Universidad Autónoma de Madrid

Gestión Aeronáutica: Estadística Teórica
Facultad Ciencias Económicas y Empresariales
Departamento de Economía Aplicada
Profesor: Santiago de la Fuente Fernández

Aprende fácil estadística aplicada con SPSS

Adquiere destrezas y habilidades para realizar diagnósticos

Hoja nº ....

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....

Al analizar datos medidos por una variable cuantitativa, las pruebas estadísticas de estimación y contraste frecuentemente empleadas se basan en suponer que se han obtenido de una distribución de probabilidad de tipo normal.

En muchas ocasiones esta suposición no es válida, y en otras por tratarse de muestras pequeñas se sospecha que no es adecuada la suposición.

En estos casos se recurre a dos posibles mecanismos: Los datos se pueden *transformar* de forma que sigan una distribución normal, o bien se puede acudir a pruebas estadísticas que no se basan en ninguna suposición en cuanto a la distribución de probabilidad a partir de la que fueron obtenidos, motivo por el que se denominan *pruebas no paramétricas*.
Mientras que las pruebas que suponen una distribución de probabilidad determinada se denominan *pruebas paramétricas*.

- **Las *pruebas paramétricas* más habituales se basan en la distribución de *probabilidad normal*, y al estimar los parámetros del modelo se supone que los datos constituyen una muestra aleatoria de esa distribución, por lo que la elección del estimador y el cálculo de la precisión de la estimación, elementos básicos para elaborar intervalos de confianza y contrastar hipótesis, dependen del modelo probabilístico supuesto.**

Un procedimiento estadístico es *robusto* cuando es poco sensible a alteraciones en el modelo probabilístico supuesto, es decir, cuando los resultados obtenidos son aproximadamente válidos cuando éste varía.

Las inferencias en cuando a las medias son en general robustas, por lo que si el tamaño de la muestra es grande, los intervalos de confianza y contrastes basados en la *t de Student* son aproximadamente válidos, con independencia de la verdadera distribución de probabilidad de los datos. Si ésta distribución no es normal, los resultados de la estimación serán poco precisos.

PROCEDIMIENTOS PARA AJUSTAR DATOS A UNA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD: Los más utilizados son el contraste Chi-cuadrado de Pearson, la prueba de Kolmogorov-Smirnov y la prueba de Shapiro-Wilks.

✓ **CONTRASTE CHI-CUADRADO DE PEARSON: La idea del contraste es sencilla, se agrupan los datos en *k clases* $(k \geq 5)$ como si se fuera a construir un histograma, cubriendo todo el rango posible de valores.**

Es deseable disponer del mismo número de datos en cada clase y al menos de tres datos en cada clase.

Denotando por n_i al número de datos observados en la clase $i-$ésima, mediante el modelo de probabilidad que se desea verificar se calcula la probabilidad p_i asignada en cada clase. En consecuencia, para una muestra de n datos, la frecuencia esperada según ese modelo de probabilidad es $e_i = n \, . \, p_i$

El índice de discrepancia entre las frecuencias observadas n_i y las esperadas e_i que es previsible encontrar si el modelo fuera el adecuado viene determinado por $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{(n_i - e_i)^2}{e_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{n_i^2}{e_i} - n$

que se distribuye aproximadamente como una Chi-cuadrado si el modelo es correcto.

Si el modelo se especifica de forma completa con las probabilidades p_i, conocidas antes de tomar los datos, el número de grados de libertad es $(k-1)$.
Cuando se han estimado p parámetros del modelo a partir de los datos, el número de grados de libertad son $(k-p-1)$

✓ **PRUEBA DE KOLMOGOROV-SMIRNOV:** Contraste válido únicamente para variables continuas, compara la función de distribución (probabilidad acumulada) teórica con la observada.

Calcula un valor de discrepancia, denotado habitualmente como D, que corresponde a la discrepancia máxima en valor absoluto entre la distribución observada y la distribución teórica, proporcionando un valor de probabilidad p_i que corresponde, si se esta verificando un ajuste a la distribución normal, a la probabilidad de obtener una distribución que discrepe tanto como la observada si verdaderamente se hubiera obtenido una muestra aleatoria (de tamaño n) de una distribución normal.

Si la probabilidad p_i es grande se acepta que los datos obtenidos proceden de una distribución normal.

Cuando la probabilidad p_i es muy pequeña no es aceptable suponer que los datos observados proceden de una distribución normal.

✓ **PRUEBA DE SHAPIRO-WILKS:** Prueba recomendada para el ajuste de los datos observados a una distribución normal, sobre todo cuando la muestra es pequeña $(n < 30)$

Mide el ajuste de la muestra a una recta al dibujarla en papel probabilístico normal. Este tipo de representación viene en programas de estadística, de manera que permite además apreciar el ajuste o desajuste de forma visual.

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....

SOLUCIONES CUANDO SE RECHAZA LA HIPÓTESIS DE NORMALIDAD

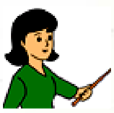
- **Cuando la distribución de los datos observados es más apuntada que la normal (leptocúrtica), cuando el coeficiente de curtosis $g_2 = \frac{m_4}{\sigma^4} - 3 > 0$, donde $m_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x})^2 = \sigma^2$ $m_4 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x})^4$, la solución puede ser emplear *pruebas no paramétricas*.**

- **Si la distribución es unimodal y asimétrica: $M_d \leq M_e \leq \overline{x}$ (asimetría a la derecha o positiva) ó $\overline{x} \leq M_e \leq M_d$ (asimetría a la izquierda o negativa), la solución más efectiva suele ser utilizar una *transformación* de los datos para convertirlos en normales.**

- **Si la distribución no es unimodal la utilización de transformación de datos y los métodos no paramétricos pueden no ser útiles.**

