ajuste idóneo cuando los tiempos entre llegadas son exponenciales (que implica que las llegadas ocurren al azar, proceso de entrada de Poisson).

No ocurre lo mismo cuando las llegadas están reguladas o programadas. Por otra parte, las distribuciones de tiempos de servicio reales con frecuencia se desvían de la distribución exponencial, en particular cuando los requerimientos de servicio de los clientes son muy parecidos.

Por ello, se hace necesario disponer de modelos de colas que utilicen otras distribuciones de probabilidad.



Hay supuestos en que no es válido que la distribución del tiempo de servicio sea exponencial, dado que la exponencial tiene la propiedad de amnesia. La cantidad que queda en el servicio debería ser independiente del tiempo que ya pasó en ese servicio. Cabe esperar que una distribución modal, como la normal o la de Erlang, sean un modelo más fiel de los tiempos de servicio en la mayoría de las circunstancias.



MODELOS DE COLAS CON TIEMPOS DE SERVICIO NO EXPONENCIAL

Los modelos anteriores se basan en que las entradas y el servicio se distribuyen mediante procesos que siguen una distribución de Poisson/Exponencial.

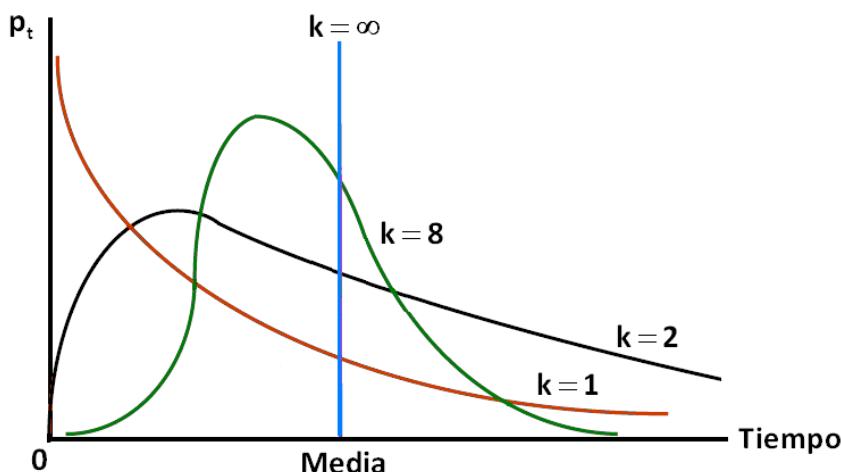
En un sistema de colas es necesario seleccionar una distribución de probabilidad para los tiempos de servicio. Hay tres distribuciones que representan tiempos de servicio:

- ◆ La distribución de servicio exponencial ($\sigma \equiv \text{media}$)
- ◆ La distribución de servicio constante ($\sigma \equiv 0$)
- ◆ La distribución Erlang que posee un parámetro k que determina la desviación típica $\sigma = \frac{1}{\sqrt{k}} \left(\frac{1}{\mu} \right) \rightarrow k = \frac{1}{\mu^2 \times \sigma^2}$

$k = 1 \rightarrow$ La distribución Erlang \equiv La distribución Exponencial

$k = \infty \rightarrow$ La distribución Erlang \equiv La distribución degenerada con tiempos constantes

Distribución Erlang según los valores del parámetro k :



Es un sistema de colas con tiempos de llegadas independientes e idénticamente distribuidos de media ($1/\lambda$) y varianza σ_λ^2 , con clientes que tienen tiempos de servicio independientes e idénticamente distribuidos de media ($1/\mu$) y varianza σ_μ^2 .

Factor de utilización: $\rho = \frac{\lambda}{s \cdot \mu}$

Tasa efectiva llegada: λ

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \left(\frac{1}{1-\rho}\right)}$$

Probabilidad del estado $| M/M/s$: $p_n = \begin{cases} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0 & n \leq s \\ \frac{1}{s! s^{n-s}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s p_0 & n \geq s \end{cases}$

Tiempo promedio de espera en la cola (aproximación de Allen-Cuneen):

$$W_q = \frac{p_{|M/M/s}(n \geq s) \cdot (\lambda^2 \cdot \sigma_\lambda^2 + \mu^2 \cdot \sigma_\mu^2)}{2s\mu(1-\rho)}$$

$$p_{|M/M/s}(n \geq s) = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \frac{1}{s! (1-\rho)} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}$$

Número promedio clientes en la cola: $L_q = \lambda W_q$

Número promedio de clientes en sistema: $L_s = L_q + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$

Tiempo promedio de estancia en el sistema: $W_s = \frac{L_s}{\lambda} = W_q + \frac{1}{\mu}$



COLA GENERAL - Cola General G / G / s

Un experimento aeronáutico realiza pruebas en dos salas, el servicio tarda aproximadamente 20 segundos con un error típico de 2 segundos, mientras que las llegadas se registran cada 25 segundos con un error típico de 3 segundos. Obtener las medidas de rendimiento.

Solución:

Modelo de cola G / G / 2 con s = 2 servidores

$$\text{Tasa de llegadas: } \frac{1}{\lambda} = 25 \rightarrow \lambda = 0,04 \text{ pruebas/segundo , } \sigma_\lambda = 3 \text{ segundos}$$

$$\text{Tasa de servicio: } \frac{1}{\mu} = 20 \rightarrow \mu = 0,05 \text{ pruebas/segundo , } \sigma_\mu = 2 \text{ segundos}$$

$$\text{Factor de utilización del sistema: } \rho = \frac{\lambda}{2\mu} = \frac{0,04}{2 \times 0,05} = 0,4$$

$$\text{Tasa efectiva de llegada: } \lambda = 0,04$$

$$\text{Tiempo promedio de espera en la cola: } W_q = \frac{p_{|M/M/s} (n \geq s) \cdot (\lambda^2 \cdot \sigma_\lambda^2 + \mu^2 \cdot \sigma_\mu^2)}{2s\mu(1-\rho)}$$

$$p_{|M/M/s} (n \geq s) = \frac{\left(\frac{0,04}{0,05}\right)^2}{\sum_{n=0}^1 \frac{1}{n!} \left(\frac{0,04}{0,05}\right)^n + \frac{1}{2! (1-0,4)} \left(\frac{0,04}{0,05}\right)^2} = \frac{0,5333}{2,3333} = 0,22857$$

$$W_q = \frac{0,22857 \times (0,04^2 \times 3^2 + 0,05^2 \times 2^2)}{2 \times 2 \times 0,05 \times (1-0,4)} = 0,0465 \text{ segundos}$$

$$\text{Número promedio clientes en la cola: } L_q = \lambda W_q = 0,04 \times 0,0465 = 0,0019 \text{ pruebas}$$

$$\text{Número promedio de clientes en sistema: } L_s = L_q + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) = 0,0019 + \left(\frac{0,04}{0,05}\right) = 0,8019 \text{ pruebas}$$

$$\text{Tiempo promedio de estancia en el sistema: } W_s = W_q + \frac{1}{\mu} = 0,0465 + \frac{1}{0,05} = 20,0465 \text{ segundos}$$

Queuing Analysis

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

PRUEBAS AERONÁUTICA

Probability Distribution Function

Click the distribution for your choice.

Beta	Parameter 1
Binomial	Mean (μ)
Constant	Parameter 2
Discrete	Standard deviation ($s > 0$)
Erlang	Parameter 3
Exponential	(Not used)
Gamma	
Geometric	
HyperGeometric	
Laplace	
LogNormal	
Normal	
Normal	Normal
Normal	(Not used)

OK Cancel Help

Data Description ENTRY

Number of servers	2
Service time distribution (in segundo)	Normal
Mean (μ)	20
Standard deviation ($s > 0$)	2
(Not used)	
Service pressure coefficient	
Interarrival time distribution (in segundo)	Normal
Mean (μ)	25
Standard deviation ($s > 0$)	3
(Not used)	
Arrival discourage coefficient	
Batch (bulk) size distribution	Constant
Constant value	1
(Not used)	
(Not used)	
Queue capacity (maximum waiting space)	
Customer population	
Busy server cost per segundo	
Idle server cost per segundo	
Customer waiting cost per segundo	
Customer being served cost per segundo	
Cost of customer being balked	
Unit queue capacity cost	

En Service time distribution, indistintamente, se puede poner General/Arbitrary

Interarrival time distribution: Distribución del tiempo entre llegadas

Batch size distribution: Distribución del tamaño del lote

QA Solution Method

Note: The queuing system is classified as: G/G/2. However, there is no close form formula to solve it. You may choose approximation (by G/G/S) or simulation (by discrete-event Monte Carlo simulation) to solve the system performance.

Solution Method

Approximation by G/G/s

Monte Carlo Simulation

OK Cancel Help

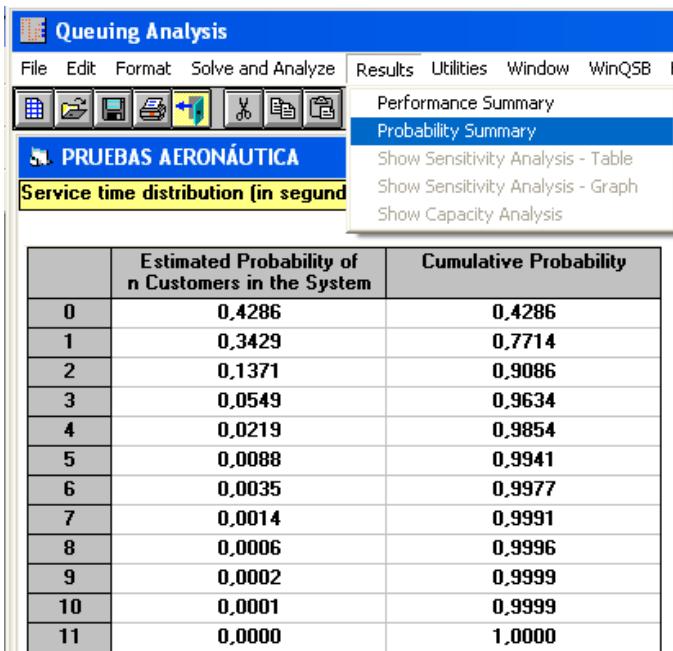
Queuing Analysis

File Format Results Utilities Window Help

PRUEBAS AERONÁUTICA

System Performance Summary for PRUEBAS AERONÁUTICA

Date	Performance Measure	Result
04-23-2022	System: G/G/2	From Approximation
1	Customer arrival rate (λ) per segundo =	0,0400
2	Service rate per server (μ) per segundo =	0,0500
3	Overall system effective arrival rate per segundo =	0,0400
4	Overall system effective service rate per segundo =	0,0400
5	Overall system utilization =	40,0000 %
6	Average number of customers in the system (L) =	0,8019
7	Average number of customers in the queue (L_q) =	0,0019
8	Average number of customers in the queue for a busy system (L_b) =	0,0081
9	Average time customer spends in the system (W) =	20,0465 segundos
10	Average time customer spends in the queue (W_q) =	0,0465 segundos
11	Average time customer spends in the queue for a busy system (W_b) =	0,2033 segundos
12	The probability that all servers are idle (P_0) =	42,8571 %
13	The probability an arriving customer waits (P_w) or system is busy (P_b) =	22,8571 %



$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^1 \frac{1}{n!} 0,8^n + \frac{1}{2!} 0,8^2 \left(\frac{1}{1-0,4} \right)} = 0,4286$$

$$p_1 = \frac{1}{1!} 0,8 \times 0,4286 = 0,3429$$

$$p_2 = \frac{1}{2!} 0,8^2 \times 0,4286 = 0,1371$$

$$p_3 = \frac{1}{2! 2^{3-2}} \times 0,8^3 \times 0,4286 = 0,0549$$

⋮

$$p_8 = \frac{1}{2! 2^{8-2}} \times 0,8^8 \times 0,4286 = 0,0006$$

MODELO GENERAL DE COLA M / G / 1 ≡ M / G / 1 / ∞ / ∞

Según la notación Kendall se trata de sistema de colas con tiempos de llegadas distribuidos exponencialmente (Proceso de Poisson de parámetro λ), con clientes que tienen tiempos de servicio independientes e idénticamente distribuidos de media $(1/\mu)$ y varianza σ^2 .

Modelo con una distribución exponencial entre llegadas y una distribución General/Arbitraria de servicio.

Cualquier sistema de colas de este tipo alcanza en algún momento el estado estable

$$\text{cuando el factor de utilización del sistema: } \rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$$

Las medidas de rendimiento para este modelo toman las expresiones adjuntas, donde la referente a L_q recibe el nombre de fórmula de Pollaczek-Khinchine.

Tasa de llegada efectiva: λ

Probabilidad del estado: $p_0 = 1 - \rho$ $p_n = \rho^n p_0$

$$\text{Número promedio de clientes en la cola: } L_q = \frac{\lambda^2 \cdot \sigma^2 + \rho^2}{2 \cdot (1 - \rho)}$$

$$\text{Número promedio de clientes en el sistema: } L_s = L_q + \rho$$

$$\text{Tiempo promedio de espera en la cola: } W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\lambda^2 \cdot \sigma^2 + \rho^2}{2 \cdot \lambda \cdot (1 - \rho)}$$

$$\text{Tiempo promedio de estancia en el sistema: } W_s = \frac{L_s}{\lambda} = W_q + \frac{1}{\mu}$$

Las medidas de eficiencia incrementan su valor conforme σ^2 aumenta, lo que indica que el funcionamiento del servidor tiene gran transcendencia en la eficiencia global del sistema.

- Curry y Feldman proponen una modificación de las medidas de rendimiento promedio de espera en la cola que proporciona una relación directa entre las colas M / G / 1 y las colas M / M / 1

$$\frac{\text{Medidas de Rendimiento (M / G / 1)}}{\left(\frac{1 + \mu^2 \cdot \sigma^2}{2} \right)} = \text{Medidas de Rendimiento (M / M / 1)}$$

$\mu^2 \cdot \sigma^2 \equiv$ Coeficiente de variación al cuadrado de los tiempos de servicio.

- Con un único servidor, el modelo M / D / 1 se reduce a un caso particular del modelo M / G / 1:

$$M/G/1 \xrightarrow{\sigma^2 = 0} M/D/1$$



COLA GENERAL - Cola General M / G / 1

La dirección de un aeropuerto analiza si contratar a un nuevo auxiliar de tierra. Para este puesto se han presentado varios candidatos, aunque solo han pasado a la fase final únicamente dos de ellos.

El primer auxiliar de tierra tarda en registrar a los pasajeros y su equipaje aproximadamente 20 segundos con un error típico de 2 segundos. Por otro lado, el segundo auxiliar es capaz de registrar cada pasajero en 25 segundos exactos.

Los pasajeros llegan en promedio cada 30 segundos. Los tiempos entre llegadas varían de acuerdo con la distribución exponencial.

¿A cuál de los dos auxiliares de tierra debería contratar el aeropuerto?

¿Cuál es la probabilidad de que el auxiliar contratado esté ocupado?

