Gestión Aeronáutica: Estadística Teórica
Facultad Ciencias Económicas y Empresariales
Departamento de Economía Aplicada
Profesor: Santiago de la Fuente Fernández

EJERCICIOS RESUELTOS
VARIABLE ALEATORIA BIDIMENSIONAL

EJERCICIOS VARIABLES ALEATORIAS BIDIMENSIONALES

Ejercicio 1.- Un experimento consiste en lanzar tres veces una moneda. Sean las variables aleatorias: X ="número de caras en las tres tiradas" e Y ="diferencia en valor absoluto entre el número de caras y el de escudos en las tres tiradas". Se pide:

a) Distribución de probabilidad de (X, Y)
b) Media y desviación típica de las distribuciones marginales de X e Y
c) Covarianza y coeficiente de correlación
d) ¿Son X e Y independientes?
e) Distribución condicionada de X a $Y=3$
f) Distribución condicionada de Y a $X=2$
g) $P[X\le 1;\, Y>0]$, $P[X\ge 2]$, $P[Y<3]$

Solución:

a) Espacio muestral: $\Omega=\{(c,c,c),(c,c,e),(c,e,c),(e,c,c),(c,e,e),(e,c,e),(e,e,c),(e,e,e)\}$

$X(c,c,c)=3$
$X(c,c,e)=X(c,e,c)=X(e,c,c)=2$
$X(c,e,e)=X(e,c,e)=X(e,e,c)=1$
$X(e,e,e)=0$

$Y(c,c,c)=3$
$Y(c,c,e)=Y(c,e,c)=Y(e,c,c)=1$
$Y(c,e,e)=Y(e,c,e)=Y(e,e,c)=1$
$Y(e,e,e)=3$

Distribución de probabilidad:

X \ Y	1	3	$p_{i\bullet}$
0	0	1/8	1/8
1	3/8	0	3/8
2	3/8	0	3/8
3	0	1/8	1/8
$p_{\bullet j}$	6/8	2/8	1

Probabilidades marginales:

$$\sum_{i=1}^{4} p_{i\bullet}=p_{1\bullet}+p_{2\bullet}+p_{3\bullet}+p_{4\bullet}=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=1$$

$$\sum_{j=1}^{2} p_{\bullet j}=p_{\bullet 1}+p_{\bullet 2}=\frac{6}{8}+\frac{2}{8}=1$$

Adviértase que la probabilidad conjunta:

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{2} p_{ij}=\left(0+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{3}{8}+0\right)+\left(\frac{3}{8}+0\right)+\left(0+\frac{1}{8}\right)=1$$

Siendo: $\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{2} p_{ij}=\sum_{i=1}^{4} p_{i\bullet}=\sum_{j=1}^{2} p_{\bullet j}=1$. En general, $\boxed{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij}=\sum_{i=1}^{n} p_{i\bullet}=\sum_{j=1}^{m} p_{\bullet j}=1}$

b) Distribución marginal de la variable aleatoria X:

x_i	$p_{i\bullet}$	$x_i \,.\, p_{i\bullet}$	x_i^2	$x_i^2 \,.\, p_{i\bullet}$
0	1/8	0	0	0
1	3/8	3/8	1	3/8
2	3/8	6/8	4	12/8
3	1/8	3/8	9	9/8
	1	12/8		3

Media: $\mu_X = E(X) = \alpha_{10} = \sum_{i=1}^{4} x_i \,.\, p_{i\bullet} = \frac{12}{8} = 1,5$

Varianza: $\sigma_X^2 = Var(X) = \mu_{20} = E(X^2) - [E(X)]^2$

$E(X^2) = \alpha_{20} = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 \,.\, p_{i\bullet} = 3$

$$\sigma_X^2 = Var(X) = \mu_{20} = E(X^2) - [E(X)]^2 = 3 - 1,5^2 = 0,75 \quad \mapsto \quad \sigma_x = \sqrt{0,75} = 0,866$$

- Distribución marginal de la variable aleatoria Y:

y_j	$p_{\bullet j}$	$y_j \,.\, p_{\bullet j}$	y_j^2	$y_j^2 \,.\, p_{\bullet j}$
1	6/8	6/8	1	6/8
3	2/8	6/8	9	18/8
	1	12/8		3

Media: $\mu_Y = E(Y) = \alpha_{01} = \sum_{j=1}^{2} y_j \,.\, p_{\bullet j} = \frac{12}{8} = 1,5$

Varianza: $\sigma_Y^2 = Var(Y) = \mu_{02} = E(Y^2) - [E(Y)]^2$

$$E(Y^2) = \alpha_{02} = \sum_{j=1}^{2} y_j^2 \,.\, p_{\bullet j} = 3$$

$$\sigma_Y^2 = Var(Y) = \mu_{02} = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 3 - 1,5^2 = 0,75 \quad \mapsto \quad \sigma_Y = \sqrt{0,75} = 0,866$$

c) Covarianza y coeficiente de correlación

- La covarianza se define: $\mu_{11} = \mu_{XY} = \sigma_{XY} = Cov(X,Y) = \alpha_{11} - \alpha_{10} \,.\, \alpha_{01}$

donde $\alpha_{11} = E(XY) = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{2} x_i \,.\, y_j \,.\, p_{ij}$

Así pues,

$$\alpha_{11} = \left(0.1.0 + 0.3.\frac{1}{8}\right) + \left(1.1.\frac{3}{8} + 1.3.0\right) + \left(2.1.\frac{3}{8} + 2.3.0\right) + \left(3.1.0 + 3.3.\frac{1}{8}\right) = \frac{18}{8} = 2,25$$

con lo cual, $\mu_{XY} = Cov(X,Y) = \alpha_{11} - \alpha_{10} \,.\, \alpha_{01} = 2,25 - 1,5 \,.\, 1,5 = 0$

Señalar que la covarianza $\mu_{XY} = Cov(X,Y)$ puede ser negativa, nula o positiva, siendo una medida de la fuerza de la relación lineal entre X e Y.

- El coeficiente de correlación lineal ρ_{XY} es un número abstracto (sin unidades) que determina el grado en que las variables (X, Y) están relacionadas linealmente.

Se define: $\boxed{\rho_{XY} = \frac{\mu_{XY}}{\sigma_x \,.\, \sigma_Y}}$

con lo cual, $\rho_{XY} = \dfrac{\mu_{XY}}{\sigma_x \, . \, \sigma_Y} = \dfrac{0}{\sqrt{0,75} \, . \, \sqrt{0,75}} = 0$

Denotar que $-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$. Cuando $\rho_{XY} = 0$ no existe relación lineal entre las variables X e Y, diciendo que están incorreladas.

d) Para que X e Y sean independientes se tiene que verificar: $p_{ij} = p_{i\bullet} \, . \, p_{\bullet j} \quad \forall (x_i , y_j)$

X \ Y	1	3	$p_{i\bullet}$
0	$p_{11} = 0$	$1/8$	$p_{1\bullet} = 1/8$
1	$3/8$	0	$3/8$
2	$3/8$	0	$3/8$
3	0	$1/8$	$1/8$
$p_{\bullet j}$	$p_{\bullet 1} = 6/8$	$2/8$	1

$p_{11} = 0 \neq \dfrac{1}{8} . \dfrac{6}{8} = p_{1\bullet} . p_{\bullet 1}$

Las variables X e Y NO son independientes

Señalar que cuando dos variables X e Y son independientes, es decir, cuando $p_{ij} = p_{i\bullet} \, . \, p_{\bullet j}$ $\forall (x_i , y_j)$, la covarianza es cero. El caso contrario no se verifica. Es decir:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{X e Y independientes} \Rightarrow \mu_{11} = \text{Cov}(X, Y) = 0 \\ \mu_{11} = \text{Cov}(X, Y) = 0 \not\Rightarrow \text{X e Y independientes} \end{array}}$$

e) Distribución condicionada de X a $Y = 3$: $P\big[X / Y = 3\big] = \dfrac{P\big[X \cap (Y = 3)\big]}{P(Y = 3)}$