- **Una alternativa a los métodos paramétricos y a las pruebas no paramétricas clásicas puede ser utilizar la metodología de *estimación autosuficiente* (no utiliza más que los valores observados en la muestra).**

SPSS: Analizar/Pruebas no paramétricas/Chi-cuadrado_ Exactas _ Monte Carlo



TRANSFORMAR DATOS OBSERVADOS EN DATOS NORMALES

La utilización de transformaciones para lograr que los datos observados se ajusten a una distribución normal es la *solución natural* en muchas ocasiones, ya que existen gran número de parámetros que tienen una distribución asimétrica. Entre las distintas transformaciones:

- **La transformación logarítmica $Ln\,x$ convierte distribuciones observadas en aproximadamente simétricas. Se presentan problemas con la transformación si la variable toma el valor 0, o si existen valores muy pequeños, en esos casos, será adecuada la transformación $Ln(x+1)$.**

Está indicada la transformación logarítmica cuando la desviación típica de los datos es proporcional a la media o cuando el efecto de los factores es multiplicativo, en lugar de aditivo.

- **La transformación $\sqrt{x}$ cuando las varianzas son proporcionales a la media. Ocurre con frecuencia cuando los datos observados provienen de una distribución de Poisson.**

- **La transformación $(1/x)$ que precisa sumar una cantidad a cada valor cuando la variable toma el valor 0.**

Asignatura .... Grupo ....

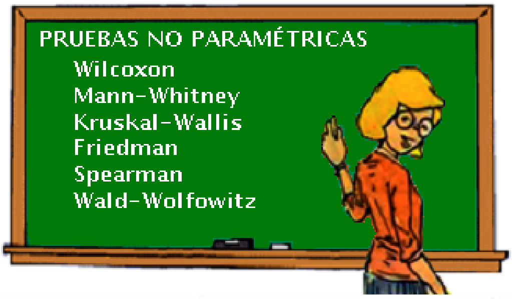
Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....

- **La transformación x^2 cuando la concentración de los datos observados se encuentra a la derecha y la cola a la izquierda, comprime la escala para valores pequeños y la expande para valores altos.**

- **La transformación *(arc sen* $\sqrt{p}$ *)* cuando los datos son proporcionales o porcentajes de una distribución binomial, en este caso las diferencias con una distribución normal son más acusadas para valores pequeños o grandes de las proporciones.**

Los valores transformados se utilizan para los cálculos estadísticos basados en la teoría normal, para la presentación de resultados se efectuará la transformación inversa para que aparezcan en su escala de medida natural.



Pruebas no paramétricas son aquellas que no presuponen una distribución de probabilidad para los datos observados. En la mayor parte de los resultados estadísticos se derivan únicamente a partir de procedimientos de ordenación y recuento.

Conviene utilizar *pruebas no paramétricas* cuando se trabaja con muestras pequeñas $(n < 10)$ en las que se desconoce si es válido suponer la normalidad de los datos, también para corroborar los resultados obtenidos a partir de la utilización basada en la distribución normal.

✓ **PRUEBA DE WILCOXON DE CONTRASTE DE SIGNOS DE LA MEDIANA: Permite calcular los datos observados con una mediana teórica. Se utiliza como alternativa de la *prueba t de Student* cuando no se puede suponer la normalidad de las muestras.**
Se aplica cuando la variable subyacente es continua pero no se presupone ningún tipo de distribución particular.

Es una prueba de comparación de dos muestras relacionadas y por lo tanto no necesita una distribución específica. Usa más bien el nivel ordinal de la variable dependiente.
Se utiliza para comparar dos mediciones relacionadas y determinar si la diferencia entre ellas se debe al azar o no (en este último caso, que la diferencia sea estadísticamente significativa).

✓ **PRUEBA U DE MANN-WHITNEY (también conocida como Mann-Whitney-Wilcoxon WMW): Contrasta si dos muestras proceden de poblaciones equidistribuidas. Es una prueba muy utilizada, alternativa a la prueba paramétrica t de Student bimuestral.**

El test se fundamenta en la idea: **Si dos muestras comparadas proceden de la misma población, al juntar todas las observaciones y ordenarlas de menor a mayor, cabría esperar que las observaciones de una y otra muestra estuviesen intercaladas aleatoriamente.**
Por el contrario, si una de las muestras pertenece a una población con valores mayores o menores que la otra población, al ordenar las observaciones, estas tenderán a agruparse de modo que las de una muestra queden por encima de las de la otra muestra.

En esta línea, la *prueba de Mann-Whitney* contrasta que la probabilidad de que una observación de la población X supere a una observación de la población Y es igual a la probabilidad de que una observación de la población Y supere a una observación de la población X.

Es habitual encontrar que la *prueba de Mann-Whitney* compara medianas, afirmación que solo es cierta cuando las poblaciones comparadas difieren únicamente en su localización, pero el resto de características (dispersión, asimetría, etc) son iguales.

Al igual que ocurre con muchas pruebas no paramétricas, la *prueba de Mann-Whitney* es menos potente que el *test t de Student* (tiene menos probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando realmente es falsa) ya que ignora valores extremos. En los *tests t de Student* al trabajar con medias tienen en cuenta los valores extremos. Esto hace que la prueba de *Mann-Whitney* sea más robusta que los *tests t de Student*, concretamente la perdida de potencia es del 5%.

Condiciones necesarias de la prueba de Mann-Whitney:
a) No es necesario aumir que las muestras se distribuyen de una forma normal o que proceden de poblaciones normales.
b) Los datos tienen que ser independientes.
c) Los datos tienen que ser ordinales o bien se tienen que poder ordenar de menor a mayor.
d) Igualdad de varianzas entre grupos (homocedasticidad).
e) Si compara medianas, ambas muestras han de tener el mismo tipo de distribución: dispersión, asimetría, etc.

