Universidad Autónoma de Madrid

Gestión Aeronáutica: Estadística Teórica
Facultad Ciencias Económicas y Empresariales
Departamento de Economía Aplicada
Profesor: Santiago de la Fuente Fernández

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD


UAM

DISTRIBUCIONES VARIABLE ALEATORIA DISCRETA

DISTRIBUCIÓN UNIFORME

La variable aleatoria discreta X se dice que tiene una distribución uniforme si puede tomar los n valores $x_1, x_2, \cdots, x_n$ con probabilidad

$$P(X = x_i) = \frac{1}{n} \quad \forall i \qquad \mu_X = \frac{n+1}{2} \qquad \sigma_X^2 = \frac{n^2-1}{12} \qquad \sigma_X = \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$$

DISTRIBUCIÓN de BERNOUILLI

Experimento aleatorio que sólo admite dos resultados excluyentes (éxito y fracaso).

La variable aleatoria discreta X asociada a este experimento toma el valor 1 cuando ocurre el suceso éxito con probabilidad $P(A) = p$ y el valor 0 cuando ocurre el suceso fracaso con probabilidad $P(\overline{A}) = q$

X	$P(X = x_i)$
0	q
1	p

$$\mu_X = p \qquad \sigma_X^2 = p\,.\,q \qquad \sigma_X = \sqrt{p\,.\,q}$$

DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

Cuando se realizan n pruebas de Bernouilli sucesivas e independientes.

La variable aleatoria discreta X se denomina variable binomial cuando:

X = "número de veces que ocurre el suceso éxito en n pruebas" $X \sim B(n, p)$

La función de probabilidad o cuantía: $P(X = k) = \binom{n}{k} . p^k . q^{n-k}$

$$\mu_X = n.\,p \qquad \sigma_X^2 = n.p.q \qquad \sigma_X = \sqrt{n.p.q} \qquad A_s = \frac{q-p}{\sqrt{n.p.q}} \text{ (coeficiente asimetría)}$$

- Si el experimento consiste en extracciones de una urna, éstas han de ser con remplazamiento para mantener la probabilidad de éxito a lo largo de todas las pruebas.

- Si $X \sim B(n, p)$ cuando n es grande y ni p ni q son próximos a cero, se puede considerar que $X \sim N\left(n.p\ ;\ \sqrt{n.p.q}\right)$

$$P(X=k)=\binom{n}{k}.\,p^k\,.\,q^{n-k} \xrightarrow{n.p\,\geq 5} N\left(n.p\ ;\ \sqrt{n.\,p.q}\right)$$

y, por tanto, la variable $z=\dfrac{X-n.p}{\sqrt{n.p.q}}\sim N(0,1)$ Teorema de Moivre

📖 La distribución de Poisson es una buena aproximación de la distribución binomial cuando el tamaño n es grande y la probabilidad p es pequeña.

En general, cuando $n\geq 30$ y $p\leq 0{,}1$

$$B(n,k)=\binom{n}{k}p^k\,q^{n-k} \xrightarrow{n.p<5} P(\lambda)=\frac{\lambda^k}{k!}\,e^{-\lambda} \quad \text{con } \lambda=n.p$$

DISTRIBUCIÓN de POISSON

Una variable X se dice que sigue una distribución de probabilidad de Poisson si puede tomar todos los valores enteros $(0,1,2,\cdots,n)$ con probabilidades

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}\,e^{-\lambda} \quad \text{siendo } \lambda>0 \qquad \mu_X=\lambda \qquad \sigma_X^2=\lambda \qquad \sigma_X=\sqrt{\lambda}$$

X = "número de ocurrencias de un suceso durante un gran número de pruebas"

Existen un gran número de modelos experimentales que se ajustan a una distribución de Poisson:

- Número de piezas defectuosas en una muestra grande, donde la proporción de defectuosas es pequeña.
- Número de llamadas telefónicas recibidas en una centralita durante cierto tiempo.
- Número de clientes que llegan a una ventanilla de pagos de un banco durante cierto tiempo.

📖 La suma de n variables aleatorias de Poisson independientes es otra variable aleatoria de Poisson cuyo parámetro es la suma de los parámetros originales.

Sí $X_i\sim P(\lambda_i)$ donde $i=1,2,\cdots,n$ variables aleatorias independientes de Poisson $\mapsto$

$$\mapsto\ Y=\sum_{i=1}^{n}X_i\sim P\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)$$

📖 Si para cada valor $t>0$, que representa el tiempo, el número de sucesos de un fenómeno aleatorio sigue una distribución de Poisson de parámetro λt, los tiempos transcurridos entre dos sucesos sucesivos sigue una distribución exponencial.

📖 Cuando $\lambda\geq 10$ la distribución de Poisson se aproxima a una distribución normal $N\left(\lambda,\sqrt{\lambda}\right)$

DISTRIBUCIÓN GEOMÉTRICA o de PASCAL

La distribución geométrica o de Pascal consiste en la realización sucesiva de pruebas de Bernouilli, donde la variable aleatoria discreta:

X = "número de la prueba en que aparece por primera vez el suceso A", donde $X \sim G(p)$

Para hallar la función de probabilidad o cuantía $P(X=k)$ hay que notar que la probabilidad del suceso es: $\overbrace{\overline{A}.\overline{A}.\overline{A}.\cdots.\overline{A}}^{k\text{-}1}\,.\,A$

En consecuencia, $P(X=k)=q^{k-1}.\,p$

$$\mu=\frac{1}{p} \qquad \sigma^2=\frac{q}{p^2} \qquad \sigma=\frac{\sqrt{q}}{p}$$

La distribución geométrica es un modelo adecuado para aquellos procesos en los que se repiten pruebas hasta la consecución del resultado deseado.

Si el experimento consiste en extracciones de una urna, éstas han de ser con remplazamiento.

DISTRIBUCIÓN BINOMIAL NEGATIVA

La distribución binomial negativa $Bn(n,\,p)$ es un modelo adecuado para tratar procesos en los que se repite n veces una prueba determinada o ensayo hasta conseguir un número determinado k de resultados favorables (por vez primera).