X \ Y	1	3	$p_{i\bullet}$
0	0	$1/8$	$1/8$
1	$3/8$	0	$3/8$
2	$3/8$	0	$3/8$
3	0	$1/8$	$1/8$
$p_{\bullet j}$	$6/8$	$\boxed{2/8}$	1

X	$P(X / Y = 3)$
0	$\dfrac{1/8}{2/8} = \dfrac{1}{2}$
1	$\dfrac{0}{2/8} = 0$
2	$\dfrac{0}{2/8} = 0$
3	$\dfrac{1/8}{2/8} = \dfrac{1}{2}$
	1

En general, $\boxed{P\big[X / Y = y_j\big] = \dfrac{P\big[X \cap (Y = y_j)\big]}{P(Y = y_j)}}$

f) Distribución condicionada de Y a $X=2$: $P[Y/X=2]=\dfrac{P[Y\cap(X=2)]}{P(X=2)}$

X \ Y	1	3	$p_{i\bullet}$
0	0	1/8	1/8
1	3/8	0	3/8
2	3/8	0	$\boxed{3/8}$
3	0	1/8	1/8
$p_{\bullet j}$	6/8	2/8	1

Y	$P(Y/X=2)$
1	$\dfrac{3/8}{3/8}=1$
3	$\dfrac{0}{3/8}=0$
	1

En general, $\boxed{P[Y/X=x_i]=\dfrac{P[Y\cap(X=x_i)]}{P(X=x_i)}}$

g) $P[X\le 1;\, Y>0]$, $P[X\ge 2]$, $P[Y<3]$

X \ Y	1	3
0	0	1/8
1	3/8	0
2	3/8	0
3	0	1/8

X \ Y	1	3
0	0	1/8
1	3/8	0
2	3/8	0
3	0	1/8

X \ Y	1	3
0	0	1/8
1	3/8	0
2	3/8	0
3	0	1/8

$$P[X\le 1;\, Y>0]=P[X=0\,;\;Y=1]+P[X=0\,;\;Y=3]+P[X=1;\;Y=1]+P[X=1;\;Y=3]=$$
$$=p_{11}+p_{12}+p_{21}+p_{22}=0+\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+0=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

$$P[X\ge 2]=P[X=2\,;\;Y=1]+P[X=2\,;\;Y=3]+P[X=3\,;\;Y=1]+P[X=3\,;\;Y=3]=$$
$$=p_{31}+p_{32}+p_{41}+p_{42}=\frac{3}{8}+0+0+\frac{1}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

$$P[Y<3]=P[X=0\,;\;Y=1]+P[X=1;\;Y=1]+P[X=2\,;\;Y=1]+P[X=3\,;\;Y=1]=$$
$$=p_{11}+p_{21}+p_{31}+p_{41}=0+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+0=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$$

Ejercicio 2.- Sea una variable aleatoria bidimensional con distribución de probabilidad

X \ Y	-1	1
1	$1/6$	$1/3$
2	$1/12$	$1/4$
3	$1/12$	$1/12$

Se pide:

a) ¿Son X e Y independientes?

b) Hallar las medias y desviaciones típicas de X e Y

c) Hallar las probabilidades: $P\left[X \leq 2\,;\ Y > 0\right]$ $\quad P\left[X \geq 2\right]$ $\quad P\left[Y < 0\right]$

d) Hallar el coeficiente de correlación

Solución:

a) Para analizar si X e Y son independientes hay que hallar las distribuciones marginales de X e Y, y ver si verifica que $p_{ij} = p_{i\bullet} \,.\, p_{\bullet j} \quad \forall (x_i\,, y_j)$

X \ Y	-1	1	$p_{i\bullet}$
1	$1/6$	$1/3$	$1/2$
2	$1/12$	$1/4$	$1/3$
3	$1/12$	$1/12$	$1/6$
$p_{\bullet j}$	$1/3$	$2/3$	1

$$p_{11} = \frac{1}{6} = p_{1\bullet}\,.\,p_{\bullet 1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} \qquad\qquad p_{12} = \frac{1}{3} = p_{1\bullet}\,.\,p_{\bullet 2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}$$

$$p_{21} = \frac{1}{12} \neq p_{2\bullet}\,.\,p_{\bullet 1} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{9} \qquad p_{22} = \frac{1}{4} \neq p_{2\bullet}\,.\,p_{\bullet 2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

$$p_{31} = \frac{1}{12} \neq p_{3\bullet}\,.\,p_{\bullet 1} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{18} \qquad p_{32} = \frac{1}{12} \neq p_{3\bullet}\,.\,p_{\bullet 2} = \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{9}$$

Luego las variables X e Y no son independientes.

b) Para hallar las medias y desviaciones típicas de X e Y hay que considerar las distribuciones marginales:

- Distribución marginal de la de la variable aleatoria X

$X = x_i$	$p_{i\bullet}$	$x_i \, . \, p_{i\bullet}$	x_i^2	$x_i^2 \, . \, p_{i\bullet}$
1	1/2	1/2	1	1/2
2	1/3	2/3	4	4/3
3	1/6	3/6	9	9/6
	1	10/6		20/6

Media: $\alpha_{10} = \mu_X = E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i \, . \, p_{i\bullet} = \dfrac{10}{6}$

$$\alpha_{20} = E(X^2) = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 \, . \, p_{i\bullet} = \frac{20}{6}$$

Varianza: $\mu_{20} = \sigma_X^2 = Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \dfrac{20}{6} - \left(\dfrac{10}{6}\right)^2 = \dfrac{20}{36} = \dfrac{5}{9}$

Desviación típica: $\sigma_X = \sqrt{\dfrac{5}{9}} = 0,745$

- Distribución marginal de la variable aleatoria Y

$Y = y_j$	$p_{\bullet j}$	$y_j \, . \, p_{\bullet j}$	y_j^2	$y_j^2 \, . \, p_{\bullet j}$
−1	1/3	−1/3	1	1/3
1	2/3	2/3	1	2/3
	1	1/3		1

Media: $\alpha_{01} = \mu_Y = E(Y) = \sum_{j=1}^{2} y_j \, . \, p_{\bullet j} = \dfrac{1}{3}$

$$\alpha_{02} = E(Y^2) = \sum_{j=1}^{2} y_j^2 \, . \, p_{\bullet j} = 1$$

Varianza: $\mu_{02} = \sigma_Y^2 = Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{8}{9}$

Desviación típica: $\sigma_Y = \sqrt{\dfrac{8}{9}} = 0,943$

c) Probabilidades: $P[X \leq 2 \, ; \; Y > 0]$ $\quad P[X \geq 2]$ $\quad P[Y < 0]$

X \ Y	−1	1
1	1/6	1/3
2	1/12	1/4
3	1/12	1/12

X \ Y	−1	1
1	1/6	1/3
2	1/12	1/4
3	1/12	1/12

X \ Y	−1	1
1	1/6	1/3
2	1/12	1/4
3	1/12	1/12

$$P[X \leq 2\,;\; Y > 0] = P[X=1;\; Y=1] + P[X=2\,;\; Y=1] = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

$$P[X \geq 2] = P[X=2\,;\; Y=-1] + P[X=2\,;\; Y=1] + P[X=3\,;\; Y=-1] + P[X=3\,;\; Y=1] =$$
$$= \frac{1}{12} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$P[Y < 0] = P[X=1;\; Y=-1] + P[X=2\,;\; Y=-1] + P[X=3\,;\; Y=-1] = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$$

d) Coeficiente de correlación

X \ Y	−1	1	$x_i \cdot y_j \cdot p_{ij}$: −1	$x_i \cdot y_j \cdot p_{ij}$: 1	
1	1/6	1/3	−1/6	1/3	
2	1/12	1/4	−2/12	2/4	
3	1/12	1/12	−3/12	3/12	
			−7/12	13/12	6/12

$$\alpha_{11} = E(XY) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} x_i \cdot y_j \cdot p_{ij} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

Covarianza: $\sigma_{XY} = Cov(X,Y) = \alpha_{11} - \alpha_{10} \cdot \alpha_{01} = \frac{1}{2} - \frac{10}{6} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{18} = -0,555$

Coeficiente de correlación: $\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_x \cdot \sigma_Y} = \frac{-\,0,555}{0,745 \,.\, 0,943} = -0,79$

Siendo $\rho_{XY} = -0,79$, valor cercano a -1, existe una fuerte relación lineal entre las variables X e Y.