Existen otras *pruebas no paramétricas*, entre las más habituales:

- **Prueba de Kruskal-Wallis para comparar k muestras**
- **Prueba de Friedman para comparar k muestras pareadas (bloques)**
- **Coeficiente de correlación de Spearman para rangos**
- **Prueba de rachas de Wald-Wolfowitz**

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura.. Grupo..............................
Apellidos .... Nombre..............................
Ejercicio del día ....

(IMPRESO EN PAPEL RECICLADO) UNICAMENTE PARA USO ESCOLAR

ESTADÍSTICA TEÓRICA - PRÁCTICAS SPSS

CONTRASTE DE NORMALIDAD

Cuando los datos no están agrupados y el tamaño muestral es pequeño, no se utiliza el test χ^2 de Pearson de bondad de ajuste, sino los contrastes de normalidad de Lilliefors y de Shapiro-Wilk.
En ninguno de estos dos contrastes se especifican los parámetros poblacionales en la hipótesis de normalidad.

✓ ***El Contraste de normalidad de Lilliefors plantea las hipótesis:***

H_0: La muestra procede de una distribución normal con media y desviación típica desconocidas
H_1: La muestra no procede de una distribución normal
Cuando $p\_valor > \alpha$ se acepta la hipótesis nula de normalidad

✓ ***El Contraste de normalidad de Shapiro-Wilk plantea las hipótesis:***

H_0: $F(x)$ es la función de distribución normal (la muestra procede de una población normal)
H_1: $F(x)$ no es la función de distribución normal (la muestra no procede de una población normal)
Si $p\_valor > \alpha$ se acepta la hipótesis nula de que la muestra procede de una población normal

SPSS: Analizar/Estadísticos descriptivos/Explorar → Gráficos/Gráficos con pruebas de normalidad
Visor de datos: Estadístico de Kolmogorov-Smirnov con corrección de significación de Lilliefors
Estadístico de Shapiro-Wilk

CONTRASTE HOMOGENEIDAD DE VARIANZAS

Para evaluar si las muestras se han extraído de poblacionales con varianzas iguales (homogeneidad de varianzas o homocedasticidad) se utiliza la prueba de Levene.

✓ ***Prueba de homogeneidad de varianzas de Levene plantea las hipótesis:***

H_0: La muestras se han extraído de poblaciones con varianzas iguales
H_1: La muestras se han extraído de poblaciones con varianzas distintas
Cuando el $p\_valor > \alpha$ se asume la hipótesis nula de igualdad de varianzas

SPSS: Analizar/Comparar medias/Prueba T para muestras independientes
Cuando el $p\_valor > \alpha$ se asume la hipótesis nula de igualdad de varianzas

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....

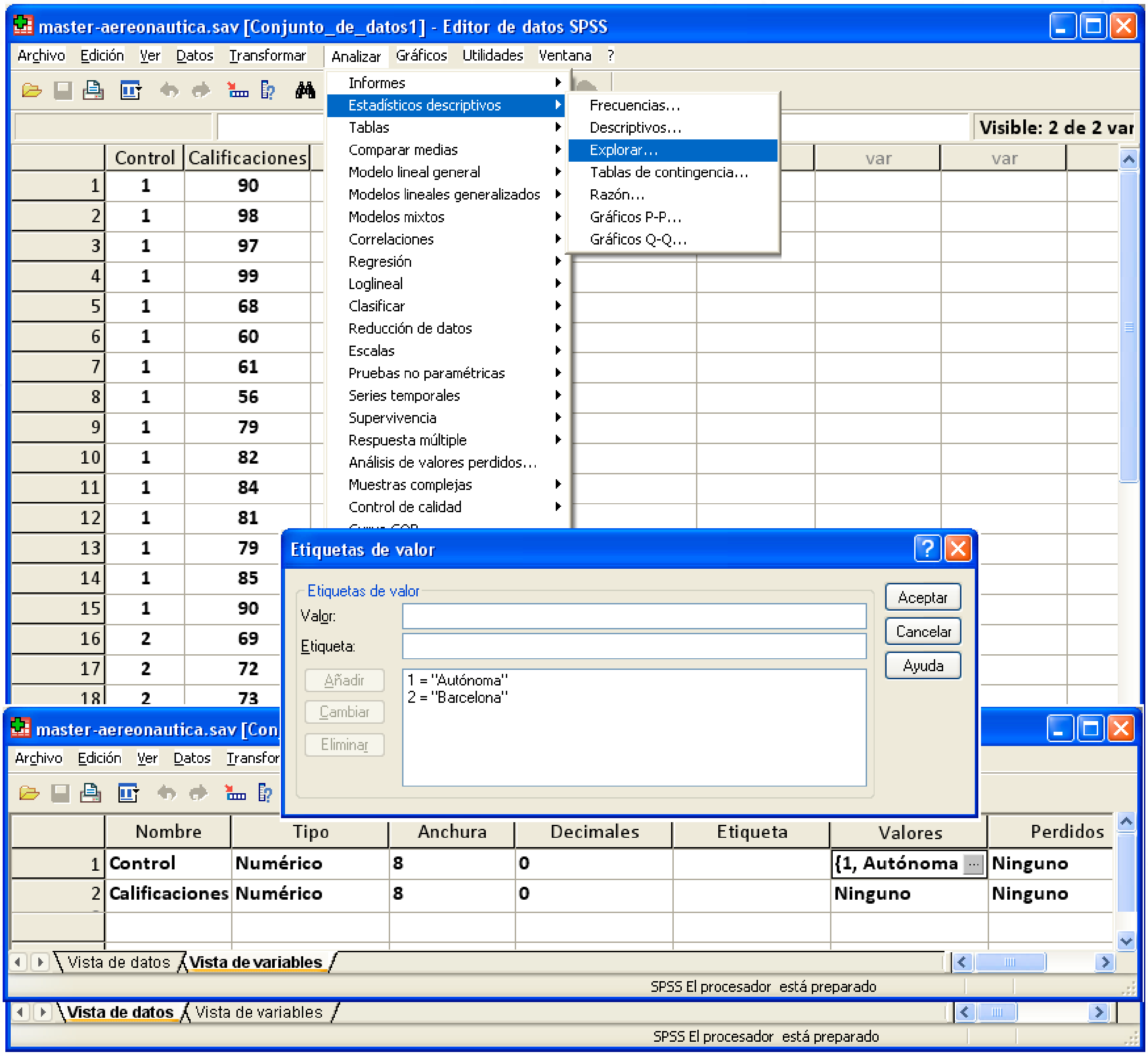
Se han recogido calificaciones de una muestra de alumnos de un máster de Gestión Aeronáutica en dos Universidades, obteniendo:

Madrid	90	98	97	99	68	60	61	56	79	82	84	81	79	85	90
Barcelona	69	72	73	75	62	60	85	96	95	80	96	98	78	79	67

a) Construir un intervalo de confianza para la diferencia de medias poblacionales con un nivel de significación del 5%

b) Contrastar con $\alpha = 0{,}05$ los datos obtenidos en la Universidad Autónoma sabiendo que la puntuación media en los masteres de Gestión es de 74 puntos

Antes de construir un intervalo de confianza se debe verificar si las muestras proceden de dos distribuciones normales $N(\mu_{Madrid}, \sigma_{Madrid})$ y $N(\mu_{Barcelona}, \sigma_{Barcelona})$. Para ello, se procede a efectuar la prueba de normalidad de Lilliefors.



UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....

Descriptivos

	Control			Estadístico	Error típ.
Calificaciones	Autónoma	Media		80,60	3,584
$72,91 \leq \mu_{Madrid} \leq 88,29$		Intervalo de confianza para la media al 95%	Límite inferior	72,91	
			Límite superior	88,29	
		Media recortada al 5%		80,94	
		Mediana		82,00	
		Varianza		192,686	
		Desv. típ.		13,881	
		Mínimo		56	
		Máximo		99	
		Rango		43	
		Amplitud intercuartil		22	
		Asimetría		-,477	,580
		Curtosis		-,768	1,121
	Barcelona	Media		79,00	3,257
$72,01 \leq \mu_{Barcelona} \leq 85,99$		Intervalo de confianza para la media al 95%	Límite inferior	72,01	
			Límite superior	85,99	
		Media recortada al 5%		79,00	
		Mediana		78,00	
		Varianza		159,143	
		Desv. típ.		12,615	
		Mínimo		60	
		Máximo		98	
		Rango		38	
		Amplitud intercuartil		26	
		Asimetría		,241	,580
		Curtosis		-1,111	1,121

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

Pruebas de normalidad

	Control	Kolmogorov-Smirnov[a] n > 50			Shapiro-Wilk n ≤ 50		
		Estadístico	gl	Sig.	Estadístico	gl	Sig.
Calificaciones	Autónoma	,187	15	,164	,925	15	,233
	Barcelona	,164	15	,200*	,928	15	,257

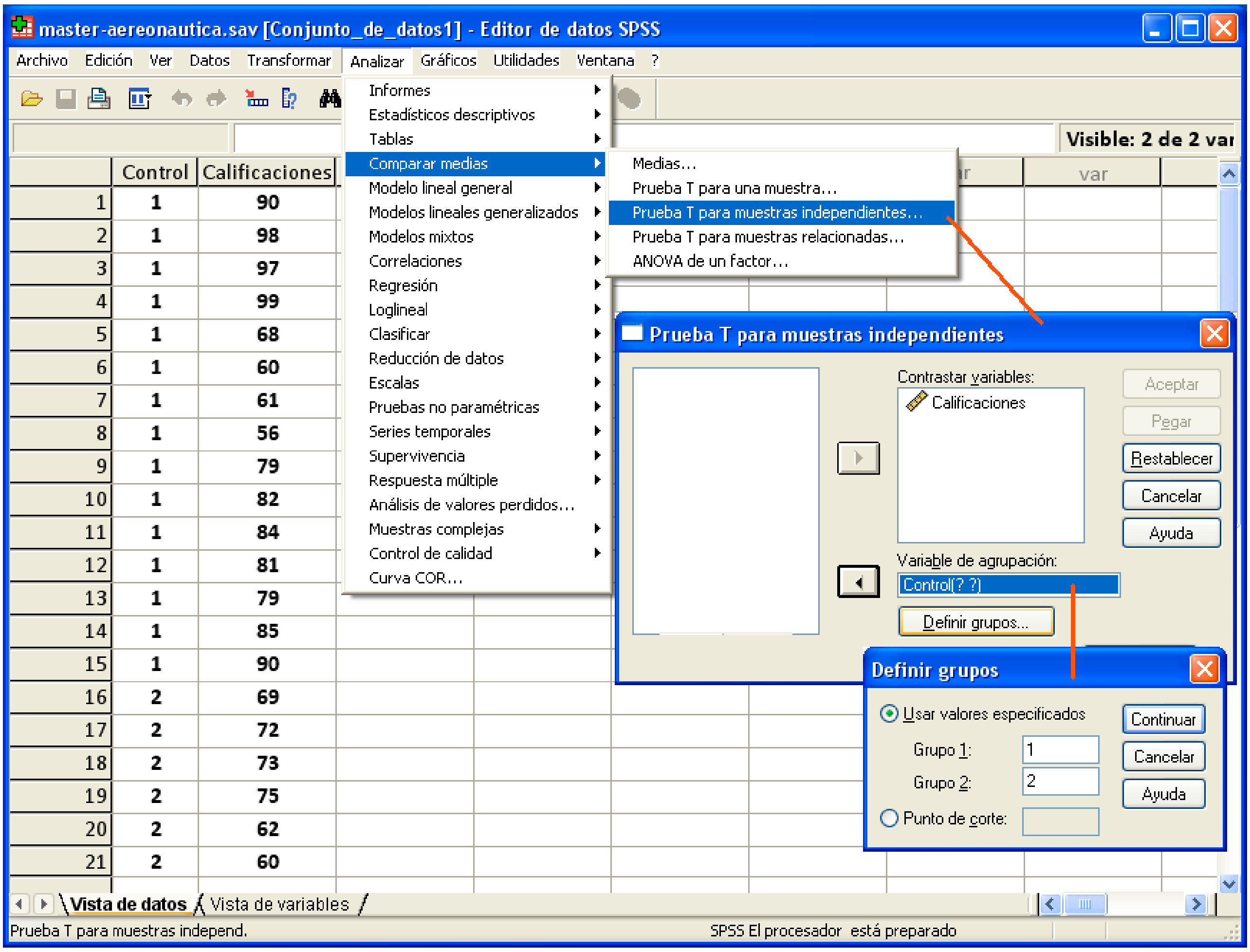
*. Este es un límite inferior de la significación verdadera.