Si el número de resultados favorables buscados fuera 1 sería el caso de una distribución geométrica, esto es, la distribución binomial negativa puede considerarse una extensión o ampliación de la distribución geométrica.

X = "número de pruebas necesarias para lograr k-éxitos " donde $X \sim Bn(n,\,p)$

$$P(X=n)=\binom{n-1}{k-1}\,p^k.q^{n-k} \qquad \mu=\frac{k.q}{p} \qquad \sigma^2=\frac{k.q}{p^2} \qquad \sigma=\frac{\sqrt{k.q}}{p}$$

Si el experimento consiste en extracciones de una urna, éstas han de ser con remplazamiento.

Adviértase que si el número de resultados favorables fuera 1 $(k=1)$ la distribución binomial negativa sería una distribución geométrica:

$$P(X=n)=\binom{n-1}{0}\,p.q^{n-1}=p.q^{n-1}$$

DISTRIBUCIÓN POLINOMIAL o MULTINOMIAL

Es una generalización de la distribución binomial cuando en cada prueba se consideran k sucesos excluyentes $(A_1, A_2, \cdots, A_k)$ con probabilidades respectivas $(p_1, p_2, \cdots, p_k)$, siendo $p_1 + p_2 + \cdots + p_k = 1$

Suponiendo que se realizan n pruebas independientes de este tipo y considerando las variables X_i = "número de veces que ocurre el suceso A_i en las n pruebas"

$$P(X_1 = n_1 \; ; \; X_2 = n_2 \; ; \cdots ; \; X_k = n_k) = \frac{n!}{n_1! \; n_2! \; \cdots n_k!} \; p_1^{n_1} \; p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k}$$

DISTRIBUCIÓN HIPERGEOMÉTRICA

Es una variante de la distribución binomial (experiencias independientes o extracciones con reemplazamiento).

La distribución hipergeométrica corresponde a extracciones sin reemplazamiento.

En las demás cuestiones presenta el mismo marco de consideraciones, es decir, dos situaciones excluyentes (éxito y fracaso) que se realizan en n pruebas.

Sean N elementos, con la probabilidad de éxito p en la primera extracción. Los N elementos se distribuyen en $N.p$ éxitos y $N.q$ fracasos.

La variable aleatoria X = "número de éxitos k en n extracciones" donde $X \sim H\left[n, N, N_A\right]$

$$P(X = k) = \frac{\binom{N.p}{k}\binom{N.q}{n-k}}{\binom{N}{n}} \qquad \mu = n.p \qquad \sigma_X^2 = n.p.q.\frac{N-n}{N-1} \qquad \sigma_X = \sqrt{n.p.q.\frac{N-n}{N-1}}$$

Cuando N es grande respecto a n, es decir, $\frac{n}{N} < 0{,}1$, se puede decir que la variable hipergeométrica sigue aproximadamente una distribución binomial. Esto es,

$$P(X = k) = \frac{\binom{N.p}{k}\binom{N.q}{n-k}}{\binom{N}{n}} \xrightarrow{\frac{n}{N} < 0{,}1} \binom{n}{k} \; p^k.q^{n-k}$$

En general, de forma análoga a la distribución polinomial, en una población con N elementos repartidos en k clases excluyentes $(A_1, A_2, \cdots, A_k)$ con elementos respectivos de cada clase $(N_1, N_2, \cdots, N_k)$, $N_1 + N_2 + \cdots + N_k = N$, al tomar consecutivamente n elementos sin reemplazamiento y denotando por:

X_i = "número de elementos que hay de la clase A_i en la muestra de tamaño n"

$$P(X_1 = n_1\ ;\ X_2 = n_2\ ;\cdots;\ X_k = n_k) = \frac{\binom{N_1}{n_1}.\binom{N_2}{n_2}.\cdots.\binom{N_k}{n_k}}{\binom{N}{n}} \quad \text{siendo} \begin{cases} N_1 + N_2 + \cdots + N_k = N \\ n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n \end{cases}$$

DISTRIBUCIONES VARIABLE ALEATORIA CONTINUA

La ley de probabilidad de una variable aleatoria continua X está definida, bien si se conoce su función de densidad $f(x)$, bien si se conoce su función de distribución $F(x)$, verificando:

$$F(x) = P(X \le x) \qquad P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

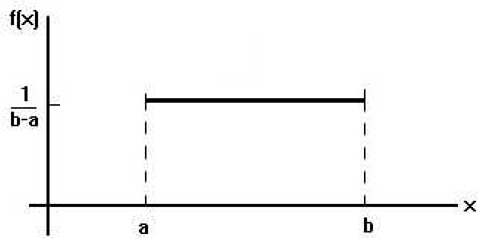
La función de densidad $f(x)$ y la función de distribución $F(x)$ se encuentran relacionadas por la expresión:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx \qquad f(x) = \frac{d\,F(x)}{dx}$$

DISTRIBUCIÓN UNIFORME

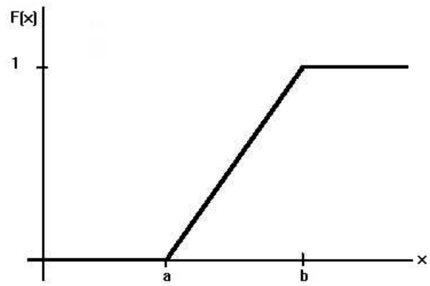
Una variable aleatoria continua X sigue una distribución uniforme en el intervalo [a, b], y se denota como $X \sim U(a, b)$, cuando su función de densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \dfrac{1}{b-a} & a \le x \le b \\ 0 & x > b \end{cases}$$



La función de distribución es:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a \le x \le b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