Ejercicio 3.- Sean (X, Y) los paquetes diarios que venden dos operadores de viajes, cuya distribución de probabilidad conjunta se refleja en la tabla:

X \ Y	0	1	2
0	0,15	0,15	0,10
1	0,05	0,20	0,05
2	0,10	0,05	0,15

Hallar la media, varianza y desviación típica de las variables: X, Y, $X+Y$, $X-Y$

Solución:

X \ Y	0	1	2	$p_{i\bullet}$	$x_i \,.\, p_{i\bullet}$	$x_i^2 \,.\, p_{i\bullet}$
0	0,15	0,15	0,10	0,40	0	0
1	0,05	0,20	0,05	0,30	0,30	0,30
2	0,10	0,05	0,15	0,30	0,60	1,20
$p_{\bullet j}$	0,30	0,40	0,30	1	0,90	1,50
$y_j \,.\, p_{\bullet j}$	0	0,40	0,60	1		
$y_j^2 \,.\, p_{\bullet j}$	0	0,40	1,20	1,60		

- Distribución marginal de la variable X:

Media: $\alpha_{10} = \mu_X = E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i \,.\, p_{i\bullet} = 0,9$

$$\alpha_{20} = E(X^2) = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 \,.\, p_{i\bullet} = 1,5$$

Varianza: $\mu_{20} = \sigma_X^2 = Var(X) = \alpha_{20} - \alpha_{10}^2 = 1,5 - 0,9^2 = 0,69$

Desviación típica: $\sigma_X = \sqrt{0,69} = 0,83$

- Distribución marginal de la variable Y:

Media: $\alpha_{01} = \mu_Y = E(Y) = \sum_{j=1}^{3} y_j \,.\, p_{\bullet j} = 1$

$$\alpha_{02} = E(Y^2) = \sum_{j=1}^{3} y_j^2 \,.\, p_{\bullet j} = 1,6$$

Varianza: $\mu_{02} = \sigma_Y^2 = Var(Y) = \alpha_{02} - \alpha_{01}^2 = 1,6 - 1^2 = 0,6$

Desviación típica: $\sigma_Y = \sqrt{0,6} = 0,77$

- Distribución de la variable $(X+Y)$:

Media: $\mu_{X+Y} = E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 0,9 + 1 = 1,9$

📖 Se tiene: $\mu_{X+Y} = E(X+Y) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(x_i + y_j).p_{ij}$

X \ Y	0	1	2
0	0,15	0,15	0,10
1	0,05	0,20	0,05
2	0,10	0,05	0,15

$$\mu_{X+Y} = 0\,.\,0,15 + 1\,.\,0,15 + 2\,.\,0,10 + 1\,.\,0,05 + 2\,.\,0,20 + 3\,.\,0,05 + 2\,.\,0,10 + 3\,.\,0,05 + 4\,.\,0,15 = 1,9$$

Varianza: $\sigma^2_{X+Y} = Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2\,Cov(X,Y)$ X e Y no independientes

X \ Y	0	1	2	$x_i\,.\,y_j\,.\,p_{ij}$ 0	1	2	
0	0,15	0,15	0,10	0	0	0	
1	0,05	0,20	0,05	0	0,20	0,10	
2	0,10	0,05	0,15	0	0,10	0,60	
				0	0,30	0,7	1

$$\alpha_{11} = E(XY) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} x_i\,.\,y_j\,.\,p_{ij} = 1$$

Covarianza: $\sigma_{XY} = Cov(X,Y) = \alpha_{11} - \alpha_{10}\,.\,\alpha_{01} = 1 - 0,9.1 = 0,1$

$$\sigma^2_{X+Y} = Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2\,Cov(X,Y) = 0,69 + 0,6 + 2.0,1 = 1,49$$

📖 Se tiene: $\sigma^2_{X+Y} = E\left[(X+Y)^2\right] - \left[E(X+Y)\right]^2$

X \ Y	0	1	2
0	0,15	0,15	0,10
1	0,05	0,20	0,05
2	0,10	0,05	0,15

$$E\left[(X+Y)^2\right] = 0\,.\,0,15 + 1\,.\,0,15 + 4\,.\,0,10 + 1\,.\,0,05 + 4\,.\,0,20 + 9\,.\,0,05 + 4\,.\,0,10 + 9\,.\,0,05 + 16\,.\,0,15 = 5,1$$

$$\sigma^2_{X+Y} = E\left[(X+Y)^2\right] - \left[E(X+Y)\right]^2 = 5,1 - 1,9^2 = 1,49 \quad \mapsto \quad \sigma_{X+Y} = \sqrt{1,49} = 1,22$$

- Distribución de la variable $(X-Y)$:

Media: $\mu_{X-Y} = E(X-Y) = E(X) - E(Y) = 0,9 - 1 = -0,1$

$$\sigma^2_{X-Y} = Var(X-Y) = Var(X) + Var(Y) - 2\,Cov(X,Y) = 0,69 + 0,6 - 2.0,1 = 1,09$$

Ejercicio 4.- Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional con función de densidad:

$$f(x,y) = \begin{cases} k & 0 < y < x < 1 \\ 0 & \text{restantes valores} \end{cases}$$

a) Hallar k para que sea función de densidad

b) Hallar las funciones de densidad marginales. ¿Son X e Y independientes?

c) Hallar las funciones de distribución marginales

d) Hallar las funciones de densidad condicionadas

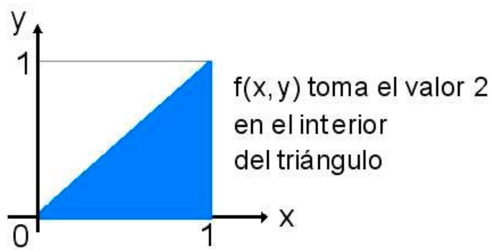
Solución:

a) Para que $f(x,y)$ sea función de densidad tiene que verificarse: $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$

$$\int_0^1\int_0^x k\,dx\,dy = \int_0^1 k\left(\int_0^x dy\right)dx = \int_0^1 k\,[y]_0^x\,dx = k\int_0^1 x\,dx = k\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{k}{2} = 1 \quad \mapsto \quad k = 2$$

por tanto,

$$f(x,y) = \begin{cases} 2 & 0 < y < x < 1 \\ 0 & \text{restantes valores} \end{cases}$$



b) Funciones de densidad marginales:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \int_0^x 2\,dy = 2[y]_0^x = 2x \quad 0 < x < 1$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx = \int_y^1 2\,dx = 2[x]_y^1 = 2 - 2y \quad 0 < y < 1$$