a. Corrección de la significación de Lilliefors

En las dos Pruebas las dos Universidades tienen un $p\_valor(Sig.) > 0,05$ con lo que se acepta la hipótesis nula que establece que las calificaciones en las Universidades proceden de distribuciones normales.

Hay que construir un intervalo de confianza para la diferencia de medias $(\mu_{Madrid} - \mu_{Barcelona})$ en el caso de poblaciones normales de varianzas σ^2_{Madrid}, $\sigma^2_{Barcelona}$ desconocidas (se desconoce si son iguales o distintas) y muestras pequeñas $n_{Madrid} + n_{Barcelona} = 30$

Se necesitar realizar una Prueba de homogeneidad de varianzas o homocedasticidad para dilucidar si las varianzas son iguales o distintas. Para ello, se utiliza la Prueba de Levene:



UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

Estadísticos de grupo

	Control	N	Media	Desviación típ.	Error típ. de la media
Calificaciones	Autónoma	15	80,60	13,881	3,584
	Barcelona	15	79,00	12,615	3,257

$$\bar{x}_{\text{Autónoma}} = 80{,}60 \quad s_{\text{Autónoma}} = 13{,}881 \quad \in = \text{Error típico media} = \frac{s_{\text{Autónoma}}}{\sqrt{n}} = \frac{13{,}881}{\sqrt{15}} = 3{,}5840$$

$$I(\mu_{\text{Autónoma}}) = \left[\bar{x}_{\text{Autónoma}} \pm t_{0{,}025\,,\,14}\,.\in\right] = \left[80{,}60 \pm 2{,}145\,.\,3{,}584\right] = \left[72{,}912\,,\,88{,}287\right]$$

$$\bar{y}_{\text{Barcelona}} = 79 \quad s_{\text{Barcelona}} = 12{,}615 \quad \in = \text{Error típico media} = \frac{s_{\text{Barcelona}}}{\sqrt{n}} = \frac{12{,}615}{\sqrt{15}} = 3{,}257$$

$$I(\mu_{\text{Barcelona}}) = \left[\bar{y}_{\text{Barcelona}} \pm t_{0{,}025\,,\,14}\,.\in\right] = \left[79 \pm 2{,}145\,.\,3{,}257\right] = \left[71{,}013\,,\,85{,}986\right]$$

Prueba de muestras independientes

		Prueba de Levene para la igualdad de varianzas		Prueba T para la igualdad de medias ($t = \frac{\text{Diferencia de medias}}{\in}$; $\text{Longitud Intervalo} = 2\,.\,t_{\alpha/2,\,n_1+n_2-2}\,.\in$)						
									95% Intervalo de confianza para la diferencia	
		F	Sig.	t	gl	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	Error típ. de la diferencia	Inferior	Superior
Calificaciones	Se han asumido varianzas iguales	,048	,829	,330	28	,744	1,600	4,843	-8,321	11,521
	No se han asumido varianzas iguales			,330	27,748	,744	1,600	4,843	-8,325	11,525

$$\in = s_p\,.\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$$

El estadístico F de Levene acepta la hipótesis nula de que las muestras se han extraído de dos poblaciones con varianzas iguales cuando p_valor (Sig.) $> \alpha$

p_valor (Sig.) $= 0{,}829 > 0{,}05 \rightarrow$ Se acepta la igualdad de varianzas poblacionales

La prueba también puede ser utilizada como una prueba principal para responder a una pregunta independiente de sí dos sub-muestras en una población dada tienen varianzas iguales o diferentes.

Los test de la F de Snedecor son bastantes robustos ante las desviaciones de la normalidad y tienen efectos diferentes sobre las estimaciones de significación (α, Error Tipo I) dependiendo de si hay desviaciones por sesgo (simetría) y curtosis (apuntamiento).

El sesgo tiene poco efecto sobre la significación, incrementando levemente el Error tipo I.
La curtosis tiene un efecto más marcado sobre el estadístico F: Cuando el coeficiente $g_2 = \frac{m_4}{\sigma^4} - 3 > 0$ el estdístico F tiende a ser menor de lo que debería (incrementa el Error Tipo II: Acepta la hipótesis nula cuando de hecho es falsa)

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....

Si $g_2 = \frac{m_4}{\sigma^4} - 3 < 0$ el estadístico F tiende a ser mayor de lo que debería (incrementa el Error Tipo I: Rechaza la hipótesis nula cuando de hecho es cierta)

Cuando la prueba de Levene muestra significación, se debe cambiar a pruebas generalizadas (pruebas no paramétricas), libre de supuestos de homocedasticidad.