Solución:

■ Auxiliar 1 de tierra: Modelo de cola M / G / 1 con s = 1 servidor

$$\text{Tasa de llegadas: } \frac{1}{\lambda_1} = 30 \rightarrow \lambda_1 = 0,0333 \text{ pasajeros/segundo}$$

$$\text{Tasa de servicio: } \frac{1}{\mu_1} = 20 \rightarrow \mu_1 = 0,05 \text{ pasajeros/segundo , } \sigma_1 = 2 \text{ segundos}$$

$$\text{Factor de utilización del sistema: } \rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1} = \frac{0,0333}{0,05} = 0,666667$$

$$\text{Tasa efectiva de llegada: } \lambda_1 = 0,0333$$

Promedio de pasajeros en la cola:

$$L_{q1} = \frac{\lambda_1^2 \cdot \sigma_1^2 + \rho_1^2}{2(1-\rho_1)} = \frac{0,0333^2 \times 2^2 + 0,666667^2}{2 \times (1-0,666667)} = 0,6733 \text{ pasajeros}$$

$$\text{Número promedio de clientes en el sistema: } L_{s1} = L_{q1} + \rho_1 = 0,6733 + 0,6667 = 1,34$$

$$\text{Tiempo promedio de espera en la cola: } W_{q1} = \frac{L_{q1}}{\lambda_1} = \frac{0,666667}{0,0333} = 20,20 \text{ segundos}$$

$$\text{Tiempo total que pasa el pasajero en la cola: } W_{s1} = W_{q1} + \frac{1}{\mu_1} = 20,20 + \frac{1}{0,05} = 40,20 \text{ segundos}$$

Problem Specification

Problem Title	AUXILIAR DE TIERRA
Time Unit	segundo
Entry Format	
<input type="radio"/> Simple M/M System <input checked="" type="radio"/> General Queuing System	
OK	Cancel
Help	

AUXILIAR DE TIERRA

Data Description	ENTRY
Number of servers	1
Service time distribution (in segundo)	
Mean (μ)	$20 = 1 / \mu$
Standard deviation ($s > 0$)	2
(Not used)	
Service pressure coefficient	
Interarrival time distribution (in segundo)	
Location parameter (a)	$a = \lambda^2 e^{-\lambda}$
Scale parameter ($b > 0$) ($b = \text{mean if } a=0$)	$30 = 1 / \lambda$
(Not used)	
Arrival discourage coefficient	
Batch (bulk) size distribution	
Constant value	1
(Not used)	
Queue capacity (maximum waiting space)	
Customer population	

Probability Distribution Function

the distribution for your choice.

- Beta
- Binomial
- Constant
- Discrete
- Erlang
- Exponential
- Gamma
- Geometric
- HyperGeometric
- Laplace
- LogNormal
- Normal

Normal

OK Cancel Help

Interarrival time distribution: Distribución del tiempo entre llegadas

Batch size distribution: Distribución del tamaño del lote

System Performance Summary for AUXILIAR DE TIERRA

	Performance Measure	Result
1	System: M/G/1	From Formula
2	Customer arrival rate (λ) per segundo =	0,0333
3	Service rate per server (μ) per segundo =	0,0500
4	Overall system effective arrival rate per segundo =	0,0333
5	Overall system effective service rate per segundo =	0,0333
6	Overall system utilization =	66,6667 %
7	Average number of customers in the system (L) =	1,3400
8	Average number of customers in the queue (L_q) =	0,6733
9	Average number of customers in the queue for a busy system (L_b) =	1,0100
10	Average time customer spends in the system (W) =	40,2000 segundos
11	Average time customer spends in the queue (W_q) =	20,2000 segundos
12	Average time customer spends in the queue for a busy system (W_b) =	30,3000 segundos
13	The probability that all servers are idle (P_0) =	33,3333 %
14	The probability an arriving customer waits (P_w) or system is busy (P_b) =	66,6667 %

■ Auxiliar 2 de tierra: Modelo de cola M / G / 1 con s = 1 servidor

$$\text{Tasa de llegadas: } \frac{1}{\lambda_2} = 30 \rightarrow \lambda_2 = 0,0333 \text{ pasajeros/segundo}$$

$$\text{Tasa de servicio: } \frac{1}{\mu_2} = 25 \rightarrow \mu_2 = 0,04 \text{ pasajeros/segundo , } \sigma_2 = 0 \text{ segundos}$$

$$\text{Factor de utilización: } \rho_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2} = \frac{0,0333}{0,04} = 0,8333$$

$$\text{Promedio de pasajeros en la cola: } L_{q2} = \frac{\lambda_2^2 \cdot \sigma_2^2 + \rho_2^2}{2(1 - \rho_2)} = \frac{0,0333^2 \times 0 + 0,8333^2}{2 \times (1 - 0,8333)} = 2,0833 \text{ pasajeros}$$

$$\text{Tiempo promedio de espera en la cola: } W_{q2} = \frac{L_{q2}}{\lambda_2} = \frac{2,0833}{0,0333} = 62,50 \text{ segundos}$$

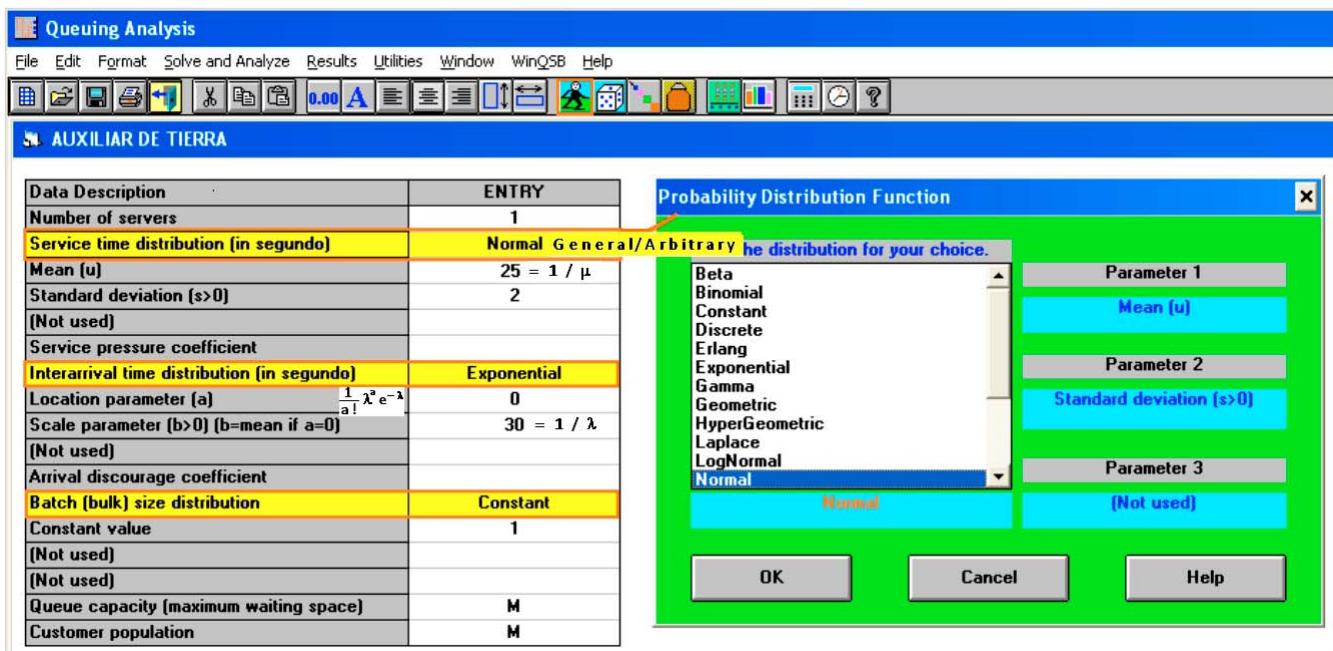
$$\text{Número promedio de clientes en el sistema: } L_{s2} = L_{q2} + \rho_2 = 2,0833 + 0,8333 = 2,9167$$

$$\text{Tiempo total que pasa el pasajero en la cola: } W_{s2} = W_{q2} + \frac{1}{\mu_2} = 62,50 + \frac{1}{0,04} = 87,50 \text{ segundos}$$

Resulta más beneficioso contratar al primer auxiliar de tierra ($W_{s1} = 40,20 < W_{s2} = 87,50$) al ser más rápido que el segundo.

La probabilidad de que el auxiliar 1 de tierra contratado se encuentre ocupado:

$$P(X \geq 1) = 1 - p_0 = 1 - 0,3333 = 0,6667$$



Interarrival time distribution: Distribución del tiempo entre llegadas

Batch size distribution: Distribución del tamaño del lote

	Performance Measure	Result
1	System: M/G/1	From Formula
2	Customer arrival rate (lambda) per segundo =	0,0333
3	Service rate per server (mu) per segundo =	0,0400
4	Overall system effective arrival rate per segundo =	0,0333
5	Overall system effective service rate per segundo =	0,0333
6	Overall system utilization =	83,3333 %
7	Average number of customers in the system (L) =	2,9167
8	Average number of customers in the queue (Lq) =	2,0833
9	Average number of customers in the queue for a busy system (Lb) =	2,5000
10	Average time customer spends in the system (W) =	87,5000 segundos
11	Average time customer spends in the queue (Wq) =	62,5000 segundos
12	Average time customer spends in the queue for a busy system (Wb) =	75,0000 segundos
13	The probability that all servers are idle (Po) =	16,6667 %
14	The probability an arriving customer waits (Pw) or system is busy (Pb) =	83,3333 %

Probabilidad de estado en el sistema:

System Probability Summary for AUXILIAR DE TIERRA		
n	Estimated Probability of n Customers in the System	Cumulative Probability
0	0,3333	0,3333
1	0,2222	0,5556
2	0,1481	0,7037
3	0,0988	0,8025
4	0,0658	0,8683
5	0,0439	0,9122
6	0,0293	0,9415
7	0,0195	0,9610
8	0,0130	0,9740
9	0,0087	0,9827
10	0,0058	0,9884
11	0,0039	0,9923
12	0,0026	0,9949
13	0,0017	0,9966
14	0,0011	0,9977
15	0,0008	0,9985
16	0,0005	0,9990
17	0,0003	0,9993
18	0,0002	0,9995
19	0,0002	0,9997
20	0,0001	0,9998
21	0,0001	0,9999
22	0,0000	0,9999
23	0,0000	0,9999
24	0,0000	1,0000

$$p_0 = 1 - p_1 = 1 - 0,6667 = 0,3333$$

$$p_n = p^n p_0$$

$$p_1 = 0,6667 \times 0,3333 = 0,2222$$

$$p_2 = 0,6667^2 \times 0,3333 = 0,1481$$

$$p_3 = 0,6667^3 \times 0,3333 = 0,0988$$

-

-

-

$$p_{16} = 0,6667^{16} \times 0,3333 = 0,0005$$

Es un sistema de colas con tiempos de llegadas distribuidos exponencialmente (Proceso de Poisson de parámetro λ), el servicio consiste básicamente en la misma tarea rutinaria que el servidor realiza para todos los clientes, tiende a haber poca variación en el tiempo de servicio requerido, asumiendo que el tiempo de servicio es igual a una constante fija.

Modelo con una distribución exponencial entre llegadas y una distribución constante de servicio.

Con un único servidor, el modelo M/D/1 se reduce a un caso particular del modelo M/G/1 en donde $\sigma^2 = 0$: $M/G/1 \xrightarrow{\sigma^2=0} M/D/1$

con lo que las medidas de eficiencia son:

$$\text{Factor de utilización: } \rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$$

$$\text{Tasa efectiva llegada: } \lambda$$

$$\text{Probabilidad del estado: } p_0 = 1 - \rho \quad p_n = \rho^n p_0$$

$$\text{Número promedio clientes en la cola: } L_q = \frac{\lambda^2 \cdot \sigma^2 + \rho^2}{2 \cdot (1 - \rho)} \xrightarrow{\sigma^2=0} L_q = \frac{\rho^2}{2 \cdot (1 - \rho)}$$

$$\text{Número promedio de clientes en sistema: } L_s = L_q + \rho$$

$$\text{Tiempo promedio de espera en la cola: } W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\rho^2}{2 \cdot \lambda \cdot (1 - \rho)}$$

$$\text{Tiempo promedio de estancia en el sistema: } W_s = \frac{L_s}{\lambda} = W_q + \frac{1}{\mu}$$

MODELO DE COLA M/D/s

Factor de utilización: $\rho = \frac{\lambda}{s \cdot \mu}$

Tasa efectiva llegada: λ

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \left(\frac{1}{1-\rho}\right)}$$

Probabilidad del estado $| M/M/s$: $p_n = \begin{cases} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0 & n \leq s \\ \frac{1}{s! s^{n-s}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0 & n \geq s \end{cases}$

Número promedio clientes en la cola: $L_q = \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \frac{\rho}{2(1-\rho)^2} p_0$

Número promedio de clientes en sistema: $L_s = L_q + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$

Tiempo promedio de espera en la cola: $W_q = \frac{L_q}{\lambda}$

Tiempo promedio de estancia en el sistema: $W_s = \frac{L_s}{\lambda} = W_q + \frac{1}{\mu}$

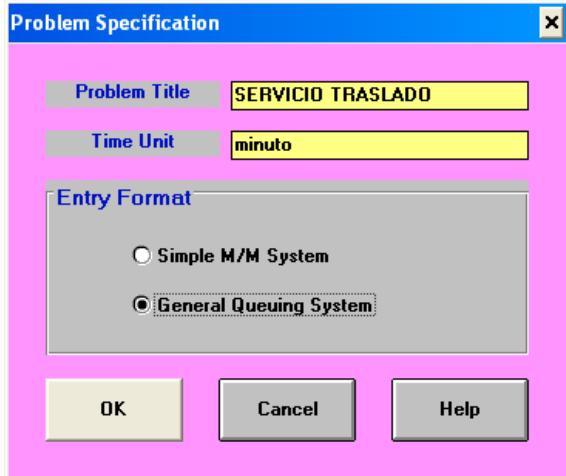


COLA GENERAL - Cola M/D/1 ↔ M/D/2

El aeropuerto dispone de un servicio de traslado en el que consiste en llevar a cada empleado que lo solicite a su casa, hotel o alrededores.

Este servicio puede atender a un empleado cada 7 minutos. El promedio de llegada de empleados es cada 8 minutos, siguiendo una distribución de Poisson.

- Encontrar las medidas de eficiencia del servicio.
- ¿Se podría mejorar el tiempo medio de un empleado en el sistema?