X e Y son independientes cuando $f(x,y) = f_1(x).f_2(y)$

$f_1(x).f_2(y) = 2x\,.(2-2y) = 4x - 4xy \neq 2 = f(x,y)$ luego no son independientes

c) Funciones de distribución marginales:

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} f_1(t)\,dt = \int_0^x f_1(t)\,dt = \int_0^x 2t\,dt = \left[t^2\right]_0^x = x^2 \quad 0 < x < 1$$

$$F_2(y) = \int_{-\infty}^{y} f_2(t)\,dt = \int_0^y f_2(t)\,dt = \int_0^y (2-2t)\,dt = \left[2t - t^2\right]_0^y = 2y - y^2 \quad 0 < y < 1$$

d) Funciones de densidad condicionadas:

$$f(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \frac{2}{2-2y} \qquad 0 < y < 1 \qquad 0 < x < 1$$

$$f(y/x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \frac{2}{2x} \qquad 0 < x < 1 \qquad 0 < y < 1$$

Ejercicio 5.- Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional con función de densidad:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & |y| < x \ ; \ 0 < x < 1 \\ 0 & \text{restantes valores} \end{cases}$$

a) Comprobar que $f(x,y)$ es función de densidad

b) Hallar las medias de X e Y

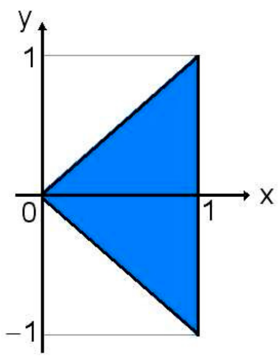
c) Hallar las probabilidades: $P\left[X < \frac{1}{2} \ ; \ Y < 0\right]$ y $P\left[X > \frac{1}{2} \ ; \ -\frac{1}{2} < Y < \frac{1}{2}\right]$

Solución:

a) $f(x,y)$ es función de densidad si se verifica: $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1\int_{-x}^{x} dx\,dy = \int_0^1\left(\int_{-x}^{x} dy\right)dx = \int_0^1 [y]_{-x}^{x}\,dx = \int_0^1 2x\,dx = \left[x^2\right]_0^1 = 1$$

en consecuencia, $f(x,y)$ es función de densidad.



b) Para hallar las medias de X e Y hay que calcular primero las funciones de densidad marginales:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \int_{-x}^{x} dy = [y]_{0-x}^{x} = 2x \qquad 0 < x < 1$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx = \begin{cases} \int_{-y}^{1} dx = [x]_{-y}^{1} = 1+y & -1 < y < 0 \\ \int_{y}^{1} dx = [x]_{y}^{1} = 1-y & 0 < y < 1 \end{cases}$$

$$\alpha_{10} = \mu_x = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_1(x)\, dx = \int_0^1 x\,.\,2x\, dx = 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$\alpha_{01} = \mu_y = E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_2(y)\, dy = \int_{-1}^{0} y\, f_2(y)\, dy + \int_0^1 y\, f_2(y)\, dy = \int_{-1}^{0} y\,(1+y)\, dy + \int_0^1 y\,(1-y)\, dy =$$

$$= \int_{-1}^{0} (y+y^2)\, dy + \int_0^1 (y-y^2)\, dy = \left[\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3} = 0$$

c) Probabilidades: $P\left[X < \frac{1}{2}\ ;\ Y < 0\right]$ y $P\left[X > \frac{1}{2}\ ;\ -\frac{1}{2} < Y < \frac{1}{2}\right]$

$$P\left[X < \frac{1}{2}\ ;\ Y < 0\right] = \int_0^{1/2}\int_{-x}^{0} f(x,y)\, dx\, dy = \int_0^{1/2}\left(\int_{-x}^{0} dy\right) dx = \int_0^{1/2} [y]_{-x}^{0}\, dx = \int_0^{1/2} x\, dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{1/2} = \frac{1}{8}$$

$$P\left[X > \frac{1}{2}\ ;\ -\frac{1}{2} < Y < \frac{1}{2}\right] = \int_{1/2}^{1}\int_{-1/2}^{1/2} f(x,y)\, dx\, dy = \int_{1/2}^{1}\left(\int_{-1/2}^{1/2} dy\right) dx = \int_0^{1/2} [y]_{-1/2}^{1/2}\, dx = \int_{1/2}^{1} dx = [x]_{1/2}^{1} = \frac{1}{2}$$

Ejercicio 6.- La función de densidad asociada a la emisión de billetes de una compañía área es:

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & 0<x<1 \quad 0<y<1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) Hallar la función de distribución

b) Hallar las funciones de densidad marginales de X e Y

c) ¿Son X e Y independientes?

Solución:

a) $$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\, dv\, du = \int_0^x\int_0^y (u+v)\, du\, dv = \int_0^x\left(\int_0^y (u+v)\, dv\right) du = \int_0^x \left(u\,[v]_0^y + \left[\frac{v^2}{2}\right]_0^y\right) du =$$

$$= \int_0^x \left[u\,y + \frac{y^2}{2}\right] du = y\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^x + \frac{y^2}{2}\,[u]_0^x + = \frac{y\,x^2}{2} + \frac{y^2\,x}{2} = \frac{1}{2}(y\,x^2 + y^2\,x) \qquad 0 \le x < 1 \quad 0 \le y < 1$$

En consecuencia,

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & x<0 \ \text{ ó } \ y<0 \\ \frac{1}{2}(y\,x^2+y^2\,x) & 0\le x<1 \quad 0\le y<1 \\ F_1(x) = \frac{1}{2}(x^2+x) & 0\le x<1\ ,\ y\ge 1 \\ F_2(y) = \frac{1}{2}(y+y^2) & 0\le y<1\ ,\ x\ge 1 \\ 1 & x\ge 1\ ,\ y\ge 1 \end{cases}$$

Funciones de densidad marginales de X e Y

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \int_0^1 (x+y)\,dy = x\left[y\right]_0^1 + \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = x + \frac{1}{2} \qquad 0 < x < 1$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx = \int_0^1 (x+y)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + y\left[x\right]_0^1 = \frac{1}{2} + y \qquad 0 < y < 1$$

Adviértase que:

$$f_1(x) = \frac{\vartheta F_1(x)}{\vartheta x} = \frac{\vartheta}{\vartheta x}\left[\frac{1}{2}(x^2 + x)\right] = x + \frac{1}{2} \qquad f_2(y) = \frac{\vartheta F_2(y)}{\vartheta y} = \frac{\vartheta}{\vartheta y}\left[\frac{1}{2}(y + y^2)\right] = \frac{1}{2} + y$$

a) X e Y son independientes cuando se verifica $f(x,y) = f_1(x).f_2(y)$

$$f_1(x).f_2(y) = \left(x + \frac{1}{2}\right).\left(\frac{1}{2} + y\right) \neq x + y = f(x,y)$$

luego no son independientes.