A la vista de la Prueba de muestras independientes ...

- **El intervalo de confianza $-8,321 \leq \mu_{Madrid} - \mu_{Barcelona} \leq 11,521$ cubre el 0, lo que indica que no existe diferencia significativa en las puntuaciones del máster en las dos Universidades.**
- **El $p\_valor = 0,744 > 0,05 = \alpha$ por lo que se acepta la hipótesis nula $H_0: \mu_{Madrid} = \mu_{Barcelona}$ de igualdad de medias poblacionales.**

$$\text{Diferencia medias} = \overline{x}_{Madrid} - \overline{y}_{Barcelona} = 80,6 - 79 = 1,6$$

$$\text{Estadístico contraste } t = \frac{\left|\overline{x}_{Madrid} - \overline{y}_{Barcelona}\right|}{\in} = \frac{1,6}{4,843} = 0,330$$

$$\alpha_p = p\_valor\ (\text{Sig.bilateral}) = P\left[\left|t_{28}\right| > 0,330\right] = 2\,.\,P\left[t_{28} > 0,330\right] = 0,744$$

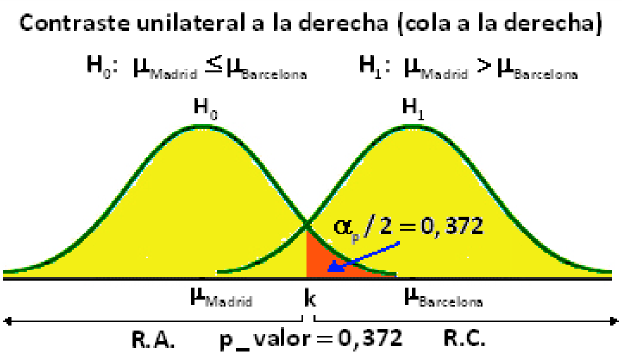
$$\text{Longitud Intervalo} = 11,521 - (-8,321) = 19,842 = 2\,.\,t_{0,025\,,\,28}\,.\in\, = 2\,.\,t_{0,025\,,\,28}\,.\,4,843$$

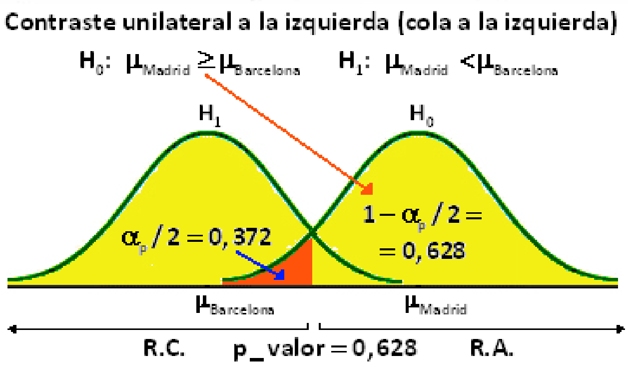
$$t_{0,025\,,\,28} = \frac{19,842}{2\,.\,4,843} = 2,048$$

$$\in = \text{Error típico diferencias} = 4,843 = s_p\,.\sqrt{\frac{1}{15} + \frac{1}{15}} \;\rightarrow\; s_p = \frac{4,843}{\sqrt{\frac{1}{15} + \frac{1}{15}}} = 13,2632$$

SPSS estudia el contraste bilateral o de dos colas.

Para resolver contrastes unilaterales o de una cola hay que dividir el $p\_valor \equiv$ Sig.bilateral entre 2 , considerando si la cola es a la derecha o a la izquierda.





Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....

✓ Sea la variable aleatoria $X \equiv$ Calificaciones en el máster U. Autónoma Madrid

Madrid $\equiv x_i$	90	98	97	99	68	60	61	56	79	82	84	81	79	85	90

$$\alpha_1 = \bar{x} = \frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15} x_i = \frac{1209}{15} = 80,6 \qquad \alpha_2 = \frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15} x_i^2 = \frac{100143}{15} = 6676,2$$

$$\sigma^2_{Madrid} = \alpha_2 - \alpha_1^2 = 6676,2 - 80,6^2 = 179,84 \qquad s^2_{Madrid} = \frac{n_{Madrid} \cdot \sigma^2_{Madrid}}{n_{Madrid} - 1} = \frac{15 \cdot 179,84}{14} = 192,6857$$

✓ Sea la variable aleatoria $Y \equiv$ Calificaciones en el máster U. Autónoma Barcelona

Barcelona $\equiv y_j$	69	72	73	75	62	60	85	96	95	80	96	98	78	79	67

$$\alpha_1 = \bar{y} = \frac{1}{15}\sum_{j=1}^{15} y_j = \frac{1185}{15} = 79 \qquad \alpha_2 = \frac{1}{15}\sum_{j=1}^{15} y_i^2 = \frac{95843}{15} = 6389,53$$

$$\sigma^2_{Barcelona} = \alpha_2 - \alpha_1^2 = 6389,53 - 79^2 = 148,53 \qquad s^2_{Barcelona} = \frac{n_{Barcelona} \cdot \sigma^2_{Barcelona}}{n_{Barcelona} - 1} = \frac{15 \cdot 148,53}{14} = 159,1429$$

✓ Intervalo de confianza para la razón de varianzas de dos poblaciones normales:

$$I(\sigma^2_{Madrid} / \sigma^2_{Barcelona}) = \left[\frac{s^2_{Madrid} / s^2_{Barcelona}}{F_{0,025\,,\,14\,,\,14}} \,,\, \frac{s^2_{Madrid} / s^2_{Barcelona}}{F_{0,975\,,\,14\,,\,14}} \right]$$

$$I(\sigma^2_{Madrid} / \sigma^2_{Barcelona}) = \left[\frac{192,6857 / 159,1429}{2,554} \,,\, \frac{192,6857 / 159,1429}{0,3915} \right] = [0,474 \,,\, 3,092]$$

El intervalo cubre el 1 y se admite que las dos varianzas son iguales con un 95% de fiabilidad.