- Se trata de un modelo de cola M/D/1 con s = 1 servidor

$$\text{Tasa de llegada} = \frac{1}{\lambda} = 8 \rightarrow \lambda = 0,125 \text{ pasajeros / minuto}$$

$$\text{Tasa de servicio} = \frac{1}{\mu} = 7 \rightarrow \mu = 0,1429 \text{ pasajeros / minuto}$$

$$\text{Factor de utilización: } \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0,1250}{0,1429} = 0,8750$$

$$\text{Probabilidad del estado: } p_0 = 1 - \rho = 1 - 0,8750 = 0,125$$

$$p_n = \rho^n p_0 \rightarrow \begin{cases} p_1 = 0,8750 \times 0,125 = 0,1094 \\ \vdots \\ p_{45} = 0,8750^{45} \times 0,125 = 0,0003 \end{cases}$$

$$\text{Promedio de empleados en la cola: } L_q = \frac{\rho^2}{2 \cdot (1 - \rho)} = \frac{0,875^2}{2 \times (1 - 0,875)} = 3,062 \text{ empleados}$$

$$\text{Promedio de empleados en el sistema: } L_s = L_q + \rho = 3,062 + 0,875 = 3,937 \text{ empleados}$$

$$\text{Tiempo promedio que un empleado espera en la cola: } W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{3,062}{0,125} = 24,500 \text{ minutos}$$

$$\text{Tiempo promedio que los empleados están en la cola: } W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{3,937}{0,125} = 31,500 \text{ minutos}$$

Queuing Analysis

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

SERVICIO TRASLADO

Data Description	ENTRY
Number of servers	1
Service time distribution (in minuto)	Constant
Mean (μ)	$\bar{t} = 1 / \mu$
Standard deviation ($s > 0$)	
(Not used)	
Service pressure coefficient	
Interarrival time distribution (in minuto)	Exponential
Location parameter (a)	$\frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda}$
Scale parameter ($b > 0$) ($b = \text{mean if } a=0$)	$\theta = 1 / \lambda$
(Not used)	
Arrival discourage coefficient	
Batch (bulk) size distribution	Constant
Constant value	1
(Not used)	
(Not used)	
Queue capacity (maximum waiting space)	
Customer population	

Probability Distribution Function

Click the distribution for your choice.

- Beta
- Binomial
- Constant
- Discrete
- Erlang
- Exponential
- Gamma
- Geometric
- HyperGeometric
- Laplace
- LogNormal
- Normal

Parameter 1: Constant value
Parameter 2: (Not used)
Parameter 3: (Not used)

OK Cancel Help

Interarrival time distribution: Distribución del tiempo entre llegadas

Batch size distribution: Distribución del tamaño del lote

Queuing Analysis

File Format Results Utilities Window Help

SERVICIO TRASLADO

System Performance Summary for SERVICIO TRASLADO

	Performance Measure	Result
1	System: M/D/1	From Formula
2	Customer arrival rate (λ) per minuto =	0,1250
3	Service rate per server (μ) per minuto =	0,1429
4	Overall system effective arrival rate per minuto =	0,1250
5	Overall system effective service rate per minuto =	0,1250
6	Overall system utilization =	87,5000 %
7	Average number of customers in the system (L) =	3,9375
8	Average number of customers in the queue (L_q) =	3,0625
9	Average number of customers in the queue for a busy system (L_b) =	3,5000
10	Average time customer spends in the system (W) =	31,5000 minutos
11	Average time customer spends in the queue (W_q) =	24,5000 minutos
12	Average time customer spends in the queue for a busy system (W_b) =	28,0000 minutos
13	The probability that all servers are idle (P_0) =	12,5000 %
14	The probability an arriving customer waits (P_w) or system is busy (P_b) =	87,5000 %

b) En la situación actual, el factor de utilización $\rho = 0,8750$ es muy alto, sería necesario aumentar la capacidad del sistema para mejorar las medidas de eficiencia.

$$\text{Si se añade otro servidor } (s = 2), \text{ el factor de utilización: } \rho = \frac{\lambda}{s \cdot \mu} = \frac{0,125}{2 \times 0,1429} = 0,4375$$

La red de transporte se encuentra más descongestionada. Se trataría de una cola M/D/2

Probabilidad del estado | M/M/s

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \left(\frac{1}{1-\rho}\right)} = \frac{1}{\sum_{n=0}^1 \frac{1}{n!} \left(\frac{0,125}{0,1429}\right)^n + \frac{1}{2!} \left(\frac{0,125}{0,1429}\right)^2 \left(\frac{1}{1-0,4375}\right)} = 0,3913$$

$$p_1 = \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^1 p_0 = \frac{1}{1!} 0,875 \times 0,3913 = 0,3424$$

$$p_2 = \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_0 = \frac{1}{2!} 0,875^2 \times 0,3913 = 0,1498$$

$$p_3 = \frac{1}{s! s^{n-s}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0 = \frac{1}{2! 2^{3-2}} 0,875^3 \times 0,3913 = 0,0655$$

Número promedio clientes en cola:

$$L_q = \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \frac{\rho}{2(1-\rho)^2} p_0 = \frac{1}{2!} \times 0,875^2 \times \frac{0,4375}{2(1-0,4375)^2} \times 0,3913 = 0,1036 \text{ pasajeros}$$

$$\text{Número promedio de clientes en sistema: } L_s = L_q + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) = 0,1036 + \left(\frac{0,125}{0,1429}\right) = 0,9786 \text{ pasajeros}$$

$$\text{Tiempo promedio de espera en cola: } W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{0,1036}{0,125} = 0,8285 \text{ minutos}$$

$$\text{Tiempo promedio de espera en servicio: } W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{0,9786}{0,125} = 7,8285 \text{ minutos}$$

Queuing Analysis

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

SERVICIO TRASLADO

Data Description	ENTRY
Number of servers	2
Service time distribution [in minuto]	Constant
Mean (μ)	$7 = 1 / \mu$
Standard deviation ($s > 0$)	
(Not used)	
Service pressure coefficient	
Interarrival time distribution [in minuto]	Exponential
Location parameter (a)	$\frac{1}{\lambda^2} \lambda^3 e^{-\lambda}$
Scale parameter ($b > 0$) ($b = \text{mean if } a = 0$)	$8 = 1 / \lambda$
(Not used)	
Arrival discourage coefficient	
Batch (bulk) size distribution	Constant
Constant value	1
(Not used)	
(Not used)	
Queue capacity [maximum waiting space]	
Customer population	

Probability Distribution Function

Click the distribution for your choice.

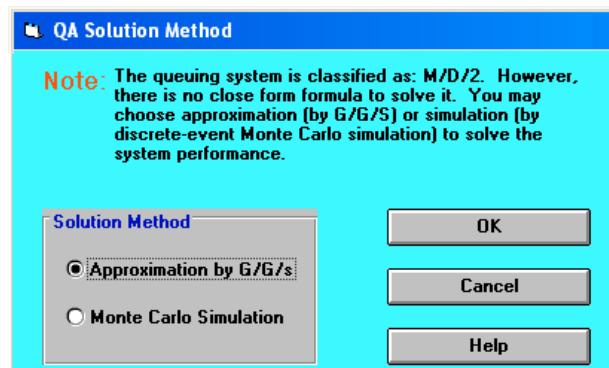
- Beta
- Binomial
- Constant**
- Discrete
- Erlang
- Exponential
- Gamma
- Geometric
- HyperGeometric
- Laplace
- LogNormal
- Normal

Parameter 1: Constant value
Parameter 2: (Not used)
Parameter 3: (Not used)

OK Cancel Help

Interarrival time distribution: Distribución del tiempo entre llegadas

Batch size distribution: Distribución del tamaño del lote



Queuing Analysis

File Format Results Utilities Window Help

SERVICIO TRASLADO

System Performance Summary for SERVICIO TRASLADO

	Performance Measure	Result
1	System: M/D/2	From Formula
2	Customer arrival rate (λ) per minuto =	0,1250
3	Service rate per server (μ) per minuto =	0,1429
4	Overall system effective arrival rate per minuto =	0,1250
5	Overall system effective service rate per minuto =	0,1250
6	Overall system utilization =	43,7500 %
7	Average number of customers in the system (L) =	0,9786
8	Average number of customers in the queue (L_q) =	0,1036
9	Average number of customers in the queue for a busy system (L_b) =	0,3889
10	Average time customer spends in the system (W) =	7,8285 minutos
11	Average time customer spends in the queue (W_q) =	0,8285 minutos
12	Average time customer spends in the queue for a busy system (W_b) =	3,1111 minutos
13	The probability that all servers are idle (P_0) =	39,1304 %
14	The probability an arriving customer waits (P_w) or system is busy (P_b) =	26,6304 %

MODELO DE COLA M / E_k / s

El modelo M / D / s supone una variación cero en los tiempos de servicio ($\sigma = 0$), mientras que la distribución exponencial de tiempos de servicio supone una variación muy grande en los tiempos de servicio ($\sigma = 1 / \mu$). Entre los dos casos extremos hay un intervalo ($0 < \sigma < 1 / \mu$) donde caen la mayor parte de las distribuciones de tiempo reales. Otro tipo de distribución teórica de tiempos de servicio que concuerda con este espacio intermedio es la distribución de Erlang (llamada así en honor con el fundador de la teoría de colas).

$f(t) = \frac{(\mu k)^k}{(k-1)!} t^{k-1} e^{-\mu k t}$ donde μ y k son parámetros estrictamente positivos, estando

$$k \text{ restringido a valores enteros: } \text{media} = \frac{1}{\mu} \quad \sigma = \frac{1}{\mu \sqrt{k}}$$

El parámetro k especifica el grado de variabilidad de los tiempos de servicio con relación a la media. Generalmente, se hace referencia a k como el parámetro de forma.

Los valores intermedios de k proporcionan distribuciones intermedias con media = $(1 / \mu)$, moda = $(k - 1) / (k \mu)$ y varianza = $1 / (k \mu^2)$

En consecuencia, después de estimar la media y la varianza de una distribución de servicio empírica, se pueden utilizar para elegir el valor de k que se ajuste mejor a las estimaciones.

Erlang C

La fórmula supone una infinita población de fuentes, que ofrecen en conjunto, un tráfico de A Erlangs hacia n servidores.

Si todos los servidores están ocupados cuando una petición llega de una fuente, la petición es introducida en la cola. Un sinfín de números de peticiones podrían ir a la cola en este modo simultáneamente.

$$p_w = \frac{\frac{n A^n}{(n-A)n!}}{\sum_{i=0}^{n-1} \frac{A^i}{i!} + \frac{n A^n}{(n-A)n!}}$$

$A \equiv$ Intensidad total del tráfico ofrecido en unidades de Erlangs.

$n \equiv$ Número de servidores [número de troncales].

$P_w \equiv$ Probabilidad de que un cliente tenga que esperar para ser atendido.

Se supone que las llamadas entrantes pueden ser modeladas usando una distribución de Poisson y que el tiempo de espera de las llamadas son descritas por una distribución exponencial negativa.

Calcula la probabilidad del tráfico de la cola, suponiendo que las llamadas que son bloqueadas se queden en el sistema hasta que puedan ser atendidas.

Determina la cantidad de agentes o representantes de clientes, que se necesitarían en un Call Center, después saber la probabilidad en la cola.

Fórmula de Engset

Se denomina así por el matemático es ingeniero noruego T. O. Engset.

Se utiliza con una población finita con k orígenes en lugar de la población infinita que supone Erlang.

Una empresa que instale una centralita necesita saber el número mínimo de circuitos que es preciso contratar desde la red telefónica. Un enfoque aproximado es utilizar la fórmula de Erlang-B (visto anteriormente).

Si la empresa tiene un número pequeño de extensiones, debe utilizar un cálculo más exacto, proporcionado por la fórmula de Engset, que refleja el hecho de que las extensiones que están en uso no harán llamadas simultáneas adicionales.

En una población de usuario grandes, el cálculo de Engset y Erlang B obtienen el mismo resultado.

La expresión utilizada para calcular las tablas de Engset:

$$E(n, A, k) = \frac{\frac{k! A^n}{(k-n)! n!}}{\sum_{i=0}^n \frac{k! A^i}{(k-i)! i!}}$$

E ≡ Probabilidad de bloqueo.
A ≡ Tráfico de Erlangs generado por cada origen desocupado.
n ≡ Número de servidores.
k ≡ Número de orígenes.

Se puede calcular por recursión:

$$\begin{cases} E(0, A, k) = 1 \\ E(n, A, k) = \frac{A (k - n + 1) E(n - 1, A, k)}{n + A (k - n + 1) E(n - 1, A, k)} \end{cases}$$

Se supone que las llamadas que llegan pueden ser modeladas por una distribución Poisson. Sin embargo, debido a que hay un número finito de servidores, la tasa de llegada de las nuevas llamadas decrece a medida que nuevos orígenes (como abonados telefónicos) pasan a estar ocupados y, en consecuencia, no pueden originar nuevas llamadas. Cuando n = k, la fórmula se reduce a una distribución binomial.

Erlang C Traffic Table

N/B	Maximum Offered Load Versus B and N B is in %											
	0.01	0.05	0.1	0.5	1.0	2	5	10	15	20	30	40
1	.0001	.0005	.0010	.0050	.0100	.0200	.0500	.1000	.1500	.2000	.3000	.4000
2	.0142	.0319	.0452	.1025	.1465	.2103	.3422	.5000	.6278	.7403	.9390	1.117
3	.0860	.1490	.1894	.3339	.4291	.5545	.7876	1.040	1.231	1.393	1.667	1.903
4	.2310	.3533	.4257	.6641	.8100	.9939	1.319	1.653	1.899	2.102	2.440	2.725
5	.4428	.6289	.7342	1.065	1.259	1.497	1.905	2.313	2.607	2.847	3.241	3.569
6	.7110	.9616	1.099	1.519	1.758	2.047	2.532	3.007	3.344	3.617	4.062	4.428
7	1.026	1.341	1.510	2.014	2.297	2.633	3.188	3.725	4.103	4.406	4.897	5.298
8	1.382	1.758	1.958	2.543	2.866	3.246	3.869	4.463	4.878	5.210	5.744	6.178
9	1.771	2.208	2.436	3.100	3.460	3.883	4.569	5.218	5.668	6.027	6.600	7.065
10	2.189	2.685	2.942	3.679	4.077	4.540	5.285	5.986	6.469	6.853	7.465	7.959
11	2.634	3.186	3.470	4.279	4.712	5.213	6.015	6.765	7.280	7.688	8.336	8.857
12	3.100	3.708	4.018	4.896	5.363	5.901	6.758	7.554	8.099	8.530	9.212	9.761
13	3.587	4.248	4.584	5.529	6.028	6.602	7.511	8.352	8.926	9.379	10.09	10.67
14	4.092	4.805	5.166	6.175	6.705	7.313	8.273	9.158	9.760	10.23	10.98	11.58
15	4.614	5.377	5.762	6.833	7.394	8.035	9.044	9.970	10.60	11.09	11.87	12.49
16	5.150	5.962	6.371	7.502	8.093	8.766	9.822	10.79	11.44	11.96	12.77	13.41
17	5.699	6.560	6.991	8.182	8.801	9.505	10.61	11.61	12.29	12.83	13.66	14.33
18	6.261	7.169	7.622	8.871	9.518	10.25	11.40	12.44	13.15	13.70	14.56	15.25
19	6.835	7.788	8.263	9.568	10.24	11.01	12.20	13.28	14.01	14.58	15.47	16.18
20	7.419	8.417	8.914	10.27	10.97	11.77	13.00	14.12	14.87	15.45	16.37	17.10
21	8.013	9.055	9.572	10.99	11.71	12.53	13.81	14.96	15.73	16.34	17.28	18.03
22	8.616	9.702	10.24	11.70	12.46	13.30	14.62	15.81	16.60	17.22	18.19	18.96
23	9.228	10.36	10.91	12.43	13.21	14.08	15.43	16.65	17.47	18.11	19.10	19.89
24	9.848	11.02	11.59	13.16	13.96	14.86	16.25	17.51	18.35	19.00	20.02	20.82
25	10.48	11.69	12.28	13.90	14.72	15.65	17.08	18.36	19.22	19.89	20.93	21.76
26	11.11	12.36	12.97	14.64	15.49	16.44	17.91	19.22	20.10	20.79	21.85	22.69
27	11.75	13.04	13.67	15.38	16.26	17.23	18.74	20.08	20.98	21.68	22.77	23.63
28	12.40	13.73	14.38	16.14	17.03	18.03	19.57	20.95	21.87	22.58	23.69	24.57
29	13.05	14.42	15.09	16.89	17.81	18.83	20.41	21.82	22.75	23.48	24.61	25.50
30	13.71	15.12	15.80	17.65	18.59	19.64	21.25	22.68	23.64	24.38	25.54	26.44
31	14.38	15.82	16.52	18.42	19.37	20.45	22.09	23.56	24.53	25.29	26.46	27.38
32	15.05	16.53	17.25	19.18	20.16	21.26	22.93	24.43	25.42	26.19	27.39	28.33
33	15.72	17.24	17.97	19.95	20.95	22.07	23.78	25.30	26.32	27.10	28.31	29.27
34	16.40	17.95	18.71	20.73	21.75	22.89	24.63	26.18	27.21	28.01	29.24	30.21
35	17.09	18.67	19.44	21.51	22.55	23.71	25.48	27.06	28.11	28.92	30.17	31.16
36	17.78	19.39	20.18	22.29	23.35	24.53	26.34	27.94	29.00	29.83	31.10	32.10
37	18.47	20.12	20.92	23.07	24.15	25.36	27.19	28.82	29.90	30.74	32.03	33.05
38	19.17	20.85	21.67	23.86	24.96	26.18	28.05	29.71	30.80	31.65	32.97	34.00
39	19.87	21.59	22.42	24.65	25.77	27.01	28.91	30.59	31.71	32.57	33.90	34.94
40	20.58	22.33	23.17	25.44	26.58	27.84	29.77	31.48	32.61	33.48	34.83	35.89
41	21.28	23.07	23.93	26.23	27.39	28.68	30.63	32.37	33.51	34.40	35.77	36.84
42	22.00	23.81	24.69	27.03	28.21	29.51	31.50	33.26	34.42	35.32	36.70	37.79
43	22.71	24.56	25.45	27.83	29.02	30.35	32.36	34.15	35.33	36.23	37.64	38.74