Ejercicio 7.- La función de distribución asociada a un fenómeno de la naturaleza es:

$$F(x,y) = \begin{cases} (1-e^{-x}).(1-e^{-y}) & x > 0 \;,\; \; y > 0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) Hallar la función de densidad
b) Hallar las funciones de densidad marginales de X e Y
c) Hallar las funciones de densidad condicionadas
d) Calcular el coeficiente de correlación

Solución:

a) $$f(x,y) = \frac{\vartheta^2 F(x,y)}{\vartheta x\ \vartheta y} = \frac{\theta}{\vartheta y}\left[\frac{\vartheta F(x,y)}{\vartheta x}\right] = \frac{\theta}{\vartheta y}\left[\frac{\vartheta\left((1-e^{-x}).(1-e^{-y})\right)}{\vartheta x}\right] = \frac{\theta}{\vartheta y}\left[(1-e^{-y})\frac{\vartheta(1-e^{-x})}{\vartheta x}\right] =$$

$$= \frac{\theta}{\vartheta y}\left[(1-e^{-y}).e^{-x}\right] = e^{-x}.\frac{\vartheta(1-e^{-y})}{\vartheta y} = e^{-x}.e^{-y} = e^{-(x+y)} = \frac{1}{e^{x+y}} \qquad x > 0 \;,\; y > 0$$

Función de densidad $f(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & x > 0 \quad y > 0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$

b) Funciones de densidad marginales

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy=\int_0^{\infty} e^{-(x+y)}\,dy=\int_0^{\infty} e^{-x}.e^{-y}\,dy=e^{-x}\int_0^{\infty} e^{-y}\,dy=-e^{-x}\Big[e^{-y}\Big]_0^{\infty}=-e^{-x}.(-1)=e^{-x}$$

$$f_2(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx=\int_0^{\infty} e^{-(x+y)}\,dx=\int_0^{\infty} e^{-y}.e^{-x}\,dx=e^{-y}\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx=-e^{-y}\Big[e^{-x}\Big]_0^{\infty}=-e^{-y}.(-1)=e^{-y}$$

Adviértase que X e Y son independientes al verificarse $f(x,y)=f_1(x).f_2(y)$

$$f(x,y)=e^{-(x+y)}=f_1(x).f_2(y)=e^{-x}.e^{-y}$$

X e Y **independientes** $\Rightarrow$ La covarianza $\boldsymbol{\mu_{11}=\sigma_{xy}=0}$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{\rho=0}$

c) Funciones de densidad condicionadas

$$f(x/y)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)}=\frac{e^{-(x+y)}}{e^{-y}}=e^{-x}=f_1(x) \quad \text{al ser X e Y independientes}$$

$$f(y/x)=\frac{f(x,y)}{f_1(x)}=\frac{e^{-(x+y)}}{e^{-x}}=e^{-y}=f_2(y) \quad \text{al ser X e Y independientes}$$

d) El coeficiente de correlación $\rho=\sigma_{xy}=\dfrac{\mu_{11}}{\sigma_x.\sigma_y}$

$$\alpha_{10}=\mu_x=E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x.f_1(x)\,dx=\int_0^{\infty} x.e^{-x}\,dx \doteq \Big[-x.e^{-x}\Big]_0^{\infty}+\int_0^{\infty} e^{-x}dx=\Big[-x.e^{-x}-e^{-x}\Big]_0^{\infty}=1$$

$$\alpha_{01}=\mu_y=E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty} y.f_2(y)\,dy=\int_0^{\infty} y.e^{-y}\,dy \doteq \Big[-y.e^{-y}\Big]_0^{\infty}+\int_0^{\infty} e^{-y}\,dy=\Big[-y.e^{-y}-e^{-y}\Big]_0^{\infty}=1$$

Nota: $\displaystyle\int_0^{\infty} x.e^{-x}\,dx=\Big[x.e^{-x}\Big]_0^{\infty}+\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx=\Big[x.e^{-x}-e^{-x}\Big]_0^{\infty}$

donde se ha realizado el cambio $\begin{cases} u=x & du=dx \\ dv=e^{-x}\,dx & v=\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx=\Big[-e^{-x}\Big]_0^{\infty} \end{cases}$

$$\alpha_{11}=E(X.Y)=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} x.y.f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} x.y.e^{-(x+y)}\,dx\,dy=\int_0^{\infty} x.e^{-x}\,dx\,.\int_0^{\infty} y.e^{-y}\,dy=1$$

$$\alpha_{20}=E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2.f_1(x)\,dx=\int_0^{\infty} x^2.e^{-x}\,dx \doteq \Big[-x^2.e^{-x}\Big]_0^{\infty}+\int_0^{\infty} 2.x.e^{-x}dx=$$

$$=\Big[-x^2.e^{-x}\Big]_0^{\infty}+2\Big[-x.e^{-x}-e^{-x}\Big]_0^{\infty}=\Big[-x^2.e^{-x}-2.x.e^{-x}-2.e^{-x}\Big]_0^{\infty}=2$$

Análogamente, $\alpha_{02}=E(Y^2)=2$

$$\sigma_x^2 = \alpha_{20} - \alpha_{10}^2 = 2 - 1 = 1 \qquad \sigma_x = \sqrt{1} = 1$$

$$\sigma_y^2 = \alpha_{02} - \alpha_{01}^2 = 2 - 1 = 1 \qquad \sigma_y = \sqrt{1} = 1$$

covarianza: $\mu_{11} = \sigma_{xy} = \alpha_{11} - \alpha_{10}\,.\,\alpha_{01} = 1 - 1.1 = 0$

coeficiente de correlación $\rho = \sigma_{xy} = \dfrac{\mu_{11}}{\sigma_x\,.\,\sigma_y} = \dfrac{0}{1.1} = 0 \quad \Rightarrow$ Las variables son incorreladas

Ejercicio 8.- La venta en un mercado de abastos lleva asociada la función:

$$f(x,y) = \begin{cases} k\left[\dfrac{x\,y}{2} + 1\right] & 0 < x < 1 \quad -1 < y < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) Hallar k para que sea función de densidad

b) Hallar la función de distribución

c) Funciones de densidad marginales y condicionadas

d) Se considera la transformación $Z = X - Y$ y $T = X + 2Y$, hallar la función de densidad de la variable (Z,T)

Solución:

a) $f(x,y) \geq 0 \;\Leftrightarrow\; k \geq 0$

Para que $f(x,y)$ sea función de densidad debe verificarse que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$

$$\int_0^1\int_{-1}^1 k\left[\frac{x\,y}{2}+1\right]dx\,dy = \int_0^1 k\left(\int_{-1}^1\left[\frac{x\,y}{2}+1\right]dy\right)dx = \int_0^1 k\left(x\left[\frac{y^2}{4}\right]_{-1}^1 + \left[y\right]_{-1}^1\right)dx =$$

$$= \int_0^1 2k\,dx = 2k\left[x\right]_0^1 = 2k = 1 \quad \mapsto \quad k = \frac{1}{2}$$

La función de densidad $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,y+2}{4} & 0 < x < 1 \quad -1 < y < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$

b) Función de distribución $F(x,y) = P(X \leq x\,,\, Y \leq y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,dv\,du$

$$F(x,y) = \int_0^x\int_{-1}^y\left[\frac{u\,v+2}{4}\right]dv\,du = \int_0^x\left(\int_{-1}^y\left[\frac{u\,v+2}{4}\right]dv\right)du = \frac{1}{4}\int_0^x\int_{-1}^y\left(\left[u\,v+2\right]\,dv\right)du =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^x \left(u\left[\frac{v^2}{2}\right]_{-1}^{y} + 2\left[v\right]_{-1}^{y} \right) du = \frac{1}{4}\int_0^x \left(\frac{u\,y^2}{2} - \frac{u}{2} + 2\,y + 2 \right) du =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{y^2}{2}\left(\frac{u^2}{2}\right)_0^x - \frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{2}\right)_0^x + 2\,y\left(u\right)_0^x + 2\left(u\right)_0^x \right] = \frac{x^2(y^2-1)}{16} + \frac{x\,(y+1)}{2}$$

En consecuencia, $F(x,y) = \dfrac{x^2(y^2-1)}{16} + \dfrac{x\,(y+1)}{2} \qquad 0 \le x < 1 \quad -1 \le y < 1$