✓ Intervalo de confianza para la diferencia de medias poblacionales de dos distribuciones normales $(\mu_{Madrid} - \mu_{Barcelona})$ con tamaños muestrales pequeños y varianzas desconocidas pero iguales.

$$I(\mu_{Madrid} - \mu_{Barcelona}) = \left[(\bar{x} - \bar{y}) \pm t_{\alpha/2\,,\, n_1 + n_2 - 2} \cdot s_p \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \right]$$

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)\, s_1^2 + (n_2 - 1)\, s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{14 \cdot 192,6857 + 14 \cdot 159,1429}{28} = 175,9143 \;\rightarrow\; s_p = 13,2632$$

Error típico diferencia $\equiv s_p \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \;\rightarrow\; \in = 13,2632 \cdot \sqrt{\frac{1}{15} + \frac{1}{15}} = 4,8430 \qquad t_{0,025\,,\,28} = 2,048$

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....

Estadístico contraste: $t = \dfrac{|\overline{x} - \overline{y}|}{\in} = \dfrac{1{,}6}{4{,}8430} = 0{,}3304$

$$I(\mu_{Madrid} - \mu_{Barcelona}) = \left[(80{,}6 - 79) \pm 2{,}048 \,.\, 13{,}2632 \,.\, \sqrt{\frac{1}{15} + \frac{1}{15}} \right] = \left[-8{,}3185 \,,\; 11{,}5185 \right]$$

Cuando no se cumplen alguno de los supuestos de Normalidad y Homocedasticidad

- **Se eliminan valores extremos**
- **Transformar los datos**
- **Utilizar la prueba U de Mann-Whitney**

Que sea robusta quiere decir que mantiene la validez de los Errores Tipo I y de Tipo II aunque la muestra no se distribuya de forma normal

Si no se cumple el supuesto de Normalidad la Prueba t de Student es suficientemente robusta para aplicarla.

La prueba *U de Mann-Whitney* es una buena alternativa al *test t de Student* cuando no se cumplen los requisitos exigidos para la aplicación de tests paramétricos.

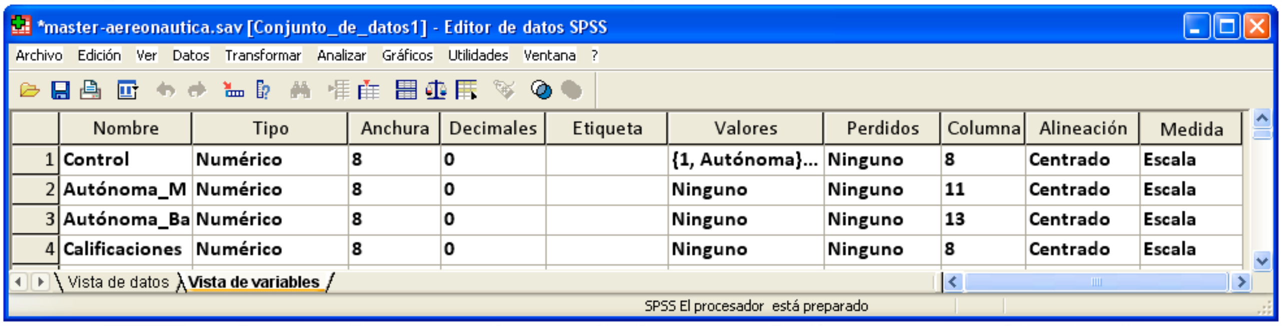
UAM UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... **Grupo** ....

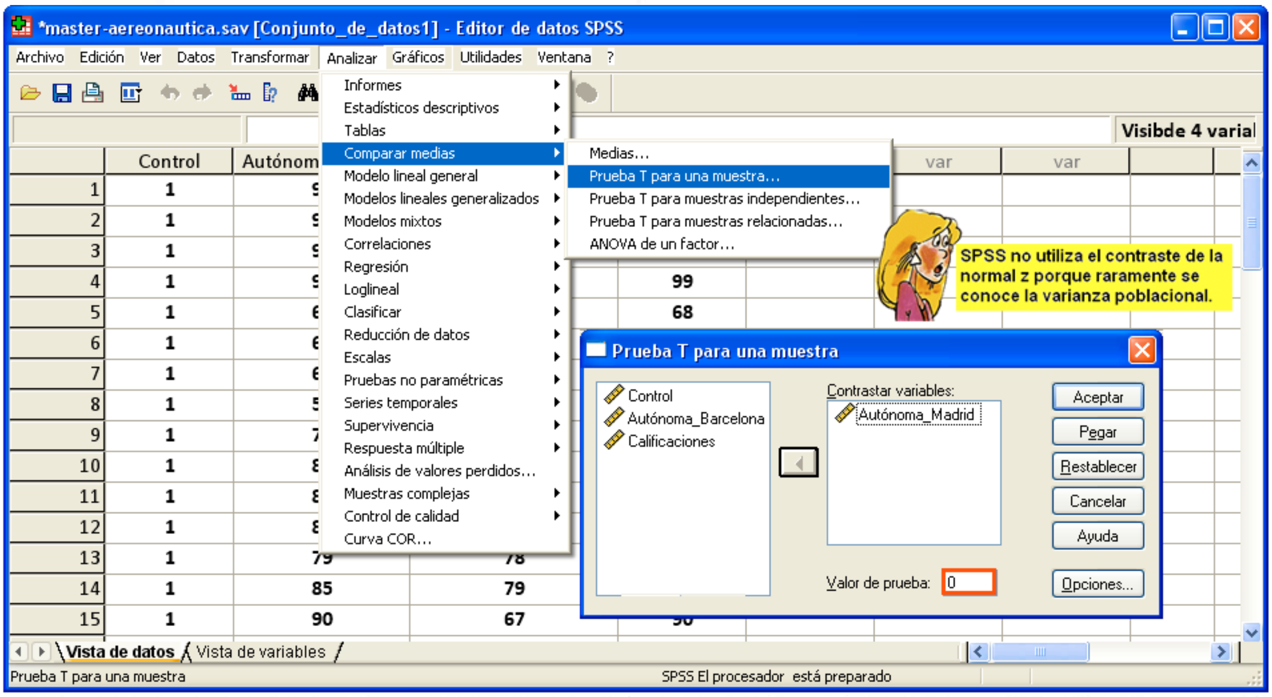
Apellidos .... **Nombre** ....