Erlang C Traffic Table

N/B	Maximum Offered Load Versus B and N B is in %											
	0.01	0.05	0.1	0.5	1.0	2	5	10	15	20	30	40
44	23.43	25.31	26.22	28.63	29.84	31.19	33.23	35.04	36.23	37.15	38.58	39.69
45	24.15	26.06	26.98	29.44	30.67	32.03	34.10	35.93	37.14	38.07	39.51	40.64
46	24.88	26.82	27.75	30.24	31.49	32.87	34.97	36.83	38.05	39.00	40.45	41.59
47	25.60	27.57	28.52	31.05	32.32	33.72	35.84	37.72	38.96	39.92	41.39	42.54
48	26.34	28.33	29.30	31.86	33.14	34.56	36.72	38.62	39.87	40.84	42.33	43.50
49	27.07	29.10	30.08	32.68	33.97	35.41	37.59	39.52	40.79	41.76	43.27	44.45
50	27.80	29.86	30.86	33.49	34.80	36.26	38.47	40.42	41.70	42.69	44.21	45.40
51	28.54	30.63	31.64	34.31	35.64	37.11	39.35	41.32	42.61	43.61	45.15	46.36
52	29.28	31.40	32.42	35.12	36.47	37.97	40.23	42.22	43.53	44.54	46.10	47.31
53	30.03	32.17	33.21	35.94	37.31	38.82	41.10	43.12	44.44	45.47	47.04	48.27
54	30.77	32.95	33.99	36.76	38.15	39.67	41.99	44.02	45.36	46.39	47.98	49.22
55	31.52	33.72	34.78	37.59	38.99	40.53	42.87	44.93	46.28	47.32	48.93	50.18
56	32.27	34.50	35.57	38.41	39.83	41.39	43.75	45.83	47.20	48.25	49.87	51.13
57	33.03	35.28	36.37	39.24	40.67	42.25	44.64	46.74	48.12	49.18	50.82	52.09
58	33.78	36.06	37.16	40.07	41.51	43.11	45.52	47.64	49.04	50.11	51.76	53.05
59	34.54	36.85	37.96	40.90	42.36	43.97	46.41	48.55	49.96	51.04	52.71	54.01
60	35.30	37.63	38.76	41.73	43.20	44.83	47.29	49.46	50.88	51.97	53.65	54.96
61	36.06	38.42	39.56	42.56	44.05	45.70	48.18	50.37	51.80	52.90	54.60	55.92
62	36.82	39.21	40.36	43.39	44.90	46.56	49.07	51.27	52.72	53.83	55.55	56.88
63	37.59	40.00	41.16	44.23	45.75	47.43	49.96	52.18	53.64	54.77	56.49	57.84
64	38.35	40.80	41.97	45.06	46.60	48.30	50.85	53.10	54.57	55.70	57.44	58.80
65	39.12	41.59	42.78	45.90	47.45	49.16	51.74	54.01	55.49	56.63	58.39	59.76
66	39.89	42.39	43.58	46.74	48.30	50.03	52.64	54.92	56.42	57.57	59.34	60.72
67	40.66	43.18	44.39	47.58	49.16	50.90	53.53	55.83	57.34	58.50	60.29	61.68
68	41.44	43.98	45.20	48.42	50.01	51.77	54.42	56.75	58.27	59.44	61.24	62.64
69	42.21	44.78	46.02	49.26	50.87	52.65	55.32	57.66	59.20	60.37	62.19	63.60
70	42.99	45.58	46.83	50.10	51.73	53.52	56.21	58.57	60.12	61.31	63.14	64.56
71	43.77	46.39	47.64	50.95	52.59	54.39	57.11	59.49	61.05	62.25	64.09	65.52
72	44.55	47.19	48.46	51.79	53.45	55.27	58.01	60.41	61.98	63.18	65.04	66.48
73	45.33	48.00	49.28	52.64	54.31	56.14	58.90	61.32	62.91	64.12	65.99	67.44
74	46.11	48.81	50.10	53.49	55.17	57.02	59.80	62.24	63.84	65.06	66.94	68.40
75	46.90	49.61	50.92	54.34	56.03	57.90	60.70	63.16	64.76	66.00	67.89	69.37
76	47.68	50.42	51.74	55.19	56.89	58.78	61.60	64.07	65.69	66.94	68.85	70.33
77	48.47	51.23	52.56	56.04	57.76	59.65	62.50	64.99	66.63	67.88	69.80	71.29
78	49.26	52.05	53.38	56.89	58.62	60.53	63.40	65.91	67.56	68.82	70.75	72.25
79	50.05	52.86	54.21	57.74	59.49	61.41	64.30	66.83	68.49	69.76	71.70	73.22
80	50.84	53.68	55.03	58.60	60.36	62.30	65.21	67.75	69.42	70.70	72.66	74.18
81	51.63	54.49	55.86	59.45	61.22	63.18	66.11	68.67	70.35	71.64	73.61	75.14
82	52.43	55.31	56.69	60.30	62.09	64.06	67.01	69.59	71.28	72.58	74.57	76.11
83	53.22	56.13	57.52	61.16	62.96	64.94	67.92	70.52	72.22	73.52	75.52	77.07
84	54.02	56.95	58.35	62.02	63.83	65.83	68.82	71.44	73.15	74.46	76.47	78.04
85	54.81	57.77	59.18	62.88	64.70	66.71	69.73	72.36	74.08	75.40	77.43	79.00

Erlang C Traffic Table

N/B	Maximum Offered Load Versus B and N											
	B is in %											
0.01	0.05	0.1	0.5	1.0	2	5	10	15	20	30	40	
86	55.61	58.59	60.01	63.73	65.57	67.60	70.63	73.28	75.02	76.35	78.38	79.97
87	56.41	59.41	60.84	64.59	66.45	68.48	71.54	74.21	75.95	77.29	79.34	80.93
88	57.21	60.23	61.67	65.45	67.32	69.37	72.45	75.13	76.89	78.23	80.30	81.90
89	58.02	61.06	62.51	66.32	68.19	70.26	73.35	76.06	77.82	79.18	81.25	82.86
90	58.82	61.88	63.34	67.18	69.07	71.15	74.26	76.98	78.76	80.12	82.21	83.83
91	59.62	62.71	64.18	68.04	69.94	72.04	75.17	77.91	79.69	81.06	83.16	84.79
92	60.43	63.54	65.02	68.90	70.82	72.92	76.08	78.83	80.63	82.01	84.12	85.76
93	61.23	64.36	65.86	69.77	71.70	73.81	76.99	79.76	81.57	82.95	85.08	86.73
94	62.04	65.19	66.70	70.63	72.57	74.71	77.90	80.69	82.50	83.90	86.03	87.69
95	62.85	66.02	67.54	71.50	73.45	75.60	78.81	81.61	83.44	84.84	86.99	88.66
96	63.66	66.85	68.38	72.36	74.33	76.49	79.72	82.54	84.38	85.79	87.95	89.62
97	64.47	67.69	69.22	73.23	75.21	77.38	80.63	83.47	85.32	86.74	88.91	90.59
98	65.28	68.52	70.06	74.10	76.09	78.27	81.54	84.39	86.26	87.68	89.87	91.56
99	66.09	69.35	70.90	74.97	76.97	79.17	82.46	85.32	87.20	88.63	90.82	92.53
100	66.91	70.19	71.75	75.84	77.85	80.06	83.37	86.25	88.13	89.58	91.78	93.49

N is the number of servers. The numerical column headings indicate blocking probability B in %. Table generated by Dan Dexter

MODELO DE COLA $M/E_k/1$

Se basa en el método de fases, asume una llegada Poisson sin memoria. El servicio (servidor) es la concatenación de servicios en serie. Sólo puede haber una llamada en el sistema completo, por lo que es imposible que haya más de una 'fase' ocupada.

Cada una de las fases tiene un tiempo de servicio distribuido según una exponencial

negativa de tasa $\nu = k \cdot \mu$, de media $\frac{1}{\mu}$, donde:

$$\sigma^2 = \frac{k}{\nu^2} = \frac{1}{k \cdot \mu^2} \rightarrow \sigma = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \left(\frac{1}{\mu} \right) \quad k = \frac{1}{\mu^2 \times \sigma^2}$$

El tiempo de servicio total es la suma de los tiempos de servicio de cada fase. La suma de k variables aleatorias exponenciales negativas con media $\frac{1}{\nu} = \frac{1}{k \cdot \mu}$ da lugar a una variable aleatoria con distribución Erlang k .

- Con un único servidor, el modelo $M/E_k/1$ de parámetros k y μ , se reduce a un caso particular del modelo $M/G/1$:

$$M/G/1 \xrightarrow{\sigma^2 = \frac{1}{k \mu^2}} M/E_k/1$$

- Cuando $\sigma = \frac{1}{\mu} \rightarrow k = \frac{1}{\mu^2 \times \sigma^2} = 1$, el modelo de cola $M/E_k/1$ es un modelo de cola $M/M/1$ con tiempo de servicio exponencial.

Promedio de clientes en la cola: $L_q = \frac{\rho^2 \times (1+1)}{2 \times 1 \times (1-\rho)} = \frac{\rho^2}{(1-\rho)}$

MEDIDAS DE RENDIMIENTO:

Factor utilización del sistema: $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$

Número promedio de clientes en la cola: $L_q = \frac{\lambda^2 \cdot (1+k)}{2 \cdot k \cdot \mu \cdot (\mu - \lambda)} = \frac{(1+k) \cdot \rho^2}{2 \cdot k \cdot (1-\rho)}$

Número promedio de clientes en el sistema: $L_s = L_q + \rho$

Tiempo promedio de espera en la cola: $W_q = \frac{L_q}{\lambda}$

Tiempo promedio de estancia en el sistema: $W_s = \frac{L_s}{\lambda} = W_q + \frac{1}{\mu}$



COLA GENERAL - Modelos de Colas

El servicio de lavacoches de un aeropuerto tiene una tasa de llegadas de 9 vehículos/hora, pudiendo atender un vehículo cada 5 minutos, con un error típico ($\sigma = 2$) minutos. Se pide:

- Medidas de eficiencia según un modelo general M / G / 1
- Medidas de eficiencia según un modelo M / D / 1
- Medidas de eficiencia según un modelo M / E_k / 1

Solución:

- a) Medidas de eficiencia Modelo General M / G / 1 con $s = 1$ servidor

$$\lambda = \frac{9}{60} = 0,15 \text{ vehículos/minuto} \rightarrow \text{Tasa llegadas (Media)} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,15} = 6,666666$$

$$\mu = \frac{1}{5} = 0,2 \text{ vehículos/minuto}, \quad \sigma = 2 \text{ minutos}$$

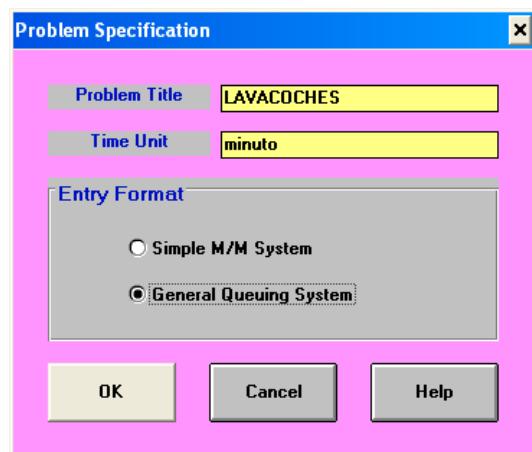
$$\text{Factor de utilización: } \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0,15}{0,2} = 0,75$$

$$\text{Promedio de vehículos en cola: } L_q = \frac{\lambda^2 \cdot \sigma^2 + \rho^2}{2 \cdot (1 - \rho)} = \frac{0,15^2 \times 2^2 + 0,75^2}{2 \times (1 - 0,75)} = 1,3050 \text{ vehículos}$$

$$\text{Promedio de vehículos en sistema: } L_s = L_q + \rho = 1,3050 + 0,75 = 2,0550 \text{ minutos}$$

$$\text{Tiempo promedio de espera en la cola: } W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{1,3050}{0,15} = 8,7000 \text{ minutos}$$

$$\text{Tiempo promedio de estancia en lavacoches: } W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{2,0550}{0,15} = 13,7000 \text{ minutos}$$



Queuing Analysis

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

LAVACOCHES

Data Description	ENTRY
Number of servers	1
Service time distribution (in minuto)	General/Arbitrary
Mean (μ)	$5 = 1 / \mu$
Standard deviation ($s > 0$)	2
(Not used)	
Service pressure coefficient	
Interarrival time distribution (in minuto)	Exponential
Location parameter (a)	0
Scale parameter ($b > 0$) ($b = \text{mean if } a=0$)	$6.66666 = 1 / \lambda$
(Not used)	
Arrival discourage coefficient	
Batch (bulk) size distribution	Constant
Constant value	1
(Not used)	
(Not used)	
Queue capacity (maximum waiting space)	
Customer population	

Probability Distribution Function

Click the distribution for your choice.