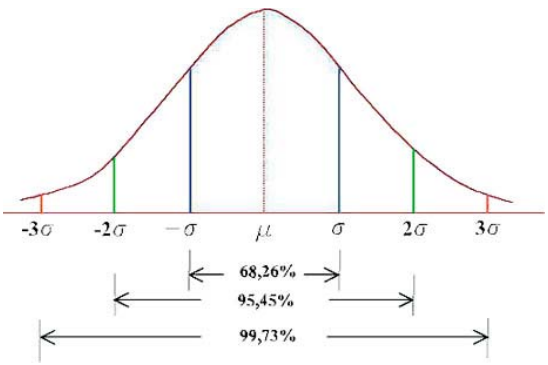


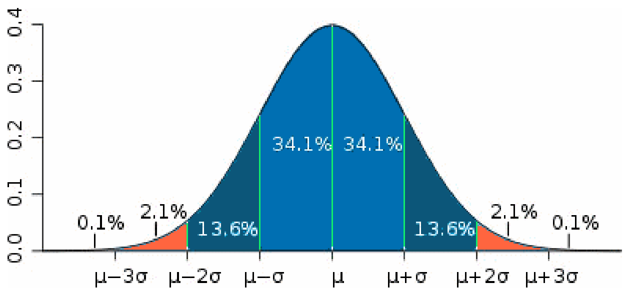
$$\mu_X = \frac{a+b}{2} \qquad \sigma_X^2 = \frac{(b-a)^2}{12} \qquad \sigma_X = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$$

DISTRIBUCIÓN NORMAL o de LAPLACE-GAUSS

Una variable aleatoria continua X se dice que tiene una distribución normal o de Laplace-Gauss de media μ y desviación típica σ si su función de densidad es:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \, . \sqrt{2\pi}} \, . \, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad -\infty < \mu < \infty \qquad \sigma > 0$$





La función de distribución: $F(x) = \frac{1}{\sigma \, . \sqrt{2\pi}} \, . \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \, dx$

📖 Si una variable X_1 es $N(\mu_1, \sigma_1)$ y otra X_2 es $N(\mu_2, \sigma_2)$ independientes entre sí, entonces la nueva variable $X = X_1 \pm X_2$ sigue también una distribución normal $N\left(\mu_1 \pm \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right)$. Propiedad que se puede generalizar a n variables aleatorias independientes.

📖 Si una variable X sigue una distribución normal $N(\mu, \sigma)$, la nueva variable $z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ sigue también una distribución normal $N(0, 1)$. La variable z se le denomina variable tipificada de X y a la curva de su función de densidad curva normal tipificada.

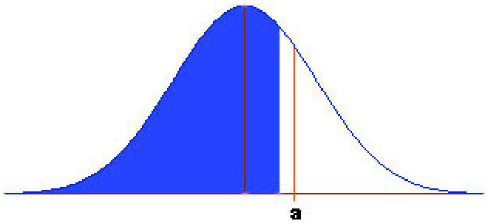
La función de densidad será, $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, . \, e^{-\frac{z^2}{2}} \qquad -\infty < z < \infty$

Función de distribución: $F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, . \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt$

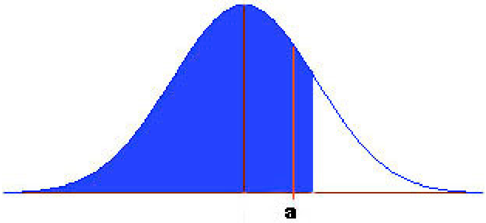
📖 Si X es una variable binomial $B(n, p)$ con n grande y ni p ni q son próximos a cero, podemos considerar que X sigue aproximadamente una distribución $N\left[n \, . \, p, \sqrt{n \, . \, p \, . \, q}\right]$ y, en consecuencia, la variable $z = \frac{X - n.p}{\sqrt{n \, . \, p \, . \, q}} \sim N(0, 1)$ (Teorema de Moivre)

En general, la transformación es aceptable cuando $p \leq 0{,}5$ y $n \, . \, p > 5$

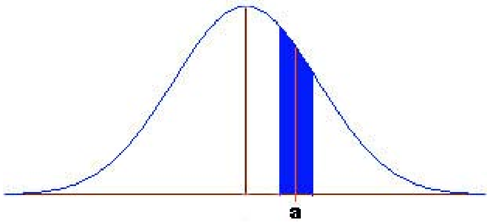
Para utilizar correctamente la transformación de una variable discreta X (con distribución binomial) en una variable continua z (con distribución normal) es necesario realizar una corrección de continuidad.



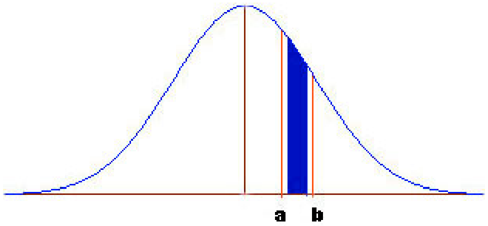
$P(X < a) = P(X \leq a - 0,5)$



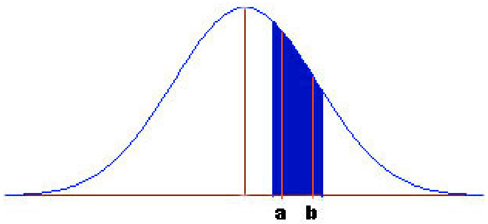
$P(X \leq a) = P(X \leq a + 0,5)$



$P(X = a) = P(a - 0,5 \leq X \leq a + 0,5)$



$P(a < X < b) = P(a + 0,5 \leq X \leq b - 0,5)$



$P(a \leq X \leq b) = P(a - 0,5 \leq X \leq b + 0,5)$

DISTRIBUCIÓN χ^2 de PEARSON

Sean n variables aleatorias $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ independientes entre sí, con ley $N(0,1)$

La variable $\chi_n^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$ recibe el nombre de χ^2 (chi-cuadrado) de Pearson con n grados de libertad.