- Las funciones de distribución marginales, resultan:

$$F_1(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,dv\,du = \int_0^x\int_{-1}^{1} \frac{u\,v+2}{4}\,dv\,du = \int_0^x \left(\int_{-1}^{1} \frac{u\,v+2}{4}\,dv \right) du =$$

$$= \int_0^x \left(u\left[\frac{v^2}{8}\right]_{-1}^{1} + \frac{2}{4}\left[v\right]_{-1}^{1} \right) du = \int_o^x du = \left[u\right]_0^x = x \quad 0 \le x < 1$$

$$F_2(y) = P(Y \le y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,dv\,du = \int_0^1\int_{-1}^{y} \frac{u\,v+2}{4}\,dv\,du = \int_0^1 \left(\int_{-1}^{y} \frac{u\,v+2}{4}\,dv \right) du =$$

$$= \int_0^1 \left(u\left[\frac{v^2}{8}\right]_{-1}^{y} + \frac{2}{4}\left[v\right]_{-1}^{y} \right) du = \int_0^1 \left[\left(\frac{y^2-1}{8}\right) u + \frac{2}{4}\left(y+1\right) \right] du = \left(\frac{y^2-1}{8}\right)\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1 + \frac{2}{4}\left(y+1\right)\left[u\right]_0^1 =$$

$$= \frac{y^2-1}{16} + \frac{y+1}{2} = \frac{y^2+8\,y+7}{16} \qquad -1 \le y < 1$$

También se podrían haber hallado a través de las funciones de densidad marginales:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \int_{-1}^{1} \left[\frac{x\,y}{4} + \frac{1}{2}\right] dy = \frac{x}{4}\left[\frac{y^2}{2}\right]_{-1}^{1} + \frac{1}{2}\left[y\right]_{-1}^{1} = 1$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx = \int_0^1 \left[\frac{x\,y}{4} + \frac{1}{2}\right] dx = \frac{y}{4}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \frac{1}{2}\left[x\right]_0^1 = \frac{y+4}{8}$$

$$F_1(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f_1(u)\,du = \int_0^x du = \left[u\right]_0^x = x \qquad 0 \le x < 1$$

$$F_2(y) = P(Y \le y) = \int_{-\infty}^{y} f_2(v)\,dv = \int_{-1}^{y} \left[\frac{v+4}{8}\right] dv = \frac{1}{8}\left[\frac{v^2}{2} + 4\,v\right]_{-1}^{y} = \frac{y^2+8\,y+7}{16} \qquad -1 \le y < 1$$

La función de distribución conjunta:

$$F(x,y)=\begin{cases}0 & x<0 \quad \text{ó} \quad y<-1\\ \dfrac{x^2(y^2-1)}{16}+\dfrac{x(y+1)}{2} & 0\le x<1 \quad -1\le y<1\\ x & 0\le x<1\ ,\ y\ge 1\\ \dfrac{y^2+8y+7}{16} & -1\le y<1\ ,\ x\ge 1\\ 1 & x\ge 1\ ,\ y\ge 1\end{cases}$$

c) Las funciones de densidad marginales se pueden hallar a partir de la función de distribución conjunta:

$$f_1(x)=\frac{\vartheta F_1(x)}{\vartheta x}=\frac{\vartheta}{\vartheta x}(x)=1 \qquad f_2(y)=\frac{\vartheta F_2(y)}{\vartheta y}=\frac{\vartheta}{\vartheta y}\left[\frac{y^2+8y+7}{16}\right]=\frac{y+4}{8}$$

o bien, a partir de la función de densidad:

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dy=\int_{-1}^{1}\left[\frac{xy}{4}+\frac{1}{2}\right]dy=\frac{x}{4}\left[\frac{y^2}{2}\right]_{-1}^{1}+\frac{1}{2}[y]_{-1}^{1}=1$$

$$f_2(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dx=\int_{0}^{1}\left[\frac{xy}{4}+\frac{1}{2}\right]dx=\frac{y}{4}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1}+\frac{1}{2}[x]_{0}^{1}=\frac{y+4}{8}$$

- Funciones de densidad condicionadas:

$$f(y/x)=\frac{f(x,y)}{f_1(x)}=\frac{(xy+2)/4}{1}=\frac{xy+2}{4}\neq f_2(y)$$

$$f(x/y)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)}=\frac{(xy+2)/4}{(y+4)/8}=\frac{2xy+4}{y+4}\neq f_1(x)$$

Las variables X e Y no son independientes al ser $f(x,y)\neq f_1(x).f_2(y)$

d) En la transformación $\begin{cases}Z=X-Y\\ T=X+2Y\end{cases}$ $\quad J=\dfrac{\vartheta(z,t)}{\vartheta(x,y)}==\begin{vmatrix}\dfrac{\vartheta z}{\vartheta x} & \dfrac{\vartheta z}{\vartheta y}\\ \dfrac{\vartheta t}{\vartheta x} & \dfrac{\vartheta t}{\vartheta y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=3\neq 0$

por lo que existe la función de densidad $g(z,t)$

Despejando (X,Y) en la función de (Z,T) se calcula el jacobiano $J_1=\dfrac{\vartheta(x,y)}{\vartheta(z,t)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\vartheta x}{\vartheta z} & \dfrac{\vartheta x}{\vartheta t}\\ \dfrac{\vartheta y}{\vartheta z} & \dfrac{\vartheta y}{\vartheta t}\end{vmatrix}$

$$\begin{cases}Z=X-Y\\ T=X+2Y\end{cases} \mapsto \begin{matrix}2Z=2X-2Y\\ T=\ \ X\ \ +2Y\end{matrix} \mapsto \begin{cases}X=\dfrac{2Z+T}{3}\\ Y=\dfrac{-Z+T}{3}\end{cases} \qquad J_1=\frac{\vartheta(x,y)}{\vartheta(z,t)}=\begin{vmatrix}2/3 & 1/3\\ -1/3 & 1/3\end{vmatrix}=\frac{1}{3}$$

La función de densidad $g(z,t) = f\left[h_1(z,t),\, h_2(z,t)\right].\, |J_1|$

$$h_1(z,t) = \frac{2z+t}{3} \quad , \quad h_2(z,t) = \frac{-z+t}{3} \quad , \quad \begin{cases} 0 < x < 1 & \mapsto \quad 0 < 2z+t < 3 \\ -1 < y < 1 & \mapsto \quad -3 < -z+t < 3 \end{cases}$$

$$g(z,t) = \frac{\left[\dfrac{2z+t}{3}\right]\left[\dfrac{-z+t}{3}\right]}{4} \cdot \left|\frac{1}{3}\right| = \frac{(2z+t)(-z+t)}{108}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy+2}{4} & \begin{matrix} 0 < x < 1 \\ -1 < y < 1 \end{matrix} \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases} \qquad g(z,t) = \begin{cases} \dfrac{(2z+t)(-z+t)}{108} & \begin{matrix} 0 < 2z+t < 3 \\ -3 < -z+t < 3 \end{matrix} \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Ejercicio 9.- Sea (X,Y) una variable aleatoria bidimensional con función de probabilidad

$$p_{ij} = \begin{cases} c\,|x_i + y_j| & x_i = -2, -1, 0, 1, 2 \ \ , \ \ y_j = -2, -1, 0, 1, 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Calcular el valor de la constante c

b) $P\left[X = 0,\, Y = 2\right]$

c) $P\left[X = 1\right]$

d) $P\left[|X - Y| \le 1\right]$

Solución:

a) Para determinar el valor de la constante c se elabora la tabla, siendo $p_{ij} = c\,|x_i + y_j|$