- Geometric
- HyperGeometric
- Laplace
- LogNormal
- Normal
- Pareto
- Poisson
- Power Function
- Triangular
- Uniform
- Weibull
- General/Arbitrary

Parameter 1: Mean (μ)

Parameter 2: Standard deviation ($s > 0$)

Parameter 3: (Not used)

OK Cancel Help

Interarrival time distribution: Distribución del tiempo entre llegadas

Batch size distribution: Distribución del tamaño del lote

Queuing Analysis

File Format Results Utilities Window Help

LAVACOCHES

	Performance Measure	Result
1	System: M/G/1	From Formula
2	Customer arrival rate (λ) per minuto =	0,1500
3	Service rate per server (μ) per minuto =	0,2000
4	Overall system effective arrival rate per minuto =	0,1500
5	Overall system effective service rate per minuto =	0,1500
6	Overall system utilization =	75,0000 %
7	Average number of customers in the system (L) =	2,0550
8	Average number of customers in the queue (L_q) =	1,3050
9	Average number of customers in the queue for a busy system (L_b) =	1,7400
10	Average time customer spends in the system (W) =	13,7000 minutos
11	Average time customer spends in the queue (W_q) =	8,7000 minutos
12	Average time customer spends in the queue for a busy system (W_b) =	11,6000 minutos
13	The probability that all servers are idle (P_0) =	25,0000 %
14	The probability an arriving customer waits (P_w) or system is busy (P_b) =	75,0000 %

- Con la modificación $\frac{\text{Rendimiento cola (M/G/1)}}{\left(\frac{1 + \mu^2 \cdot \sigma^2}{2} \right)} = \text{Rendimiento cola (M/M/1)}$

se pasa de las medidas de rendimiento de una cola M/G/1 a medidas de rendimiento de una cola M/M/1

$$\frac{1 + \mu^2 \cdot \sigma^2}{2} = \frac{1 + 0,2^2 \cdot 2^2}{2} = 0,58$$

$$\frac{L_q}{0,58} = \frac{1,3050}{0,58} \Big|_{M/G/1} = 2,250 = L_q \Big|_{M/M/1}$$

$$\frac{W_q}{0,58} = \frac{8,7}{0,58} \Big|_{M/G/1} = 15 = W_q \Big|_{M/M/1}$$

$$\frac{L_s}{0,58} + \rho = \frac{1,3050}{0,58} + 0,75 \Big|_{M/G/1} = 3 = L_s \Big|_{M/M/1}$$

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} \Big|_{M/G/1} = \frac{3}{0,15} = 20 = W_s \Big|_{M/M/1}$$

Queuing Analysis

File Format Results Utilities Window Help

System Performance Summary for LAVACOCHES

	Performance Measure	Result
1	System: M/M/1	From Formula
2	Customer arrival rate (λ) per minuto =	0,150
3	Service rate per server (μ) per minuto =	0,200
4	Overall system effective arrival rate per minuto =	0,150
5	Overall system effective service rate per minuto =	0,150
6	Overall system utilization =	75,000 %
7	Average number of customers in the system (L) =	3,000
8	Average number of customers in the queue (L_q) =	2,250
9	Average number of customers in the queue for a busy system (L_b) =	3,000
10	Average time customer spends in the system (W) =	20,000 minutos
11	Average time customer spends in the queue (W_q) =	15,000 minutos
12	Average time customer spends in the queue for a busy system (W_b) =	20,000 minutos
13	The probability that all servers are idle (P_0) =	25,000 %
14	The probability an arriving customer waits (P_w) or system is busy (P_b) =	75,000 %

- Con un único servidor, $M/G/1 \xrightarrow{\sigma^2=0} M/D/1$

Promedio de vehículos en cola: $L_q = \frac{\lambda^2 \cdot \sigma^2 + \rho^2}{2 \cdot (1 - \rho)} = \frac{0,75^2}{2 \cdot (1 - 0,75)} = 1,125$ vehículos

Promedio de vehículos en sistema: $L_s = L_q + \rho = 1,125 + 0,75 = 1,875$ minutos

Tiempo promedio de espera en la cola: $W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{1,125}{0,15} = 7,5$ minutos

Tiempo promedio de estancia en lavacoches: $W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{1,875}{0,15} = 12,5$ minutos

Queuing Analysis

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

LAVACOCHES

Data Description	ENTRY
Number of servers	1
Service time distribution (in minuto)	General/Arbitrary
Mean (μ)	5
Standard deviation ($s > 0$)	0
(Not used)	
Service pressure coefficient	
Interarrival time distribution (in minuto)	Exponential
Location parameter (a)	0
Scale parameter ($b > 0$) ($b = \text{mean if } a = 0$)	6.6667
(Not used)	
Arrival discourage coefficient	
Batch (bulk) size distribution	Constant
Constant value	1

Queuing Analysis		
File Format Results Utilities Window Help		
	0.00 A	
System Performance Summary for LAVACOCHES		
	Performance Measure	Result
1	System: M/G/1	From Formula
2	Customer arrival rate (lambda) per minuto =	0,150
3	Service rate per server (mu) per minuto =	0,200
4	Overall system effective arrival rate per minuto =	0,150
5	Overall system effective service rate per minuto =	0,150
6	Overall system utilization =	75,000 %
7	Average number of customers in the system (L) =	1,875
8	Average number of customers in the queue (Lq) =	1,125
9	Average number of customers in the queue for a busy system (Lb) =	1,500
10	Average time customer spends in the system (W) =	12,500 minutos
11	Average time customer spends in the queue (Wq) =	7,500 minutos
12	Average time customer spends in the queue for a busy system (Wb) =	10,000 minutos
13	The probability that all servers are idle (Po) =	25,000 %
14	The probability an arriving customer waits (Pw) or system is busy (Pb) =	75,000 %

b) En un modelo de cola M / D / 1 con s = 1 servidor

$$\lambda = \frac{9}{60} = 0,15 \text{ vehículos/minuto} \rightarrow \text{Tasa llegadas (Media)} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,15} = 6,666666$$

$$\text{Tasa de servicio} = \frac{1}{\mu} = 5 \rightarrow \mu = 0,2 \text{ pasajeros/minuto}$$

$$\text{Factor de utilización: } \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0,15}{0,20} = 0,75$$

$$\text{Promedio de empleados en la cola: } L_q = \frac{\rho^2}{2 \cdot (1 - \rho)} = \frac{0,75^2}{2 \times (1 - 0,75)} = 1,125 \text{ vehículos}$$

$$\text{Promedio de empleados en el sistema: } L_s = L_q + \rho = 1,125 + 0,75 = 1,875 \text{ vehículos}$$

$$\text{Tiempo promedio que un empleado espera en la cola: } W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{1,125}{0,15} = 7,50 \text{ minutos}$$

$$\text{Tiempo promedio que los empleados están en la cola: } W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{1,875}{0,15} = 12,50 \text{ minutos}$$

LAVACOCHES

Data Description	ENTRY
Number of servers	1
Service time distribution (in minuto)	Constant
Mean (μ)	$5 = 1 / \mu$
Standard deviation ($s > 0$)	
(Not used)	
Service pressure coefficient	
Interarrival time distribution (in minuto)	Exponential
Location parameter (a)	0
Scale parameter ($b > 0$) ($b = \text{mean if } a=0$)	$6.6666 = 1 / \lambda$
(Not used)	
Arrival discourage coefficient	
Batch (bulk) size distribution	Constant
Constant value	1
(Not used)	
(Not used)	
Queue capacity (maximum waiting space)	
Customer population	

Probability Distribution Function

Click the distribution for your choice.

- Beta
- Binomial
- Constant**
- Discrete
- Erlang
- Exponential
- Gamma
- Geometric
- HyperGeometric
- Laplace
- LogNormal
- Normal

Constant

Parameter 1
Constant value
Parameter 2
(Not used)
Parameter 3
(Not used)

OK **Cancel** **Help**

Interarrival time distribution: Distribución del tiempo entre llegadas

Batch size distribution: Distribución del tamaño del lote

System Performance Summary for LAVACOCHES

	Performance Measure	Result
1	System: M/D/1	From Formula
2	Customer arrival rate (λ) per minuto =	0,1500
3	Service rate per server (μ) per minuto =	0,2000
4	Overall system effective arrival rate per minuto =	0,1500
5	Overall system effective service rate per minuto =	0,1500
6	Overall system utilization =	75,0000 %
7	Average number of customers in the system (L) =	1,8750
8	Average number of customers in the queue (L_q) =	1,1250
9	Average number of customers in the queue for a busy system (L_b) =	1,5000
10	Average time customer spends in the system (W) =	12,5000 minutos
11	Average time customer spends in the queue (W_q) =	7,5000 minutos
12	Average time customer spends in the queue for a busy system (W_b) =	10,0000 minutos
13	The probability that all servers are idle (P_0) =	25,0000 %
14	The probability an arriving customer waits (P_w) or system is busy (P_b) =	75,0000 %

c) Medidas de eficiencia según un modelo $M/E_k/1$ con $s=1$ servidor

$$\lambda = \frac{9}{60} = 0,15 \text{ vehículos/minuto} \rightarrow \text{Tasa llegadas (Media)} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,15} = 6,666666$$

$$\text{Tasa de servicio} = \frac{1}{\mu} = 5 \rightarrow \mu = 0,2 \text{ pasajeros/minuto}, \sigma = 2 \text{ minutos}$$

$$k = \frac{1}{\mu^2 \times \sigma^2} = \frac{1}{0,2^2 \times 2^2} = 6,25$$

Promedio de clientes en la cola:

$$L_q = \frac{\rho^2 \cdot (1+k)}{2 \cdot k \cdot (1-\rho)} = \frac{0,75^2 \times (1+6,25)}{2 \times 6,25 \times (1-0,75)} = 1,305 \text{ clientes}$$

Promedio de clientes en el sistema: $L_s = L_q + \rho = 1,305 + 0,75 = 2,055$ clientes

$$\text{Tiempo promedio en la cola: } W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{1,305}{0,15} = 8,7 \text{ minutos}$$

$$\text{Tiempo promedio en el sistema: } W_s = \frac{L_s}{\lambda} = W_q + \frac{1}{\mu} = 8,7 + 5 = 13,7 \text{ minutos}$$

Se observa que cuando $\sigma = \frac{1}{\mu} \rightarrow k = \frac{1}{\mu^2 \times \sigma^2} = 1$, el modelo de cola $M/E_k/1$ es un modelo de

cola $M/M/1$ con tiempo de servicio exponencial. En este caso,

$$\text{Promedio de clientes en la cola: } L_q = \frac{\rho^2 \times (1+1)}{2 \times 1 \times (1-\rho)} = \frac{\rho^2}{(1-\rho)}$$

Data Description		ENTRY
Number of servers	1	
Service time distribution (in minuto)	Erlang	
Location parameter (a)	2.5 = \sqrt{k}	
Scale parameter (b>0)	1	
Shape parameter (c>=1, integer)	4	
Service pressure coefficient		
Interarrival time distribution (in minuto)	Exponential	
Location parameter (a)	0	
Scale parameter (b>0) (b=mean if a=0)	6.6666 = 1 / λ	
(Not used)		
Arrival discourage coefficient		
Batch (bulk) size distribution	Constant	
Constant value	1	
(Not used)		
(Not used)		
Queue capacity (maximum waiting space)		
Customer population		

Probability Distribution Function

Click the distribution for your choice.

- Beta
- Binomial
- Constant
- Discrete
- Erlang**
- Exponential
- Gamma
- Geometric
- HyperGeometric
- Laplace
- LogNormal
- Normal

Erlang

Parameter 1
Location parameter (a)

Parameter 2
Scale parameter (b>0)

Parameter 3
Shape parameter (c>=1, integer)

OK Cancel Help

Interarrival time distribution: Distribución del tiempo entre llegadas

Batch size distribution: Distribución del tamaño del lote

Queuing Analysis

File Format Results Utilities Window Help

	Performance Measure	Result
1	System: M/E(2,5)/1	From Formula
2	Customer arrival rate (lambda) per minuto =	0,150
3	Service rate per server (mu) per minuto =	0,200
4	Overall system effective arrival rate per minuto =	0,150
5	Overall system effective service rate per minuto =	0,150
6	Overall system utilization =	75,001 %
7	Average number of customers in the system (L) =	2,055
8	Average number of customers in the queue (Lq) =	1,305
9	Average number of customers in the queue for a busy system (Lb) =	1,740
10	Average time customer spends in the system (W) =	13,700 minutos
11	Average time customer spends in the queue (Wq) =	8,700 minutos
12	Average time customer spends in the queue for a busy system (Wb) =	11,600 minutos
13	The probability that all servers are idle (Po) =	24,999 %
14	The probability an arriving customer waits (Pw) or system is busy (Pb) =	75,001 %

⊗ La distribucion de Erlang $M/E_k/1$ pasa a ser un modelo $M/M/1$ introduciendo:

Queuing Analysis

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

LAVACOCHES

Data Description	ENTRY
Number of servers	1
Service time distribution (in minuto)	Erlang
Location parameter (a)	2.5
Scale parameter (b>0)	1
Shape parameter (c>=1, integer)	2.5
Service pressure coefficient	
Interarrival time distribution (in minuto)	Exponential
Location parameter (a)	0
Scale parameter (b>0) (b=mean if a=0)	6.6667
(Not used)	
Arrival discourage coefficient	
Batch (bulk) size distribution	Constant
Constant value	1
(Not used)	
(Not used)	
Queue capacity (maximum waiting space)	
Customer population	
Busy server cost per minuto	
Idle server cost per minuto	
Customer waiting cost per minuto	
Customer being served cost per minuto	
Cost of customer being balked	
Unit queue capacity cost	

Queuing Analysis		
File Format Results Utilities Window Help		
	0.00 A	
System Performance Summary for LAVACOCHES		
	Performance Measure	Result
1	System: M/E(2,5)/1	From Formula
2	Customer arrival rate (lambda) per minuto =	0,150
3	Service rate per server (mu) per minuto =	0,200
4	Overall system effective arrival rate per minuto =	0,150
5	Overall system effective service rate per minuto =	0,150
6	Overall system utilization =	75,000 %
7	Average number of customers in the system (L) =	3,000
8	Average number of customers in the queue (Lq) =	2,250
9	Average number of customers in the queue for a busy system (Lb) =	3,000
10	Average time customer spends in the system (W) =	20,000 minutos
11	Average time customer spends in the queue (Wq) =	15,000 minutos
12	Average time customer spends in the queue for a busy system (Wb) =	20,000 minutos
13	The probability that all servers are idle (Po) =	25,000 %
14	The probability an arriving customer waits (Pw) or system is busy (Pb) =	75,000 %

Cuando $\sigma = \frac{1}{\mu} \rightarrow k = 1$, el modelo de cola $M/E_k/1$ pasa a ser un modelo de cola $M/M/1$ con tiempo de servicio exponencial.

$$\text{Factor de saturación: } \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0,15}{0,2} = 0,75$$

$$\text{Promedio de clientes en la cola: } L_q = \frac{\rho^2 \cdot (1+k)}{2 \cdot k \cdot (1-\rho)} = \frac{\rho^2 \times (1+1)}{2 \times 1 \times (1-0,75)} = \frac{0,75^2}{(1-0,75)} = 2,250$$

$$\text{Promedio de clientes en el sistema: } L_s = L_q + \rho = 2,250 + 0,75 = 3 \text{ clientes}$$

$$\text{Tiempo promedio en la cola: } W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{2,250}{0,15} = 15 \text{ minutos}$$

$$\text{Tiempo promedio en el sistema: } W_s = \frac{L_s}{\lambda} = 15 + \frac{1}{0,2} = 15 + 5 = 20 \text{ minutos}$$