La función de densidad es $f_{\chi^2}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{n/2} \,.\, \Gamma(n/2)} \, e^{-x/2} \,.\, x^{(n/2)-1} & 0 < x < \infty \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$

📖 La función gamma se define $\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} \, e^{-x} \, dx$

Algunas fórmulas de interés para el cálculo de $\Gamma(p)$:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \qquad \Gamma(p) = (p-1)! = (p-1)\,\Gamma(p-1) \qquad \Gamma(p) \,.\, \Gamma(p-1) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} p\,\pi}$$

Media, varianza y desviación típica: $\mu_{\chi_n^2} = n \qquad \sigma^2_{\chi_n^2} = 2n \qquad \sigma_{\chi_n^2} = \sqrt{2n}$

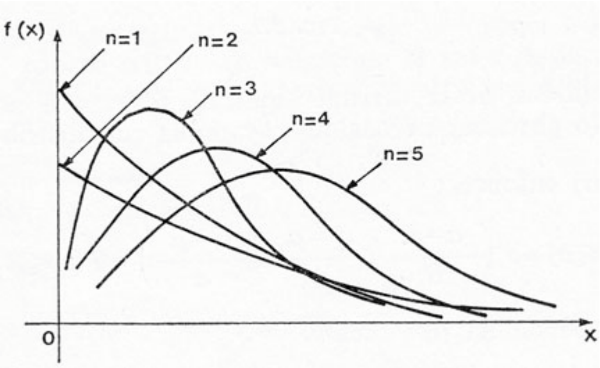
📖 Si $\chi^2_{n_1}$ y $\chi^2_{n_2}$ son dos χ^2 de Pearson, respectivamente con n_1 y n_2 grados de libertad, independientes entre sí, entonces la suma de las dos $\chi^2_{n_1+n_2} = \chi^2_{n_1} + \chi^2_{n_2}$ es también una χ^2 de Pearson con n_1+n_2 grados de libertad.
Esta propiedad se puede generalizar a n variables aleatorias independientes.

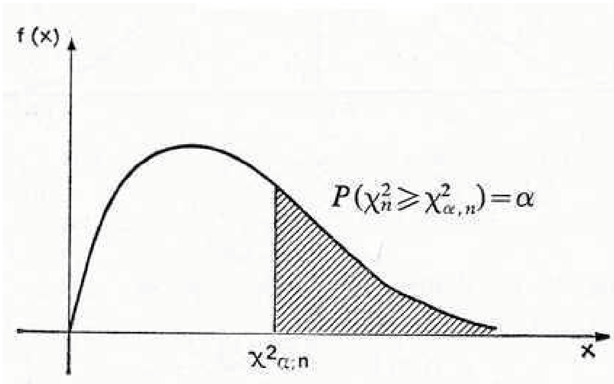
📖 Al aumentar el número de grados de libertad, la distribución χ^2 se aproxima asintóticamente a la distribución normal.

$$\sqrt{2\chi^2_n} \xrightarrow{n>30} N\left(\sqrt{2n-1},\, 1\right)$$

📖 En el muestreo, al tomar muestras de media $\bar{x}$ y desviación típica σ_x de una población $N(\mu, \sigma)$, la variable $\chi^2_{n-1} = \dfrac{(n-1).s^2_x}{\sigma^2}$ es una χ^2 de Pearson con $(n-1)$ grados de libertad, donde s^2_x es la cuasivarianza muestral, $n\sigma^2_x = (n-1)s^2_x$

Esta propiedad es muy utilizada en la estimación y en el contraste de hipótesis sobre la varianza poblacional σ^2.





$$P\left(\chi^2_n \le \chi^2_{\alpha,n}\right) = 1 - P\left(\chi^2_n \ge \chi^2_{\alpha,n}\right) = 1-\alpha$$

DISTRIBUCIÓN t de STUDENT

Sean $(n+1)$ variables aleatorias $(X_1, X_2, \cdots, X_n, X)$ independientes entre sí, con ley $N(0,1)$, se denomina t de Student con n grados de libertad a la variable

$$t_n = \frac{X}{\sqrt{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i)^2}}$$

Dividiendo la expresión por σ, se tiene:

$$t_n = \frac{X}{\sqrt{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i)^2}} = \frac{X/\sigma}{\sqrt{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{X_i}{\sigma}\right)^2}} = \frac{z}{\sqrt{\dfrac{1}{n}\,\chi^2_n}}$$

La función de densidad: $f_{t_n}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{n}\,.\,\beta\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{n}{2}\right)} \left(1 + \dfrac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$

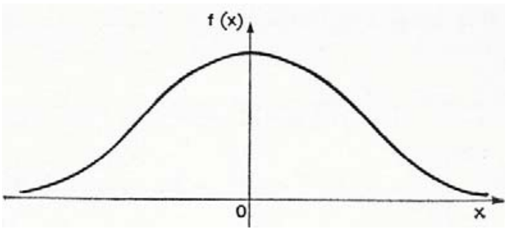
🕮 Algunas fórmulas de interés para el cálculo de $\beta(p, q)$, $p > 0$ y $q > 0$, son:

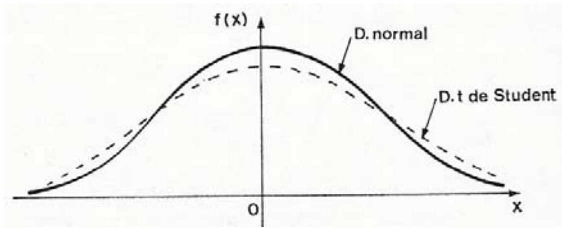
$\beta(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$ con el cambio $x = \dfrac{t}{1+t}$ se tiene $\beta(p, q) = \int_0^{\infty} \dfrac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\,dt$

otra forma de representar la función, $\beta(p, q) = 2\int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen} t)^{2p-1}\,(\cos t)^{2q-1}\,dt$

$\beta(p, q) = \dfrac{\Gamma(p)\,.\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ $\beta(p, q) = \beta(q, p)$ simetría

🕮 Al aumentar el tamaño n se va haciendo cada vez más apuntada su función de densidad, siendo el límite cuando $n \to \infty$ la curva normal tipificada