X \ Y	-2	-1	0	1	2	$p_{i\bullet}$
-2	4c	3c	2c	c	0	10c
-1	3c	2c	c	0	c	7c
0	2c	c	0	c	2c	6c
1	c	0	c	2c	3c	7c
2	0	c	2c	3c	4c	10c
$p_{\bullet j}$	10c	7c	6c	7c	10c	40c

$$\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5} p_{ij} = 40c = 1 \quad \mapsto \quad c = \frac{1}{40} \quad \mapsto \quad p_{ij} = \begin{cases} \dfrac{1}{40}|x_i + y_j| & \begin{cases} x_i = -2, -1, 0, 1, 2 \\ y_j = -2, -1, 0, 1, 2 \end{cases} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

b) $P\left[X = 0,\, Y = 2\right] = \dfrac{1}{40}|0 + 2| = \dfrac{1}{20}$

c) $P\left[X=1\right]=7c=\dfrac{7}{40}$

d) $P\left[\left|X-Y\right|\le 1\right]\overset{\text{zona sombreada}}{=}28c=\dfrac{28}{40}=\dfrac{7}{10}$

$$\begin{aligned}P\left[\left|X-Y\right|\le 1\right]&=P\left[X=-2,Y=-2\right]+P\left[X=-2,Y=-1\right]+\\&+P\left[X=-1,Y=-2\right]+P\left[X=-1,Y=-1\right]+P\left[X=-1,Y=0\right]+\\&+P\left[X=0,Y=-1\right]+P\left[X=0,Y=0\right]+P\left[X=0,Y=1\right]+\\&+P\left[X=1,Y=0\right]+P\left[X=1,Y=1\right]+P\left[X=1,Y=2\right]+\\&+P\left[X=2,Y=1\right]+P\left[X=2,Y=2\right]=28c=28/40=7/10\end{aligned}$$

Ejercicio 10.- Sean (X,Y) dos variables aleatorias independientes, cada una con la función de densidad:

$$f_X(x)=\begin{cases}e^{-x} & x>0\\ 0 & \text{otro caso}\end{cases}\qquad\qquad f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y} & y>0\\ 0 & \text{otro caso}\end{cases}$$

Calcular la función de densidad de la variable aleatoria $X+Y$

Solución:

Por ser variables aleatorias independientes, la función de densidad conjunta de la variable aleatoria bidimensional $X+Y$ es:

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}e^{-x-y} & x>0\,,\,y>0\\ 0 & \text{otro caso}\end{cases}$$

La transformación a aplicar es $\begin{cases}U=X+Y\\ V=X\end{cases}$ siendo $x>0$ e $y>0$ $\mapsto\begin{cases}u>0\\ v>0\end{cases}$ $u>v$

Despejando (X,Y) en la función de (U,V) se calcula el jacobiano $J_1=\dfrac{\vartheta(x,y)}{\vartheta(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\vartheta x}{\vartheta u} & \dfrac{\vartheta x}{\vartheta v}\\ \dfrac{\vartheta y}{\vartheta u} & \dfrac{\vartheta y}{\vartheta v}\end{vmatrix}$

$$\begin{cases}U=X+Y\\ V=X\end{cases}\mapsto\begin{cases}X=V\\ Y=U-V\end{cases}\qquad J_1=\frac{\vartheta(x,y)}{\vartheta(u,v)}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-1$$

Función de densidad de la transformación $\left[h_1(u,v)=v\ ;\ h_2(u,v)=u-v\right]$:

$$f_{U,V}(u,v)=f_{X,Y}\left[h_1(u,v),\,h_2(u,v)\right].\left|J_1\right|=f_{X,Y}\left[v\,,\,u-v\right].\left|J_1\right|=f_{X,Y}\left[v\,,\,u-v\right].\left|-1\right|=f_{X,Y}\left[v\,,\,u-v\right]$$

$$f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}(v\,,\,u-v) = \begin{cases} e^{-v-(u-v)} = e^{-u} & u>0\,,\,v>0\;,\;u>v \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Como se quiere obtener la función de densidad de la variable aleatoria $U = X+Y$, se calcula la función de densidad marginal de U:

$$f_U(u) = \int_0^u f_{U,V}\,dv = \int_0^u e^{-u}\,dv = e^{-u}\,[v]_0^u = u\,.\,e^{-u} \qquad f_U(u) = \begin{cases} u\,.\,e^{-u} & u>0 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Ejercicio 11.- Sea (X,Y) una variable aleatoria bidimensional absolutamente continua con densidad uniforme en el cuadrante unitario $[0,1]\,x\,[0,1]$. Calcular la función de densidad conjunta $U = X+Y$ y $V = X-Y$

Solución:

$$\begin{cases} U = X+Y \\ V = X-Y \end{cases} \mapsto \begin{cases} X = \dfrac{U+V}{2} \\ Y = \dfrac{U-V}{2} \end{cases} \qquad \text{El jacobiano } J_1 = \frac{\vartheta(x,y)}{\vartheta(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\vartheta x}{\vartheta u} & \dfrac{\vartheta x}{\vartheta v} \\ \dfrac{\vartheta y}{\vartheta u} & \dfrac{\vartheta y}{\vartheta v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

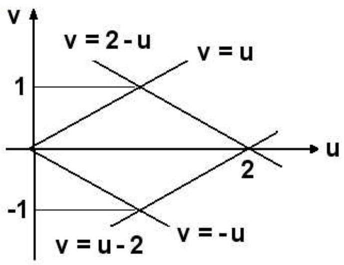
Función de densidad de la transformación $\left[h_1(u,v) = (u+v)/2 \;\;;\;\; h_2(u,v) = (u-v)/2\right]$:

$$f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}\left[h_1(u,v),\, h_2(u,v)\right].\,|J_1| = f_{X,Y}\left[\frac{u+v}{2},\,\frac{u-v}{2}\right].\,|J_1| = f_{X,Y}\left[\frac{u+v}{2},\,\frac{u-v}{2}\right].\,\left|-\frac{1}{2}\right| =$$

$$= f_{X,Y}\left[\frac{u+v}{2},\,\frac{u-v}{2}\right].\frac{1}{2} = 1.\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Dominio para las variables X e Y: $\begin{cases} X = \dfrac{u+v}{2} \in [0,1] \\ Y = \dfrac{u-v}{2} \in [0,1] \end{cases} \mapsto \begin{cases} 0 \le u+v \le 2 \\ 0 \le u-v \le 2 \end{cases}$

$$f_{U,V}(u,v) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & 0 \le u \le 2 \;\;;\;\; -1 \le v \le 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$



Ejercicio 12.- Dada la variable aleatoria bidimensional (X,Y) absolutamente continua con función de densidad conjunta

$$f(x,y)=\begin{cases} cx^2y & x^2\le y\le 1 \\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$

Calcular:

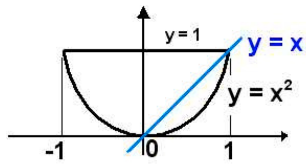
a) El valor de la constante c

b) $P[X\ge Y]$

c) Función de distribución conjunta

Solución:

a) Para el cálculo de la constante c se procede:



$$1=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy\,dx=\int_{-1}^{1}\left(\int_{x^2}^{1}\left[cx^2y\right]dy\right)dx=\int_{-1}^{1}\left(\frac{cx^2y^2}{2}\Bigg|_{y=x^2}^{y=1}\right)dx=\int_{-1}^{1}\left[\frac{cx^2}{2}-\frac{cx^6}{2}\right]dx=$$

$$=\left[\frac{cx^3}{6}-\frac{cx^7}{14}\right]_{x=-1}^{x=1}=\frac{c}{6}-\frac{c}{14}-\left[-\frac{c}{6}+\frac{c}{14}\right]=\frac{4c}{21}\quad\mapsto\quad c=\frac{21}{4}$$

con lo cual, $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{21}{4}x^2y & x^2\le y\le 1\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$