Introduciendo los datos en un modelo de Cola $M/M/1$:

$$\lambda = \frac{9}{60} = 0,15 \text{ vehículos/minuto}$$

$$\text{Tasa de servicio} = \frac{1}{\mu} = 5$$

$$\rightarrow \mu = 0,2 \text{ pasajeros/minuto}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0,15}{0,2} = 0,75$$

Queuing Analysis	
File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help	
	0.00 A
LAVACOCHES	
Data Description	ENTRY
Number of servers	1
Service rate (per server per minuto)	0,2
Customer arrival rate (per minuto)	0,15
Queue capacity (maximum waiting space)	
Customer population	
Busy server cost per minuto	
Idle server cost per minuto	
Customer waiting cost per minuto	
Customer being served cost per minuto	
Cost of customer being balked	
Unit queue capacity cost	

Queuing Analysis

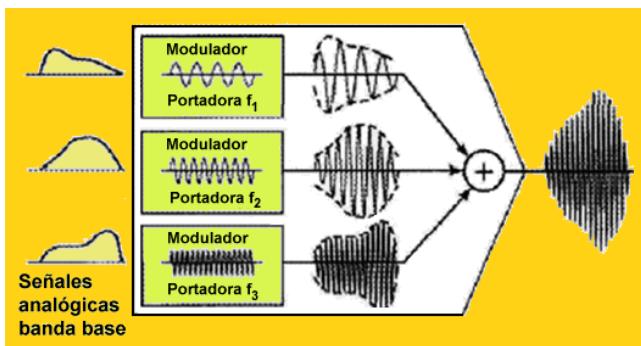
File Format Results Utilities Window Help

0.00 A

System Performance Summary for LAVACOCHES

	Performance Measure	Result
1	System: M/M/1	From Formula
2	Customer arrival rate (λ) per minuto =	0,150
3	Service rate per server (μ) per minuto =	0,200
4	Overall system effective arrival rate per minuto =	0,150
5	Overall system effective service rate per minuto =	0,150
6	Overall system utilization =	75,000 %
7	Average number of customers in the system (L) =	3,000
8	Average number of customers in the queue (L_q) =	2,250
9	Average number of customers in the queue for a busy system (L_b) =	3,000
10	Average time customer spends in the system (W) =	20,000 minutos
11	Average time customer spends in the queue (W_q) =	15,000 minutos
12	Average time customer spends in the queue for a busy system (W_b) =	20,000 minutos
13	The probability that all servers are idle (P_0) =	25,000 %
14	The probability an arriving customer waits (P_w) or system is busy (P_b) =	75,000 %

LÍNEAS TELEFÓNICAS: MODELO COLA G/G/s



Para solventar cuántas líneas telefónicas se necesitan en un conmutador se utiliza un modelo M/G/s eliminando a los "clientes bloqueados". Este modelo es una línea de espera multicanal con s servidores, tiempos entre llegadas exponenciales para las llamadas y una distribución general para el tiempo de servicio, que en este caso es la duración de cada llamada.

La frase "eliminación de los clientes bloqueados" se interpreta que cuando una llamada encuentra todos los servidores ocupados (todas las líneas ocupadas), el usuario no ingresa en la línea de espera, sino que simplemente se va. Esta frase describe claramente el comportamiento del conmutador telefónico tradicional. Los sistemas sofisticados actuales tienen una línea de espera para un número finito de clientes, incluso proporcionando al cliente la oportunidad de disfrutar de una melodía.

El problema de seleccionar la cantidad apropiada de líneas (servidores) se resuelve calculando la probabilidad en estado estable de que exactamente j líneas estén ocupadas. Esto, a su vez, será utilizado para calcular la probabilidad de estado estable de que todas las "s" líneas estén ocupadas.

Si se tienen "s" líneas y todas están ocupadas, el siguiente cliente que llame no será capaz de lograr la llamada.

La probabilidad de estado estable de que haya exactamente j servidores ocupados, dado que s líneas (servidores) están disponibles, viene dada por la expresión:

$$p_j = \frac{(\lambda / \mu)^j / j!}{\sum_{k=0}^s (\lambda / \mu)^k / k!} \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda = \text{tasa de llegadas (velocidad que llegan las llamadas)} \\ \frac{1}{\mu} = \text{tiempo medio servicio (duración promedio de una conversación)} \\ s = \text{número de servidores (líneas)} \end{array} \right.$$

Esta expresión se conoce como distribución de Poisson truncada o distribución de pérdida de Erlang. Señalar que se considera una distribución general del tiempo de servicio, el valor definido por la expresión anterior depende solamente de la media de esta distribución.

MODELOS DE LÍNEAS DE ESPERA CON PRIORIDADES

En ocasiones la disciplina de la Cola no es FIFO (primero en llegar, primero en ser atendido). Hay ocasiones que se atiende primero a ciertos clientes (importantes, trabajos especiales, urgencias, etc.)

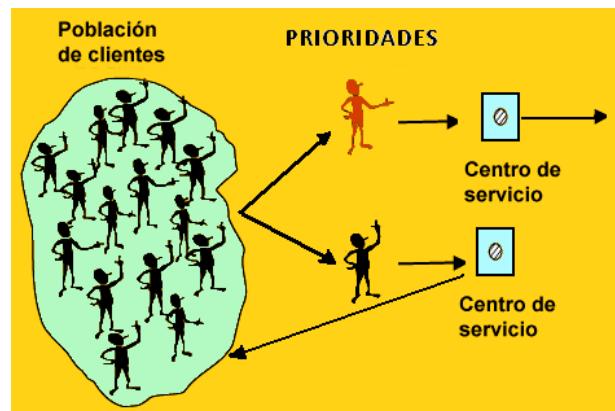


Los modelos para esos sistemas de líneas de espera hacen suposiciones generales:

1. Hay dos o más categorías de clientes. Cada categoría se asigna a una clase de prioridad. Los clientes en la clase con prioridad 1 tienen preferencia para recibir el servicio antes que los clientes en la clase con prioridad 2. Si hay más de dos clases de prioridad, entonces, los clientes en la clase con prioridad 2 tienen preferencia sobre los clientes en la clase con prioridad 3, etcétera.

2. Después de clasificar a los clientes de prioridad más alta, los clientes en cada clase de prioridad se sirven sobre la base de primero en entrar, primero en salir. Así, dentro de cada clase de prioridad, la preferencia para recibir servicio se basa en el tiempo que han esperado en el sistema de líneas de espera.

1. Prioridades sin interrupción: Una vez que un servidor ha comenzado a atender a un cliente, el servicio tiene que terminar sin interrupción aunque llegue un cliente de prioridad más alta mientras este servicio está en proceso. Una vez que termina el servicio, si hay clientes en la línea de espera, se aplican las prioridades para seleccionar a quien servir. En particular, el seleccionado es el miembro de prioridad más alta representada en la línea de espera quien más ha esperado.



2. Prioridades con interrupción: El cliente con menor prioridad que se está sirviendo se interrumpe (y regresa a la línea de espera) cada vez que entra al sistema un cliente con prioridad más alta. De este modo, se libera a un servidor para comenzar a servir de inmediato a la nueva llegada. Cuando un servidor logra terminar un servicio, se elige el siguiente cliente para comenzar el servicio justo como se señaló para las prioridades sin interrupción. (El cliente excluido se convierte en el cliente de su clase de prioridad en la línea de espera que ha esperado más, con suerte, volverá a ser atendido pronto y, quizás después de otras interrupciones, terminará).

LÍNEAS DE ESPERA CON PRIORIDADES SIN INTERRUPCIÓN

- ◆ Sea n el número de clases de prioridad
- ◆ Para cada clase con prioridad i ($i = 1, 2, \dots, n$) los tiempos entre llegadas de los clientes en esa clase siguen una distribución exponencial con media $1 / \lambda_i$
- ◆ Todos los tiempos de servicio siguen una distribución con media $1 / \mu$, sin importar la clase de prioridad involucrada.
- ◆ El sistema de líneas de espera puede tener cualquier número de servidores.

Excepto por el uso de probabilidades no preferentes, los supuestos son los mismos que para el modelo M/M/s.

$$\text{Factor de utilización (intensidad del tráfico): } \rho = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n}{s \cdot \mu} = \frac{\lambda}{s \cdot \mu}$$

Se requiere que $\rho < 1$ para que el sistema de líneas de espera alcance una condición de estado estable para todas las clases de prioridad.

Tiempo promedio de clientes de la clase de prioridad k en el sistema:

$$W_k = \frac{1}{AB_{k-1} B_k} + \frac{1}{\mu} \quad k = 1, 2, \dots, N$$

$$A = \frac{s! (s \cdot \mu - \lambda)}{r^s} \sum_{j=0}^k \frac{r^j}{j!} + s \cdot \mu \quad \text{donde } r = \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)$$

$$B_k = 1 - \frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i}{s \cdot \mu} \quad B_0 = 1$$

Número promedio de clientes de la clase de prioridad k en el sistema: $L_k = \lambda_k \cdot W_k$

Tiempo promedio de clientes de la clase de prioridad k en la cola: $W_q = W_k - \frac{1}{\mu}$

Número promedio de clientes de la clase de prioridad k en la cola: $L_q = L_s - \frac{\lambda_k}{\mu} \quad (L_q = \lambda_k \cdot W_q)$

Cuando hay un sólo servidor ($s = 1$) las fórmulas anteriores se reducen:

Tiempo promedio de un cliente de la clase de prioridad k en el sistema:

$$W_k = \frac{A_k}{B_{k-1} B_k} + \frac{1}{\mu_k} \quad k = 1, 2, \dots, N$$

$$A_k = \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{\mu_i^2} \quad B_k = 1 - \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{\mu_i} \quad B_0 = 1$$

Se requiere que la clase de prioridad k sea un estado estable $\left(\sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{\mu_i} < 1 \right)$

Se utilizan las formulas de Little para obtener las medidas de rendimiento de cada clase prioritaria.

LÍNEAS DE ESPERA CON PRIORIDADES CON INTERRUPCIÓN

- ♦ Sea n el número de clases de prioridad
- ♦ Para cada clase con prioridad i ($i = 1, 2, \dots, n$) los tiempos entre llegadas de los clientes en esa clase siguen una distribución exponencial con media $1 / \lambda_i$
- ♦ Todos los tiempos de servicio siguen una distribución con media $1 / \mu$, sin importar la clase de prioridad involucrada.
- ♦ El sistema de líneas de espera tiene un solo servidor.

Excepto por la complicación de usar probabilidades con interrupción, los supuestos son los mismos que para el modelo M/M/1.

Siendo λ_i la tasa media de llegada para clientes en la clase de prioridad i-ésima ($i = 1, 2, \dots, n$), λ es la tasa media de llegadas global para todos los clientes.

Factor de utilización (intensidad del tráfico): $\rho = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n}{\mu}$

Se requiere que $\rho < 1$ para que el sistema de líneas de espera tenga la condición de estado estable para todas las clases de prioridad.

Se utilizan prioridades para "disminuir" los tiempos de espera de los clientes de alta prioridad, a expensas de "aumentar" los tiempos de espera de los clientes de baja prioridad.

Se requiere partir del supuesto que el tiempo esperado de servicio sea idéntico para todas las clases de prioridad. Con la misma notación que para el modelo sin interrupción, el hecho de poder interrumpir cambia el tiempo esperado total en el sistema (incluyendo el tiempo total de servicio) a partir de la expresión del tiempo promedio de clientes de la clase prioritaria k en el sistema:

$$W_k = \frac{1/\mu}{B_{k-1} B_k} \quad s=1 \quad k=1,2,\dots,N$$

$$L_k = \lambda_k \cdot W_k \quad s=1 \quad k=1,2,\dots,N$$

Cuando el número de servidores ($s > 1$) el tiempo promedio de clientes de la clase de prioridad k en el sistema W_k se puede calcular mediante un proceso iterativo.



COLA CON PRIORIDADES CON INTERRUPCIÓN

Los pacientes llegan a Urgencias de un Hospital de manera aleatoria (proceso entrada de Poisson), por lo que los tiempos entre llegadas siguen una distribución exponencial con una tasa promedio de una media hora. El tiempo que necesita un equipo para atender a los pacientes sigue aproximadamente una distribución exponencial con un promedio de 20 minutos por paciente.

Los pacientes en este orden de prioridad: Críticos (un tratamiento inmediato es vital para la supervivencia), Graves (un tratamiento rápido es importante para prevenir mayor daño) y Estables (el tratamiento puede retrasarse sin consecuencias adversas). Por lo general, dentro de la misma categoría se atienden a los pacientes según la regla de primero en llegar, primero en salir. Se interrumpe el tratamiento de un paciente si llega un caso nuevo de una categoría de prioridad más alta.

Aproximadamente el 10% de los pacientes caen en la primera categoría, el 30% en la segunda y el 60% en la tercera. Los casos más serios se internan en el Hospital después de recibir el tratamiento urgente, el tiempo promedio de tratamiento en la sala de Urgencias en realidad no difiere mucho entre estas categorías.

Calcular las medidas de rendimiento en el hospital con dos equipos de médicos.