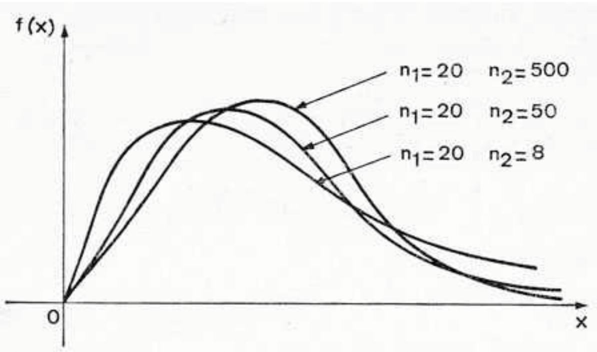
🕮 En el muestreo, al tomar muestras de media $\bar{x}$ y desviación típica σ_x de una población $N(\mu, \sigma)$, la variable $t_{n-1} = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\dfrac{s_x}{\sqrt{n-1}}} = \dfrac{\bar{x} - \mu}{s_x}\sqrt{n-1}$. Propiedad muy utilizada en la estimación y en el contraste de hipótesis sobre la media de la población μ.

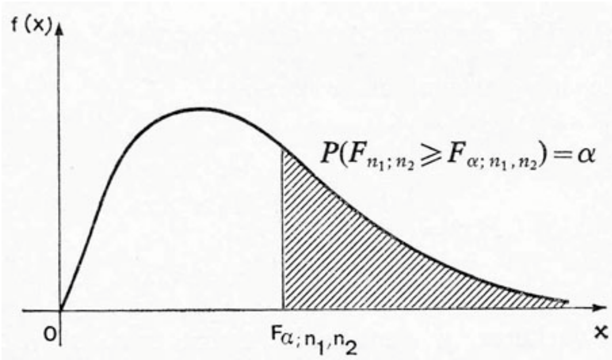
DISTRIBUCIÓN F de FISHER-SNEDECOR

Sean χ_1^2 y χ_2^2 dos variables χ^2 de Pearson, respectivamente con n_1 y n_2 grados de libertad, independientes entre sí, se denomina F de Fisher-Snedecor con n_1 y n_2 grados de libertad a la variable: $F_{n_1;n_2} = \dfrac{\chi_1^2/n_1}{\chi_2^2/n_2}$

Tiene por función de densidad:

$$f_{n_1,n_2}(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{n_1+n_2}{2}\right)\cdot\left(\dfrac{n_1}{n_2}\right)^{n_1/2}}{\Gamma\left(\dfrac{n_1}{2}\right).\Gamma\left(\dfrac{n_2}{2}\right)} \dfrac{x^{(x_1/2)-1}}{\left(1+\dfrac{n_1}{n_2}x\right)^{(n_1+n_2)/2}} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$





$P(F_{n_1,n_2} \ge F_{\alpha;n_1,n_2}) = \alpha$ $\qquad$ $P(F_{n_1,n_2} < F_{\alpha;n_1,n_2}) = 1 - P(F_{n_1,n_2} \ge F_{\alpha;n_1,n_2}) = 1-\alpha$

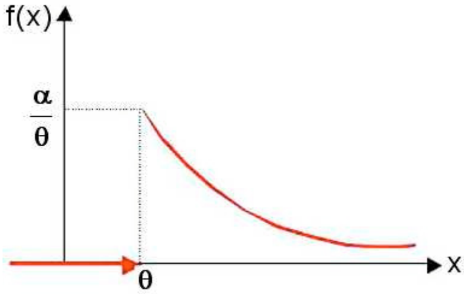
Para valores de $\alpha = 0{,}95$ y $\alpha = 0{,}99$ se considera la relación $F_{\alpha;n_1,n_2} = \dfrac{1}{F_{1-\alpha;n_2,n_1}}$

🕮 En el muestreo es un estadístico utilizado para la razón de varianzas de dos poblaciones normales y en el contraste de hipótesis sobre la igualdad de varianzas poblacionales.

DISTRIBUCIÓN de PARETO

Una variable aleatoria continua X se dice que sigue una distribución de Pareto de parámetros (α, θ) si puede tomar valores iguales o superiores a θ y tiene como función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha \,.\, \theta^{\alpha}}{x^{\alpha+1}} & x \geq \theta > 0 \quad \alpha > 0 \\ 0 & x < \theta \end{cases}$$



Función de distribución $F(x) = \begin{cases} 1 - \left(\dfrac{\theta}{x}\right)^{\alpha} & x \geq \theta \\ 0 & x < \theta \end{cases}$

Media, varianza y desviación típica para $\alpha > 2$

$$\mu_x = \frac{\alpha \,.\, \theta}{\alpha - 1} \qquad \sigma_x^2 = \frac{\alpha \,.\, \theta^2}{(\alpha-1)^2 \,.\, (\alpha-2)} \qquad \sigma_x = \sqrt{\frac{\alpha \,.\, \theta^2}{(\alpha-1)^2 \,.\, (\alpha-2)}}$$

Es muy utilizada en economía, ya que la distribución de las rentas personales superiores a una cierta renta θ sigue una distribución de Pareto de parámetros (α, θ)

El parámetro θ puede interpretarse como un ingreso mínimo de la población, tratándose de un indicador de posición. Si la población fuera el conjunto de salarios una nación que trabaja ocho horas al día, el parámetro θ sería el salario mínimo nacional.

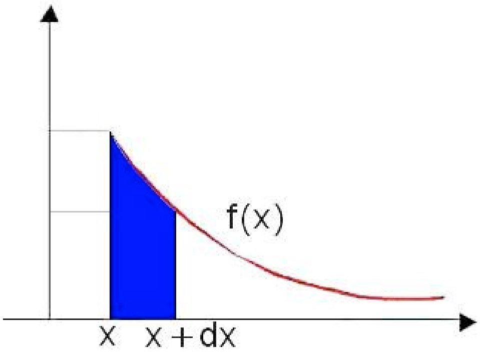
El parámetro α se determina generalmente a partir de la media muestral. Normalmente, toma valores próximos a 2. A mayores valores de α se obtienen densidades de Pareto más concentradas en las proximidades del mínimo, esto es, menos dispersas.