b) $$P[X\ge Y]=\int_0^1\left(\int_{x^2}^{x}\frac{21}{4}x^2y\,dy\right)dx=\int_0^1\left(\frac{21x^2y^2}{8}\Bigg|_{y=x^2}^{y=x}\right)dx=\int_0^1\left[\frac{21x^4}{8}-\frac{21x^6}{8}\right]dx=$$

$$=\left[\frac{21x^5}{40}-\frac{21x^7}{56}\right]_{x=0}^{x=1}=\frac{21}{40}-\frac{21}{56}=\frac{42}{280}=\frac{21}{140}$$

c) $$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,dv\,du$$

- $-1\le x<1\,,\,0\le y<1$

$$F(x,y)=\int_{u=-1}^{u=x}\left(\int_{v=u^2}^{v=y}\frac{21}{4}u^2v\,dv\right)du=\int_{-1}^{x}\left[\frac{21\,u^2v^2}{8}\right]_{v=u^2}^{v=y}du=\int_{-1}^{x}\left[\frac{21\,u^2y^2}{8}-\frac{21\,u^6}{8}\right]du=$$

$$= \left[\frac{21\,u^3\,y^2}{24} - \frac{21\,u^7}{56} \right]_{u=-1}^{u=x} = \left[\frac{7\,u^3\,y^2}{8} - \frac{3\,u^7}{8} \right]_{u=-1}^{u=x} = \left[\frac{7\,x^3\,y^2}{8} - \frac{3\,x^7}{8} \right] - \left[-\frac{7\,y^2}{8} + \frac{3}{8} \right] =$$

$$= \frac{7}{8} x^3\,y^2 - \frac{3}{8} x^7 + \frac{7}{8} y^2 - \frac{3}{8}$$

- $-1 \le x < 1,\; y \ge 1$

$$F(x,y) = \int_{u=-1}^{u=x} \left(\int_{v=u^2}^{v=1} \frac{21}{4} u^2\, v\; dv \right) du = \left[\frac{7}{8} x^3\,y^2 - \frac{3}{8} x^7 + \frac{7}{8} y^2 - \frac{3}{8} \right]_{y=1} = \frac{7}{8} x^3 - \frac{3}{8} x^7 + \frac{1}{2}$$

- $x \ge 1,\; 0 \le y < 1$

$$F(x,y) = \int_{u=-1}^{u=1} \left(\int_{v=u^2}^{v=y} \frac{21}{4} u^2\, v\; dv \right) du = \left[\frac{7}{8} x^3\,y^2 - \frac{3}{8} x^7 + \frac{7}{8} y^2 - \frac{3}{8} \right]_{x=1} = \frac{7}{4} y^2 - \frac{3}{4}$$

- $x \ge 1,\; y \ge 1$

$$F(x,y) = \int_{u=-1}^{u=1} \left(\int_{v=u^2}^{v=1} \frac{21}{4} u^2\, v\; dv \right) du = \left[\frac{7}{8} x^3\,y^2 - \frac{3}{8} x^7 + \frac{7}{8} y^2 - \frac{3}{8} \right]_{x=1,\; y=1} = 1$$

En consecuencia,

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ 0 & y < 0 \\ \frac{7}{8} x^3\,y^2 - \frac{3}{8} x^7 + \frac{7}{8} y^2 - \frac{3}{8} & -1 \le x < 1,\; 0 \le y < 1 \\ \frac{7}{8} x^3 - \frac{3}{8} x^7 + \frac{1}{2} & -1 \le x < 1,\; y \ge 1 \\ \frac{7}{4} y^2 - \frac{3}{4} & x \ge 1,\; 0 \le y < 1 \\ 1 & x \ge 1,\; y \ge 1 \end{cases}$$

Ejercicio 13.- Dada la variable aleatoria bidimensional (X,Y) con función de distribución

$$F(x,y)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ 0 & x\geq 0\ ,\ y\leq 0 \\ xy & 0\leq x<1\ ,\ 0\leq y<1 \\ x & 0\leq x<1\ ,\ y\geq 1 \\ y & x\geq 1\ ,\ 0\leq y<1 \\ 1 & x\geq 1\ ,\ y\geq 1 \end{cases}$$

Calcular la función de densidad conjunta de la v.a. bidimensional (X,Y)

Solución:

a)

$$\frac{\vartheta F(x,y)}{\vartheta x}=\begin{cases} 0 & x<0 \\ 0 & x\geq 0\ ,\ y\leq 0 \\ y & 0\leq x<1\ ,\ 0\leq y<1 \\ 1 & 0\leq x<1\ ,\ y\geq 1 \\ 0 & x\geq 1\ ,\ 0\leq y<1 \\ 0 & x\geq 1\ ,\ y\geq 1 \end{cases} \qquad f(x,y)=\frac{\vartheta^2 F(x,y)}{\vartheta x\ \vartheta y}=\begin{cases} 0 & x<0 \\ 0 & x\geq 0\ ,\ y\leq 0 \\ 1 & 0\leq x<1\ ,\ 0\leq y<1 \\ 0 & 0\leq x<1\ ,\ y\geq 1 \\ 0 & x\geq 1\ ,\ 0\leq y<1 \\ 0 & x\geq 1\ ,\ y\geq 1 \end{cases}$$

Por consiguiente, $f(x,y)=\begin{cases} 1 & 0\leq x<1\ ,\ 0\leq y<1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

Ejercicio 14.- Sea (X,Y) una variable aleatoria bidimensional con función de probabilidad

$$p_{ij} = \begin{cases} c\,|x_i + y_j| & x_i = -2,-1,0,1,2 \;\;,\;\; y_j = -2,-1,0,1,2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Calcular el valor de la constante c

b) $P[X = 0,\, Y = 2]$

c) $P[X = 1]$

d) $P[|X - Y| \le 1]$

Solución:

a) Para determinar el valor de la constante c se elabora la tabla, siendo $p_{ij} = c\,|x_i + y_j|$

X \ Y	-2	-1	0	1	2	$p_{i\bullet}$
-2	4c	3c	2c	c	0	10c
-1	3c	2c	c	0	c	7c
0	2c	c	0	c	2c	6c
1	c	0	c	2c	3c	7c
2	0	c	2c	3c	4c	10c
$p_{\bullet j}$	10c	7c	6c	7c	10c	40c

$$\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5} p_{ij} = 40c = 1 \;\;\mapsto\;\; c = \frac{1}{40} \;\;\mapsto\;\; p_{ij} = \begin{cases} \dfrac{1}{40}|x_i + y_j| & \begin{cases} x_i = -2,-1,0,1,2 \\ y_j = -2,-1,0,1,2 \end{cases} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

b) $P[X = 0,\, Y = 2] = \dfrac{1}{40}|0 + 2| = \dfrac{1}{20}$

c) $P[X = 1] = 7c = \dfrac{7}{40}$

d) $P[|X - Y| \le 1] \overset{\text{zona sombreada}}{=} 28c = \dfrac{28}{40} = \dfrac{7}{10}$

$$\begin{aligned} P[|X - Y| \le 1] &= P[X=-2, Y=-2] + P[X=-2, Y=-1] + \\ &+ P[X=-1, Y=-2] + P[X=-1, Y=-1] + P[X=-1, Y=0] + \\ &+ P[X=0, Y=-1] + P[X=0, Y=0] + P[X=0, Y=1] + \\ &+ P[X=1, Y=0] + P[X=1, Y=1] + P[X=1, Y=2] + \\ &+ P[X=2, Y=1] + P[X=2, Y=2] = 28c = 28/40 = 7/10 \end{aligned}$$

Universidad Autónoma de Madrid

Estadística Teórica
Facultad Ciencias Económicas y Empresariales
Departamento de Economía Aplicada
Profesor: Santiago de la Fuente Fernández