Se trata de un sistema de colas de prioridades con interrupción, siendo:

$$\lambda = 2 \text{ pacientes/hora} \quad \mu = 3 \text{ pacientes/hora}$$

$$\lambda_1 = 0,1 \times 2 = 0,2 \text{ pacientes/hora}$$

$$\lambda_2 = 0,3 \times 2 = 0,6 \text{ pacientes/hora}$$

$$\lambda_3 = 0,6 \times 2 = 1,2 \text{ pacientes/hora}$$

Si se tienen dos equipos médicos ($s = 2$) los tiempos de espera para los pacientes Críticos (prioridad 1) no se ven afectados por la presencia de otros pacientes con una prioridad menor. Es decir, W_1 es la misma para cualquiera de los otros valores de λ_2 y λ_3 .

$$W_1 = W \text{ para un modelo de cola M/M/s con } s = 2, \lambda = 0,2 \text{ y } \mu = 3$$

Queuing Analysis		
	Performance Measure	Result
1	System: M/M/2	From Formula
2	Customer arrival rate (lambda) per hora =	0,2000
3	Service rate per server (mu) per hora =	3,0000
4	Overall system effective arrival rate per hora =	0,2000
5	Overall system effective service rate per hora =	0,2000
6	Overall system utilization =	3,3333 %
7	Average number of customers in the system (L) =	0,0667
8	Average number of customers in the queue (Lq) =	0,0001
9	Average number of customers in the queue for a busy system (Lb) =	0,0345
10	Average time customer spends in the system (W) =	0,3337 horas
11	Average time customer spends in the queue (Wq) =	0,0004 horas
12	Average time customer spends in the queue for a busy system (Wb) =	0,1724 horas
13	The probability that all servers are idle (P0) =	93,5484 %
14	The probability an arriving customer waits (Pw) or system is busy (Pb) =	0,2151 %

$$p_n = \begin{cases} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!} p_0 & n \leq 2 \\ \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{s! s^{(n-s)}} p_0 & n > 2 \end{cases}$$

Queuing Analysis		
File Format Results Utilities Window Help		
System Probability Summary for URGENCIAS		
n	Estimated Probability of n Customers in the System	Cumulative Probability
0	0,9355	0,9355
1	0,0624	0,9978
2	0,0021	0,9999
3	0,0001	1,0000
4	0,0000	1,0000

$$p_1 = 0,0677 \times 0,9355 = 0,0624$$

$$p_2 = 0,0677^2 \times \frac{1}{2!} \times 0,9355 = 0,0021$$

$$p_3 = 0,0667^3 \times \frac{1}{2! 2} \times 0,9355 = 0,0001$$

$$p_4 = 0,0667^4 \times \frac{1}{2! 2^2} \times 0,9355 = 0,0000$$

Utilización promedio de urgencias: $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{0,2}{3} = 0,0667$

Factor de utilización o congestión de urgencias: $\rho = \frac{\lambda}{s \cdot \mu} = \frac{0,2}{2 \cdot 3} = 0,0333$

Probabilidad de que ningún paciente crítico se encuentre en el sistema de colas:

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda / \mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda / \mu)^s}{s!} \times \left(\frac{1}{1-\rho}\right)} = \frac{1}{\sum_{n=0}^1 \frac{(0,2 / 3)^n}{n!} + \frac{(0,2 / 3)^2}{2!} \left(\frac{1}{1-0,3333}\right)} = 0,9355$$

Número promedio de pacientes críticos en el sistema: $L_s = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot p_n$

$$L_s = \sum_{n=1}^4 n \cdot p_n = 0,0624 + 2 \times 0,0021 + 3 \times 0,0001 = 0,0667$$

Tiempo promedio de pacientes críticos en el sistema: $W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{0,0667}{0,2} = 0,3333$ horas

Número promedio de pacientes críticos en la cola: $L_q = \sum_{n=s+1}^{\infty} (n-s) \cdot p_n$

$$L_q = \sum_{n=s+1}^{\infty} (n-2) \cdot p_n = 0,0001 = 0,0001$$

Tiempo promedio de pacientes críticos en la cola: $W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{0,0001}{0,2} = 0,0004$ horas

Número promedio de pacientes críticos con urgencias ocupadas: $L_b = \frac{L_q}{p_w}$ $p_w = \sum_{n \geq s}^{\infty} p_n$

$$L_b = \frac{0,0001}{0,0021 + 0,0001} = 0,0345$$

Tiempo promedio de pacientes críticos con urgencias ocupadas: $W_b = \frac{W_q}{p_w} = \frac{0,0004}{0,0022} = 0,1724$

LÍNEAS DE ESPERA SIN PRIORIDADES CON INTERRUPCIONES

Se trata de una línea de espera sujeta a interrupciones aleatorias e instantáneas, con la particularidad de que los clientes presentan una tolerancia absoluta. Se analiza el caso general de un servidor, en donde los procesos de llegada y servicio, como los de interrupción y restitución del funcionamiento son de tipo Poisson. El modelo puede utilizarse, con las mismas hipótesis, para resolver un sistema multiclasa con prioridad relativa.

Es frecuente encontrar sistemas de colas que presenten interrupciones del servicio que se presta o interrupciones del trabajo que se realiza. Las interrupciones pueden estar ocasionadas por distintas causas: exógenas (corte de comunicaciones, fallo de suministro de energía, etc.) o endógenas (desperfectos o fallos de la máquina que realiza el trabajo). En la mayoría de los casos, tanto los tiempos entre desperfectos que generan las interrupciones como los tiempos de reparación del desperfecto son aleatorios, con distribución exponencial

En algunos sistemas, cuando se produce la falla se detiene inmediatamente el servicio. Esta situación se denomina interrupción absoluta o interrupción con prioridad.

En un sistema con interrupción sin prioridad, el canal puede funcionar utilizando una fuente auxiliar hasta finalizar el trabajo que estaba realizando en el momento del desperfecto. El sistema puede encontrarse en las siguientes condiciones: F = Operativo. S = Temporalmente operativo. R = No operativo.

A diferencia de los casos de interrupción con prioridad, donde la frecuencia y la duración de las interrupciones es independiente del proceso de atención a los clientes. En los sistemas que tienen la posibilidad de postergar la detención, como en este caso, las probabilidades de que se encuentren en alguna de las condiciones señaladas dependen de la duración del servicio del canal, lo que introduce una dificultad adicional en la formulación de las expresiones cuantitativas para la resolución del modelo que los describe.

FORMULACIÓN DEL MODELO

- $n \equiv$ Número de clientes que se encuentran en el sistema en un instante determinado.
- $\lambda \equiv$ Número promedio de clientes que llegan al sistema por unidad de tiempo (tasa promedio de llegadas)
La inversa de este parámetro es el intervalo promedio entre llegadas de clientes: $T_A = 1 / \lambda$
- $\mu \equiv$ Velocidad promedio de atención (tasa promedio de servicios a clientes cuando el canal está funcionando). La inversa es la duración promedio del servicio: $T_S = 1 / \mu$
- $\lambda_R \equiv$ Cantidad promedio de interrupciones por unidad de tiempo de funcionamiento del sistema.
La inversa de este parámetro es el tiempo promedio que transcurre desde que se reanuda el funcionamiento hasta que se produce el próximo desperfecto: $T_R = 1 / \lambda_R$
- $\mu_R \equiv$ Velocidad promedio de restitución del servicio. La inversa de este parámetro es la duración promedio de la interrupción: $T_{SR} = 1 / \mu_R$
- $\rho \equiv$ Factor de saturación o intensidad de tráfico del sistema: $\rho = \lambda / \mu$
- $\rho_R \equiv$ Factor de interrupción del sistema: $\rho_R = \lambda_R / \mu_R$
- $L_s \equiv$ Número promedio de clientes en el sistema
- $L_c \equiv$ Número promedio de clientes en la cola
- $W_s \equiv$ Tiempo promedio de permanencia de un cliente en el sistema.
- $W_c \equiv$ Tiempo promedio de permanencia de un cliente en la cola
- $M \equiv$ Número de canales del sistema

$H \equiv$ Número promedio de clientes recibiendo atención (o número promedio de canales atendiendo).

$p(H) \equiv$ Probabilidad de que el canal se encuentre atendiendo. Viene dada por la relación H/M , por lo que para un sistema monocanal será $p(H) \equiv H$

$I \equiv$ Número promedio de clientes cuyo servicio se ha interrumpido y que se encuentran a la espera de que el servicio se restaure (número promedio de canales ocupados pero en situación de interrupción)

$p(I) \equiv$ Probabilidad de que un canal se encuentre en situación de interrupción cuando hay clientes para atender ($n > 0$). Viene dada por la relación I/M , por lo que para un sistema de un solo canal será $p(I) \equiv I$

$\lambda_n \equiv$ Tasa de ingresos cuando hay ' n ' clientes en el sistema

$\mu_n \equiv$ Tasa de egresos cuando hay ' n ' clientes en el sistema

El estado del sistema queda definido por la cantidad de clientes que se encuentran en el sistema ($n = 0, 1, 2, \dots$) y la condición operativa ($j = F, S, R$)

$p(n, j) \equiv$ Probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado (n, j)

$p(n, j) \equiv$ Probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado (n, j)

Probabilidad sistema operativo: $p(F) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n, F)$:

Probabilidad sistema temporalmente operativo: $p(S) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n, S)$

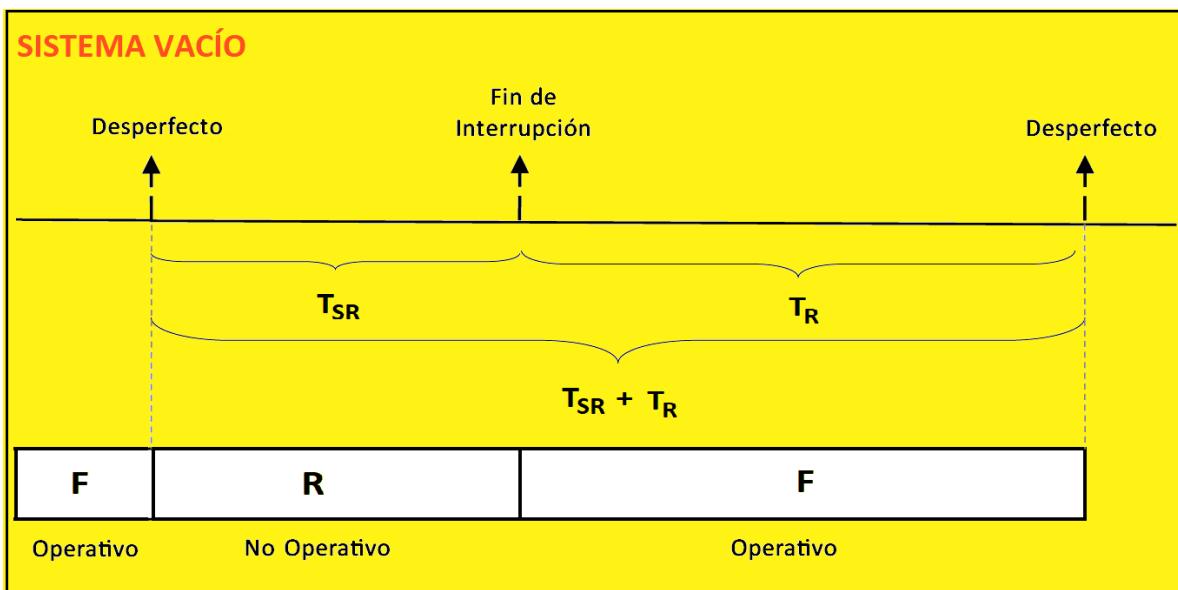
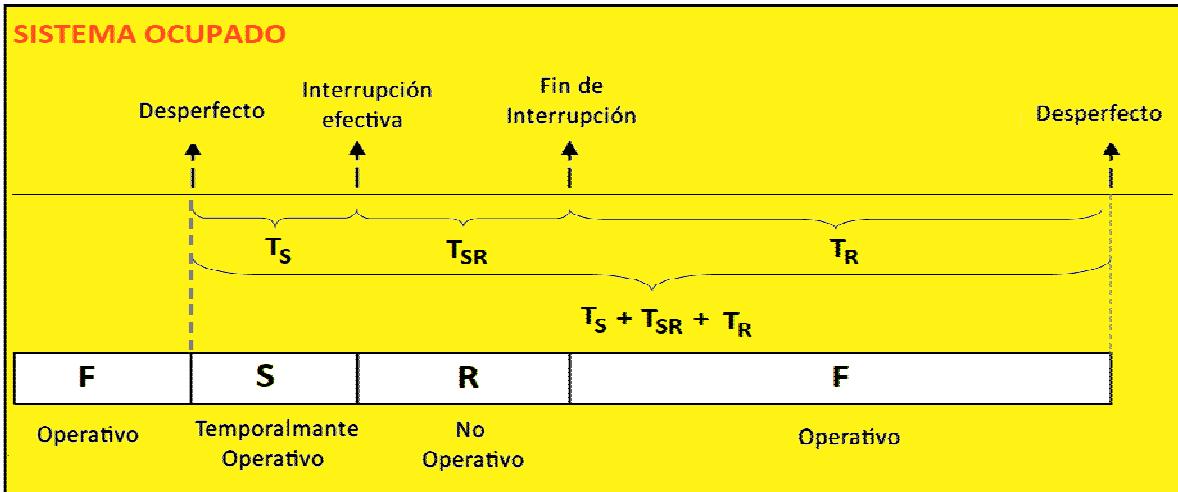
Probabilidad sistema no operativo: $p(R) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n, R)$

Suponiendo que los clientes presentan absoluta tolerancia frente a interrupciones (no abandonan el sistema frente a interrupciones, esperan a que la actividad se reanude).

Se analiza la llegada de clientes de un solo canal que provienen de una población infinita pertenecientes a una misma clase o categoría, la disciplina de atención es FIFO (primer cliente en llegar, primer cliente en ser atendido). Los procesos de llegada y atención de clientes, como los de interrupción y restauración de servicios son de tipo Poisson.

Es decir, la llegada de clientes, la duración del servicio, el tiempo que transcurre hasta que aparece una interrupción, así como el tiempo requerido para restaurar el servicio son variables aleatorias de una distribución exponencial (sin memoria).

El tiempo de restauración comienza una vez que finaliza el servicio del cliente que se está atendiendo en el momento del desperfecto (cuando hay clientes en el sistema) o inmediatamente cuando el sistema está vacío.



Probabilidad de canal ocioso cuando se produce el desperfecto

$$p(n=0 / F) = \frac{p(0, F)}{p(F)}$$

Probabilidad de canal ocupado cuando se produce el desperfecto

p(n>0 / F) = 1 - \frac{p(0, F)}{p(F)}

Probabilidad de funcionamiento del sistema:

$$p(F) = \frac{T_R}{(T_S + T_{SR} + T_R) \cdot \left(1 - \frac{p(0, F)}{p(F)}\right) + (T_{SR} + T_S) \cdot \frac{p(0, F)}{p(F)}}$$

con lo que,

$$p(F) = \frac{T_R}{T_S + T_{SR} + T_R - T_S \cdot \frac{p(0, F)}{p(F)}} \rightarrow p(F) = \frac{T_R + p(0, F) \cdot T_S}{T_S + T_{SR} + T_R} \quad (1)$$

$$\text{Probabilidad de interrupción real del sistema: } p(R) = \frac{T_{SR}}{T_S + T_{SR} + T_R - T_S \cdot \frac{p(0, F)}{p(F)}} \quad (2)$$

Probabilidad canal funcionando pendiente de interrupción:

$$p(S) = \frac{T_s \cdot \left(1 - \frac{p(0, F)}{p(F)}\right)}{T_s \cdot \left(1 - \frac{p(0, F)}{p(F)}\right) + T_{SR} + T_R} \rightarrow p(S) = \frac{p(F) \cdot T_s - T_s \cdot p(0, F)}{p(F) \cdot (T_s + T_{SR} + T_R) - T_s \cdot p(0, F)} \quad (3)$$

Sustituyendo en (3) el valor $p(F)$ de (1), resulta:

$$p(S) = \frac{\left(\frac{T_R + p(0, F) \cdot T_S}{T_S + T_{SR} + T_R}\right) \cdot T_S - T_s \cdot p(0, F)}{\left(\frac{T_R + p(0, F) \cdot T_S}{T_S + T_{SR} + T_R}\right) \cdot (T_S + T_{SR} + T_R) - T_s \cdot p(0, F)}$$

$$p(S) = \frac{\frac{T_R + p(0, F) \cdot T_S - (T_S + T_{SR} + T_R) \cdot T_s \cdot p(0, F)}{T_S + T_{SR} + T_R}}{T_R + p(0, F) \cdot T_S - T_s \cdot p(0, F)}$$

$$p(S) = \frac{T_S \cdot \frac{T_R - p(0, F) \cdot T_R - p(0, F) \cdot T_{SR}}{T_S + T_{SR} + T_R}}{T_S + T_{SR} + T_R} \quad (4)$$