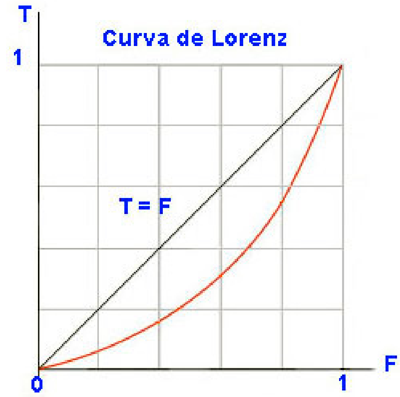
El Coeficiente de Variación $CV = \dfrac{\sqrt{\dfrac{\alpha \,.\, \theta^2}{(\alpha-1)^2 \,.\, (\alpha-2)}}}{\dfrac{\alpha \,.\, \theta}{\alpha - 1}} = \dfrac{\dfrac{\cancel{\theta}\,\sqrt{\alpha}}{\cancel{(\alpha-1)}\,\sqrt{(\alpha-2)}}}{\dfrac{\alpha \,.\, \cancel{\theta}}{\cancel{\alpha-1}}} = \boxed{\dfrac{1}{\sqrt{\alpha \,.\, (\alpha-2)}}}$

Reflejando que la dispersión depende sólo del parámetro α, se necesitaría un valor de $\alpha > 10$ para obtener un coeficiente de dispersión menor del 10%.

Atendiendo a su función de distribución: $P(\xi > x) = 1 - P(\xi \leq x) = 1 - F(x) = \left(\dfrac{\theta}{x}\right)^{\alpha}$ que permita determinar el número de personas que superan la renta θ

📖 Al determinar la **Curva de Lorenz** para una distribución de Pareto, se trata de encontrar la relación entre la función de distribución $F(x)$ y la función $T(x)$ que acumula los ingresos de todos los individuos que no superan una cantidad x





Curva de Lorenz:
$T(x) = 1 - [1 - F(x)]^{1-\frac{1}{\alpha}}$

Recta equidistribución:
$T(x) = F(x)$

Sea una población de N individuos, con una proporción de individuos $f(x)\,dx$

- Ingreso total de N individuos será:

$$N.\mu = N.E(X) = N.\int_\theta^\infty x.f(x)\,dx = N.\int_\theta^\infty x.\frac{\alpha\,.\,\theta^\alpha}{x^{\alpha+1}}\,dx = N.\alpha.\theta^\alpha.\int_\theta^\infty x^{-\alpha}\,dx = \frac{N.\alpha.\theta^\alpha}{1-\alpha}.\left[x^{1-\alpha}\right]_\theta^\infty =$$

$$= \frac{N.\alpha.\theta^\alpha}{1-\alpha}.(-\theta^{1-\alpha}) = \frac{N.\alpha.\theta}{\alpha-1}$$

- Ingreso total de N individuos con ingresos entre $(x, x+dx)$ será:

$$N.\mu = N.E(Y) = N.\int_\theta^x t.\,f(t)\,dt = N.\int_\theta^x t.\frac{\alpha.\theta^\alpha}{t^{\alpha+1}}\,dt = N.\alpha.\theta^\alpha.\int_\theta^x t^{-\alpha}\,dt = \frac{N.\alpha.\theta^\alpha}{1-\alpha}.\left[t^{1-\alpha}\right]_\theta^x =$$

$$= \frac{N.\alpha.\theta^\alpha}{1-\alpha}.(x^{1-\alpha} - \theta^{1-\alpha}) = \frac{N.\alpha.\theta}{\alpha-1}\left(1-\left(\frac{\theta}{x}\right)^{\alpha-1}\right)$$

En la curva de Lorenz, con la distribución de Pareto, la ordenada T(x) será:

$$T(x) = \frac{N.E(Y)}{N.E(X)} = \frac{\dfrac{N.\alpha.\theta}{\alpha-1}\left(1-\left(\dfrac{\theta}{x}\right)^{\alpha-1}\right)}{\dfrac{N.\alpha.\theta}{\alpha-1}} = \left(1-\left(\frac{\theta}{x}\right)^{\alpha-1}\right)$$

- La relación entre distribución $F(x)$ y la función $T(x)$ que acumula los ingresos de todos los individuos que no superan una cantidad x

$$F(x) = 1-\left(\frac{\theta}{x}\right)^\alpha \;\Rightarrow\; \left(\frac{\theta}{x}\right)^\alpha = 1-F(x) \;\Rightarrow\; \left(\frac{\theta}{x}\right) = [1-F(x)]^{1/\alpha}$$

$$T(x) = \left(1-\left(\frac{\theta}{x}\right)^{\alpha-1}\right) = 1-\left[(1-F(x))^{1/\alpha}\right]^{\alpha-1} = 1-[1-F(x)]^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} = 1-[1-F(x)]^{1-\frac{1}{\alpha}}$$

La relación $T(x)=1-\left[1-F(x)\right]^{1-\frac{1}{\alpha}}$ sólo depende del parámetro α, verificando

$F(\theta)=0$ y $F(\infty)=1$, $T(\theta)=0$ y $T(\infty)=1$

De otra parte, la función $T(x)$ es creciente y cóncava:

$$T'(x)=\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\left[1-F(x\right]^{-1/\alpha}>0 \;\; \text{para } F\in\left[0,1\right] \quad \text{creciente}$$

$$T''(x)=\left(1-\frac{1}{\alpha}\right).\,\frac{1}{\alpha}.\left[1-F(x\right]^{(-1-\alpha)/\alpha}>0 \;\; \text{para } F\in\left[0,1\right] \;\; \text{cóncava}$$

🕮 El **Índice de Gini** es el doble del área comprendida entre la curva de Lorenz y la recta de equidistribución $T=F$, con lo que:

$$I_G=2\int_0^1\left[F-\left(1-\left[1-F\right]^{1-\frac{1}{\alpha}}\right)\right]dF=2\int_0^1\left(F-1+\left[1-F\right]^{1-\frac{1}{\alpha}}\right)dF=2\left[\frac{F^2}{2}-F-\frac{(1-F)^{2-\frac{1}{\alpha}}}{2-\frac{1}{\alpha}}\right]_0^1=$$

$$=2\left[\left(\frac{1}{2}-1\right)+\left(\frac{1}{2-\dfrac{1}{\alpha}}\right)\right]=2\left[-\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2\alpha-1}\right]=2\left[\frac{-2\alpha+1+2\alpha}{2\left(2\alpha-1\right)}\right]=\frac{1}{2\alpha-1}$$

El Índice de Gini $I_G=\dfrac{1}{2\alpha-1}$ sólo depende del parámetro α, es independiente del ingreso mínimo θ. Tiende a 1 cuando $\alpha\mapsto 1$

DISTRIBUCIÓN LOGNORMAL

Una variable X se dice que tiene una distribución lognormal si los logaritmos neperianos de sus valores están normalmente distribuidos, es decir, si la variable

$$\eta=\log_e X \quad \text{es} \quad N(\mu,\,\sigma)$$

entonces la función de densidad:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi.x.\sigma}}\,e^{-\frac{(\log_e x-\mu)^2}{2\sigma^2}} & x>0\\[2ex] 0 & x\leq 0\end{cases}$$

La media y varianza son: $\mu_x=e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$ $\qquad \sigma_x^2=e^{2\left(\mu+\sigma^2\right)}-e^{2\mu+\sigma^2}$

La distribución lognormal tiene, entre otras, las siguientes aplicaciones:

- Permite fijar tiempos de reparación de componentes, siendo el tiempo la variable independiente de la distribución.

- Describe la dispersión de las tasas de fallo de componentes, ocasionada por bancos de datos diferentes, entorno, origen diferente de los datos, distintas condiciones de operación, etc. En este caso la variable independiente de la distribución es la tasa de fallos.
- .Representa la evolución con el tiempo de la tasa de fallos, l(t), en la primera fase de vida de un componente, la correspondiente a los fallos infantiles en la 'curva de la bañera', entendiendo como tasa de fallos la probabilidad de que un componente que ha funcionado hasta el instante t, falle entre t y t + dt. En este caso la variable independiente de la distribución es el tiempo.

DISTRIBUCIÓN LOGÍSTICA

La curva logística es una curva adecuada para describir el crecimiento de las poblaciones, estudio de la mortalidad, y en general, los procesos de crecimiento que experimentan estados de saturación.

Una variable aleatoria logística X de parámetros α y β**,** abreviadamente $L(\alpha, \beta)$, tiene como función de densidad y distribución, respectivamente:

$$f(x) = \frac{e^{\frac{x-\alpha}{\beta}}}{\beta\left(1+e^{\frac{x-\alpha}{\beta}}\right)^2} \qquad F(x) = \frac{1}{1+e^{\frac{x-\alpha}{\beta}}} \qquad -\infty < x < \infty$$

- Con el cambio $Y = \dfrac{X-\alpha}{\beta}$ se obtiene la distribución logística estándar $L(0,1)$, que

  tiene: $\mu_Y = M_e = M_d = \alpha \qquad \sigma_Y^2 = \dfrac{(\pi\beta)^2}{3}$

DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL (Lambda)

Se dice que una variable aleatoria absolutamente continua X sigue una distribución Exponencial de parámetro λ, si la v.a. X describe *el tiempo transcurrido entre dos sucesos consecutivos de Poisson o el tiempo de espera hasta que ocurre un suceso de Poisson*.

Una v.a. con distribución Exponencial se denota como $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, donde λ es el número de sucesos de Poisson por unidad de tiempo.

La función de densidad: $f(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

La función de distribución $F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 1-e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

La esperanza matemática, varianza, desviación típica y tasa instantánea de ocurrencia:

$\mu_X = E(X) = \dfrac{1}{\lambda} \qquad \sigma_X^2 = \dfrac{1}{\lambda^2} \qquad \sigma_X = \dfrac{1}{\lambda} \qquad \lambda(x) = \dfrac{f(x)}{1-F(x)}$ tasa instantánea ocurrencia

La función característica de la v.a. $X \sim Exp(\lambda)$ es: $\rho(t) = E\left[e^{itX}\right] = \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{\lambda}it} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$

La distribución exponencial $Exp(\lambda)$ es un caso particular de la distribución gamma, describe el tiempo hasta la primera ocurrencia de un evento, tiene una aplicación importante en situaciones donde se aplica el proceso de Poisson.

Tiene un lugar importante tanto en teoría de colas como en problemas de confiabilidad.

El tiempo entre las llegadas en las instalaciones de servicios y el tiempo de fallos en los componentes eléctricos y electrónicos frecuentemente están relacionados con la distribución exponencial. Con aplicación importante en biometría (estudio de las leyes probabilísticas que gobiernan la mortalidad humana) y cuestiones actuariales.

Una característica de la distribución exponencial es su FALTA DE MEMORIA: La probabilidad de que un individuo de edad t sobreviva x años más, hasta la edad $t+x$, es la misma que tiene un recién nacido de sobrevivir hasta la edad x.
Generalmente, el tiempo transcurrido desde cualquier instante t_0 hasta que ocurre el evento, no depende de lo que haya ocurrido antes del instante t_0.

La perdida de memoria se refleja mediante la expresión:

$$P\left[X \geq x+h \mid X \geq x\right] = \frac{P\left[X \geq x+h\right]}{P\left[X \geq x\right]} = \frac{e^{-\lambda(x+h)}}{e^{-\lambda x}} = e^{-\lambda h} = P\left[X \geq h\right]$$

DISTRIBUCIÓN GAMMA

Se dice que una variable aleatoria absolutamente continua X sigue una *distribución Gamma de parámetros* α y λ, si la v.a. X describe *el tiempo transcurrido hasta el* α *- ésimo suceso de Poisson*.