PROBABILIDAD TIEMPO		
Canal atendiendo	Sin clientes	Sistema interrumpido
$p(H)$	$p(0)$	$p(I)$
	$\xleftarrow{\hspace{1cm}} p(0, F) \xrightarrow{\hspace{1cm}}$	$p(0, R)$
$p(S)$	$p(F)$	$p(R)$
Temporalmente operativo	Operativo	No operativo

$$p(F) + p(S) = p(0, F) + p(H) \quad (5)$$

$$p(R) = p(0, R) + p(I)$$

Reemplazando las expresiones (1) y (4) en (5) se obtiene:

$$\frac{T_R + p(0, F) \cdot T_S}{T_S + T_{SR} + T_R} + \frac{T_S}{T_R} \cdot \frac{T_R - p(0, F) \cdot T_R - p(0, F) \cdot T_{SR}}{T_S + T_{SR} + T_R} = p(0, F) + p(H)$$

operando,

$$\frac{T_R^2 + T_R \cdot T_S - p(0, F) \cdot T_{SR} \cdot T_S}{T_R \cdot (T_S + T_{SR} + T_R)} = p(0, F) + p(H)$$

$$T_R^2 + T_R \cdot T_S - p(0, F) \cdot T_{SR} \cdot T_S = p(0, F) \cdot T_R \cdot (T_S + T_{SR} + T_R) + p(H) \cdot T_R \cdot (T_S + T_{SR} + T_R)$$

$$p(0, F) = \frac{T_R^2 + T_R \cdot T_S - p(H) \cdot T_R \cdot (T_S + T_{SR} + T_R)}{T_R \cdot (T_S + T_{SR} + T_R) + T_{SR} \cdot T_S}$$

$$p(0, F) = \frac{T_R \cdot [T_R + T_S - p(H) \cdot (T_S + T_{SR} + T_R)]}{T_R^2 + T_R \cdot T_{SR} + T_R \cdot T_S + T_{SR} \cdot T_S} = \frac{T_R \cdot [T_R + T_S - p(H) \cdot (T_S + T_{SR} + T_R)]}{T_R \cdot (T_R + T_{SR}) + T_S \cdot (T_R + T_{SR})}$$

$$p(0, F) = \frac{T_R \cdot [T_R + T_S - p(H) \cdot (T_S + T_{SR} + T_R)]}{(T_R + T_S) \cdot (T_R + T_{SR})} \quad (6)$$

MEDIDAS DE RENDIMIENTO

$$p(0, F) = \frac{T_R \cdot [T_R + T_S - p(H) \cdot (T_S + T_{SR} + T_R)]}{(T_R + T_S) \cdot (T_R + T_{SR})}$$

$$p(F) = \frac{T_R + p(0, F) \cdot T_S}{T_S + T_{SR} + T_R}$$

$$p(S) = \frac{T_S}{T_R} \cdot \frac{T_R - p(0, F) \cdot T_R - p(0, F) \cdot T_{SR}}{T_S + T_{SR} + T_R}$$

$$p(R) = \frac{T_{SR}}{T_S + T_{SR} + T_R - T_S \cdot \frac{p(0, F)}{p(F)}}$$

Tasa de llegada (sin impaciencia): $\bar{\lambda} = \lambda$

Tasa de egresos: $\bar{\mu} = \mu \cdot H$, $H = \rho$

Frecuencia de interrupciones con canal activo: $\lambda_C = \frac{1}{T_S + T_{SR} + T_R}$

Tiempo de espera de clientes en el sistema en la llegada: $L_S \cdot T_s$

Tiempo de espera de clientes con el sistema en estado R (fuera de servicio) o en estado S (pendiente de finalizar el trabajo): $T_{SR} \cdot [p(R) + p(S)]$

Tiempo promedio de permanencia en el sistema:

$$W_s = L_S \cdot T_S + T_{SR} \cdot [p(R) + p(S)] + \lambda_C \cdot (W_c - T_{SR}) \cdot T_{SR} \cdot p(R) + \\ + \lambda_C \cdot (W_c - T_{SR} - T_S) \cdot T_{SR} \cdot p(S) + \lambda_C \cdot W_c \cdot T_{SR} \cdot p(F) + T_S \quad (7)$$

La expresión (7) se obtiene al considerar:

Cantidad de interrupciones promedio en estado R (fuera de servicio) en la llegada: $\lambda_C \cdot (W_c - T_{SR})$

Cantidad de interrupciones promedio en estado S (pendiente de finalizar el trabajo): $\lambda_C \cdot (W_c - T_{SR} - T_S)$

Cantidad de interrupciones promedio en estado F (operativo): $\lambda_C \cdot W_c$

Considerando que el tiempo de espera promedio por cada interrupción es T_{SR} , el tiempo promedio de espera por las interrupciones producidas durante la permanencia en cola del cliente será:

$$\lambda_C \cdot (W_c - T_{SR}) \cdot T_{SR} \cdot p(R) + \lambda_C \cdot (W_c - T_{SR} - T_S) \cdot T_{SR} \cdot p(S) + \lambda_C \cdot W_c \cdot T_{SR} \cdot p(F)$$

Tiempo de espera de su propia atención: T_s

De forma que, la expresión del tiempo promedio de permanencia en el sistema es:

$$W_s = L_s \cdot T_s + T_{SR} \cdot [p(R) + p(S)] + \lambda_c \cdot (W_c - T_{SR}) \cdot T_{SR} \cdot p(R) + \\ + \lambda_c \cdot (W_c - T_{SR} - T_s) \cdot T_{SR} \cdot p(S) + \lambda_c \cdot W_c \cdot T_{SR} \cdot p(F) + T_s$$

Tiempo promedio de espera por interrupciones en cola:

$$W_c = \frac{\rho \cdot T_s + T_{SR} \cdot ([p(R) + p(S)] - \lambda_c \cdot T_{SR} \cdot [p(R) + p(S)] - \lambda_c \cdot T_s \cdot p(S))}{1 - \rho - \lambda_c \cdot T_{SR}} \quad (8)$$

La expresión (8) se obtiene reemplazando en (7) las relaciones:

$$L_s = L_c + H = W_c \cdot \lambda + \rho$$

$$W_s = W_c + T_s$$

$$W_c + T_s = \lambda \cdot W_c \cdot T_s + \rho \cdot T_s + T_{SR} \cdot [p(R) + p(S)] + \lambda_c \cdot W_c \cdot T_{SR} \cdot p(R) - \lambda_c \cdot T_{SR} \cdot T_{SR} \cdot p(R) + \\ + \lambda_c \cdot W_c \cdot T_{SR} \cdot p(S) - \lambda_c \cdot T_{SR} \cdot T_{SR} \cdot p(S) - \lambda_c \cdot T_s \cdot T_{SR} \cdot p(S) + \\ + \lambda_c \cdot W_c \cdot T_{SR} \cdot p(F) + T_s$$

siendo, $p(S) + p(F) + p(R) = 1$ y $\rho = \lambda \cdot T_s$

$$W_c = W_c \cdot \rho + \rho \cdot T_s + T_{SR} \cdot [p(R) + p(S)] + \lambda_c \cdot W_c \cdot T_{SR} \cdot [p(R) + p(S) + p(F)] - \\ - \lambda_c \cdot T_{SR} \cdot T_{SR} \cdot p(R) - \lambda_c \cdot T_{SR} \cdot T_{SR} \cdot p(S) - \lambda_c \cdot T_s \cdot T_{SR} \cdot p(S)$$

$$W_c = W_c \cdot \rho + \rho \cdot T_s + T_{SR} \cdot [p(R) + p(S)] + \lambda_c \cdot W_c \cdot T_{SR} - \\ - \lambda_c \cdot T_{SR} \cdot T_{SR} \cdot p(R) - \lambda_c \cdot T_{SR} \cdot T_{SR} \cdot p(S) - \lambda_c \cdot T_s \cdot T_{SR} \cdot p(S)$$

$$W_c \cdot (1 - \rho - \lambda_c \cdot T_{SR}) = \\ = \rho \cdot T_s + T_{SR} \cdot [p(R) + p(S)] - \lambda_c \cdot T_{SR} \cdot T_{SR} \cdot p(R) - \lambda_c \cdot T_{SR} \cdot T_{SR} \cdot p(S) - \lambda_c \cdot T_s \cdot T_{SR} \cdot p(S)$$

$$W_c = \frac{\rho \cdot T_s + T_{SR} \cdot [p(R) + p(S)] - \lambda_c \cdot T_{SR} \cdot T_{SR} \cdot [p(R) + p(S)] - \lambda_c \cdot T_s \cdot T_{SR} \cdot p(S)}{1 - \rho - \lambda_c \cdot T_{SR}}$$

$$W_c = \frac{\rho \cdot T_s + T_{SR} \cdot ([p(R) + p(S)] - \lambda_c \cdot T_{SR} \cdot [p(R) + p(S)] - \lambda_c \cdot T_s \cdot p(S))}{1 - \rho - \lambda_c \cdot T_{SR}}$$

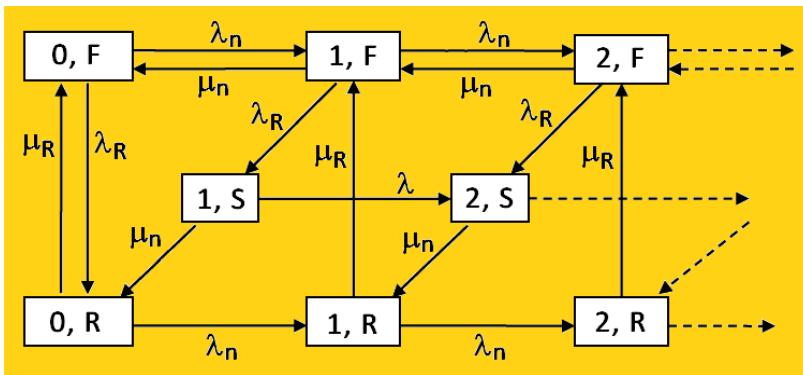
Por tanto,

$$W_s = \frac{\rho \cdot T_s + T_{SR} \cdot ([p(R) + p(S)] - \lambda_c \cdot T_{SR} \cdot [p(R) + p(S)] - \lambda_c \cdot T_s \cdot p(S))}{1 - \rho - \lambda_c \cdot T_{SR}} + T_s \quad (9)$$

Considerando la Ley de Little surgen las medidas de rendimiento:

$$L_s = \lambda \cdot W_s \quad L_c = \lambda \cdot W_c$$

FIGURA: Muestra la cadena markoviana correspondiente a este sistema, desde donde se pueden determinar ecuaciones de estado correspondientes para una cantidad de clientes $n > 0$ en el sistema:



Ecuaciones generatrices de estado:

$$\begin{cases} p(n, F) \cdot (\lambda_n + \lambda_R + \mu_n) = p(n-1, F) \cdot \lambda_{n-1} + p(n, R) \cdot \mu_R + p(n+1, F) \cdot \mu_{n+1} \\ p(n, S) \cdot (\lambda_n + \mu_n) = p(n, F) \cdot \lambda_R \\ p(n, S) \cdot (\lambda_n + \mu_n) = p(n, F) \cdot \lambda_R \end{cases}$$

en el sistema monocanal: $\lambda_n = \lambda$ $\mu_n = \begin{cases} 0 & n=0 \\ \mu & n>0 \end{cases}$

Cuando $n=0$ reemplazando en las ecuaciones de estado y operando, se despeja $p(0, R)$ en función de $p(0, F)$ y de los parámetros del problema:

$$p(0, R) = p(0, F) = \frac{(2 \cdot \lambda + \lambda_R + \mu) \cdot \lambda_R}{\lambda_R \cdot \mu_R + (\mu_R + \lambda) \cdot (\lambda + \mu)}$$

Probabilidad de que el estado se encuentre vacío: $p(0) = p(0, F) + p(0, R)$

El resto de las probabilidades de estado para cada una de las condiciones de operación, F, R y S, se obtienen con las ecuaciones generatrices de estado.

Probabilidad que el sistema se encuentre con 'n' clientes: $p(n) = p(n, F) + p(n, R) + p(n, S)$



$$\lambda = 10 \text{ clientes / hora} \quad \mu = 20 \text{ clientes / hora}$$

$$T_R = 1/3 \text{ horas funcionamiento} \quad T_{SR} = 1/9 \text{ horas interrupción}$$

$$p(F) = 0,701087 \quad p(R) = 0,233696 \quad p(S) = 0,065217$$

$$p(0) = 0,323853 \quad p(0, F) = 0,266309 \quad p(0, R) = 0,057544$$

$$W_S = 0,231652 \text{ horas} \quad W_C = 0,181652 \text{ horas}$$

$$L_C = 1,816516 \text{ clientes} \quad H = 0,500000 \text{ clientes} \quad L_S = 2,316516 \text{ clientes}$$

PLANTEAMIENTO CON SERIES DE LÍNEAS DE ESPERA SIN PRIORIDADES CON INTERRUPCIONES:

Enfoque con muchas dificultades por la vinculación existente entre las probabilidades de estado.

$$L_S = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot p(n) \quad L_C = \sum_{n=0}^{\infty} (n - 1) \cdot p(n)$$

$$p(F) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n, F) = p(0, F) + \sum_{n=1}^{\infty} p(n, F)$$

$$p(R) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n, R) = p(0, R) \times \sum_{n=1}^{\infty} p(n, R) = p(0, R) + \sum_{n=1}^{\infty} p(n, R)$$

$$p(S) = \sum_{n=1}^{\infty} p(n, S)$$

$$H = \sum_{n=1}^{\infty} p(n, F) + \sum_{n=1}^{\infty} p(n, S) \quad I = \sum_{n=1}^{\infty} p(n, R)$$

Asignatura **Grupo**
Apellidos **Nombre**
Ejercicio del día

Asignatura Grupo
 Apellidos Nombre
 Ejercicio del día

TEORÍA DE COLAS



Erlang C

Fórmula de Engset



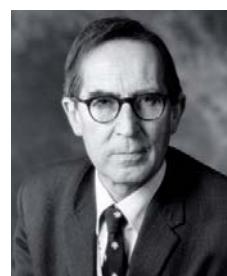
Modelo G/G/s
 Modelo M/G/1
 Modelo M/D/1
 Modelo M/D/s
 Modelo M/E_k/1



A. K. Erlang (1909)



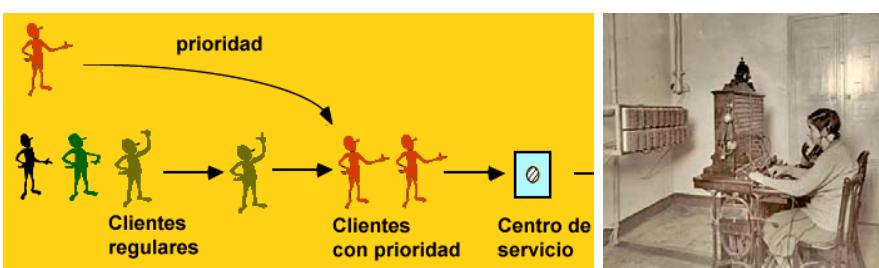
T. O. Engset (1915)



D. G. Kendall (1953)



J. Little (1961)



Instrumentos Estadísticos Avanzados
 Facultad Ciencias Económicas y Empresariales
 Departamento de Economía Aplicada
 Profesor: Santiago de la Fuente Fernández