Una variable aleatoria Gamma de parámetros α y λ se denota por $\gamma(\alpha, \lambda)$ con $\alpha > 0$ y $\lambda > 0$, donde el parámetro λ es el número medio de sucesos de Poisson por unidad de tiempo.

La función de densidad: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\, x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \qquad X \sim \gamma(\alpha, \lambda)$

La función $\Gamma(\alpha)$ se denomina *función gamma de Euler* y se define como la integral impropia para todo $\alpha > 0$, dada por

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx \qquad \text{siendo } \Gamma(\alpha) = (\alpha-1)! \quad \forall \alpha \in N$$

La esperanza matemática, varianza y desviación típica de la v.a. $X \sim \gamma(\alpha, \lambda)$ es:

$$\mu_X = E(X) = \frac{\alpha}{\lambda} \qquad \sigma_X^2 = \frac{\alpha}{\lambda^2} \qquad \sigma_X = \frac{\sqrt{\alpha}}{\lambda}$$

La variable aleatoria gamma $\gamma(\alpha, \lambda)$ describe el tiempo hasta que ocurre el suceso α en un proceso de Poisson de intensidad λ. Esto es, la suma de α variables aleatorias independientes de distribución exponencial con parámetro λ

🕮 La distribución exponencial es un caso particular de la distribución gamma con parámetro $\alpha = 1$:

$$\overbrace{f(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\, x^{\alpha-1}\, e^{-\lambda x}}^{X\sim\gamma(\alpha,\lambda)} \quad \xrightarrow{\alpha=1} \quad \overbrace{f(x) = \lambda\, e^{-\lambda x}}^{X\sim Exp(\lambda)} \qquad X \sim Exp(\lambda) = \gamma(1, \lambda)$$

🕮 Si $X_1, X_2, \cdots, X_n$ son n variables aleatorias independientes distribuidas según $N(0,1)$. La nueva variable aleatoria $Y = X_1^2, X_2^2, \cdots, X_n^2$ sigue una distribución $\gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

En consecuencia, la distribución Chi-cuadrado es una distribución Gamma cuando $\alpha = \frac{n}{2}$ y $\lambda = \frac{1}{2}$, tal que $X \sim \chi^2 = \gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$

🕮 Cuando el parámetro α es entero, la distribución $\gamma(\alpha, \lambda)$ se conoce como distribución de Erlang.

La distribución gamma se suele utilizar en intervalos de tiempo entre dos fallos de un motor. Intervalos de tiempo entre dos llegadas de automóviles a una gasolinera. Tiempos de vida de sistemas electrónicos. Análisis de la distribución de la renta.

DISTRIBUCIÓN BETA

Se dice una variable aleatoria absolutamente continua X sigue una *distribución Beta de parámetros* α y β, con $\alpha > 0$ y $\beta > 0$, y se denota como $X \sim \beta(\alpha, \beta)$, si la función de densidad de la v.a. X viene definida por

$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha).\Gamma(\beta)}\, .\, x^{\alpha-1}.\, (1-x)^{\beta-1} \qquad x \in (0,1)$$

Esperanza matemática de la v.a. $X \sim \beta(\alpha, \beta)$: $E\left[X\right] = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$

Varianza v.a. $X \sim \beta(\alpha, \beta)$: $\sigma^2 = Var(X) = \frac{\alpha.\beta}{(\alpha+\beta)^2.(\alpha+\beta+1)}$

Como casos particulares de la distribución Beta se tiene:

- Sí $\alpha = 1$ y $\beta = 1 \mapsto f(x) = 1$ sí $0 < x < 1 \Rightarrow X \sim U\left[0,1\right]$

- Sea $X \sim \beta(\alpha, \beta) \quad \mapsto \quad 1 - X \sim \beta(\beta, \alpha)$

La función $\beta(\alpha, \beta)$ se denomina *función Beta de Euler* y se define como la integral impropia para todo $\alpha > 0$ y $\beta > 0$, dada por

$$\beta(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}.\,(1-x)^{\beta-1}\,dx \quad \text{siendo} \quad \beta(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha).\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

Algunas características de interés para el cálculo de $\beta(\alpha, \beta)$ son:

- Simetría: $\beta(\alpha, \beta) = \beta(\beta, \alpha)$
- Con el cambio $x = \text{sen}^2\,t$ se tiene: $\beta(\alpha, \beta) = 2\int_0^{\pi/2} (\text{sen}\,t)^{2\alpha-1}.\,(\cos t)^{2\beta-1}\,dt$
- Con el cambio $x = \dfrac{t}{1+t}$ se tiene: $\beta(\alpha, \beta) = \int_0^{\infty} \dfrac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}}\,dt$

DISTRIBUCIÓN de CAUCHY

Se dice que una variable aleatoria absolutamente continua X sigue *una distribución de Cauchy con parámetro de escala $\mu > 0$* y *parámetro de localización $\theta \in \mathbb{R}$*, y se denota como $X \sim C(\mu, \theta)$, si su función de densidad viene dada tal que

$$f(x) = \frac{\mu}{\pi\left[\mu^2 + (x-\theta)^2\right]} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

La esperanza y la varianza de la v.a. X con distribución de Cauchy no existen.

La función característica de la v.a. $X \sim C(\mu, \theta)$ de parámetros μ y θ viene dada por

$$\rho(t) = E\left[e^{itX}\right] = e^{it\theta}\,e^{-\mu|t|} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Como casos particulares de la distribución de Cauchy, se tiene:

- Sí $\mu = 1$ y $\theta = 0 \Rightarrow X \sim C(0, 1)$ con $f(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)} \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $X \sim C(\mu, \theta) \Leftrightarrow \dfrac{X-\theta}{\mu} \sim C(1, 0)$

Universidad Autónoma de Madrid

Estadística Teórica
Facultad Ciencias Económicas y Empresariales
Departamento de Economía Aplicada
Profesor: Santiago de la Fuente Fernández