Ejercicio del día ....

✓ **Intervalo de confianza para la media poblacional del Grado de Gestión Aeronáutica de la Universidad Autónoma de Madrid.**



	Nombre	Tipo	Anchura	Decimales	Etiqueta	Valores	Perdidos	Columna	Alineación	Medida
1	Control	Numérico	8	0		{1, Autónoma}...	Ninguno	8	Centrado	Escala
2	Autónoma_M	Numérico	8	0		Ninguno	Ninguno	11	Centrado	Escala
3	Autónoma_Ba	Numérico	8	0		Ninguno	Ninguno	13	Centrado	Escala
4	Calificaciones	Numérico	8	0		Ninguno	Ninguno	8	Centrado	Escala



Contrastar con el nivel 0 es obtener solo un intervalo de confianza.

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....

Estadísticos para una muestra

	N	Media	Desviación típ.	Error típ. de la media
Autónoma_Madrid	15	80,60	13,881	3,584

Prueba para una muestra

	Intervalo confianza = Valor de prueba = 0				
				95% Intervalo de confianza para la diferencia	
	t	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	Inferior	Superior
Autónoma_Madrid	22,488	,000	80,600	72,91	88,29

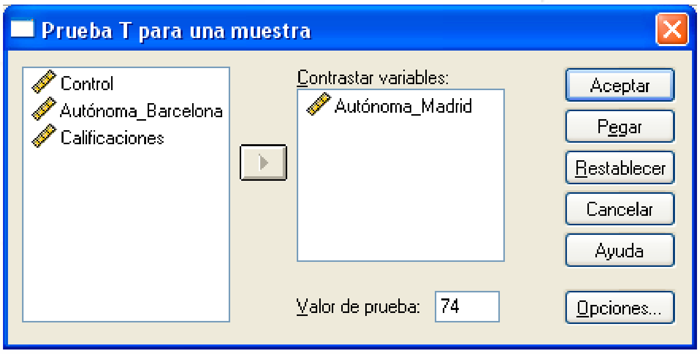
Intervalo de confianza: $I(\mu_{Madrid}) = \left[\overline{x} \pm t_{\alpha/2,\, n-1} \dfrac{s_{Madrid}}{\sqrt{n_{Madrid}}} \right]$ $\quad t_{0,025,\,14} = 2,145$

$$\alpha_1 = \overline{x} = \frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15} x_i = \frac{1209}{15} = 80,6 \qquad \alpha_2 = \frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15} x_i^2 = \frac{100143}{15} = 6676,2$$

$$\sigma^2_{Madrid} = \alpha_2 - \alpha_1^2 = 6676,2 - 80,6^2 = 179,84 \qquad s^2_{Madrid} = \frac{n_{Madrid}\,.\,\sigma^2_{Madrid}}{n_{Madrid} - 1} = \frac{15\,.\,179,84}{14} = 192,6857$$

Error típico de la media: $\in = \dfrac{s_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\dfrac{192,6857}{15}} = 3,5840$

Estadístico contraste: $t = \dfrac{|\overline{x} - \mu_0|}{s_x/\sqrt{n}} = \dfrac{|\overline{x} - 0|}{\in} = \dfrac{80,6}{3,5840} = 22,4888$



b) **Hipótesis nula** $H_0: \mu = 74$

Hipótesis alternativa $H_1: \mu \neq 74$

Se trata de un contraste bilateral o de dos colas.

Se acepta H_0 **si** $p\_valor(Sig.bilateral) > 0,05$

Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....

Estadísticos para una muestra

	N	Media	Desviación típ.	Error típ. de la media
Autónoma_Madrid	15	80,60	13,881	3,584

Prueba para una muestra

	Valor de prueba = 74					
					95% Intervalo de confianza para la diferencia	
	t	gl	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	Inferior	Superior
Autónoma_Madrid	1,841	14	,087	6,600	-1,09	14,29

$p\_valor\,(\text{Sig.bilateral}) = 0{,}087 > 0{,}05 \quad \rightarrow \quad$ Se acepta la hipótesis nula

Error típico de la media: $\in = \dfrac{s_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\dfrac{192{,}6857}{15}} = 3{,}5840$

Estadístico contraste: $t = \dfrac{|\bar{x} - \mu_0|}{s_x / \sqrt{n}} = \dfrac{|\bar{x} - \mu_0|}{\in} = \dfrac{|80{,}6 - 74|}{3{,}5840} = \dfrac{6{,}6}{3{,}5840} = 1{,}8415$

Intervalo de confianza:

$$I(\mu - 74) = \left[6{,}600 \ \pm \ t_{0{,}025,\,14} \,.\in\right] = \left[6{,}600 \ \pm \ 2{,}145\,.\,3{,}584\right] = \left[-1{,}087\ ,\ 14{,}287\right]$$

Como el intervalo de confianza cubre el 0 se admite la hipótesis nula.

Siendo la variable aleatoria $X \equiv$ Puntuación en el máster de Gestión Aeronáutica en UAM

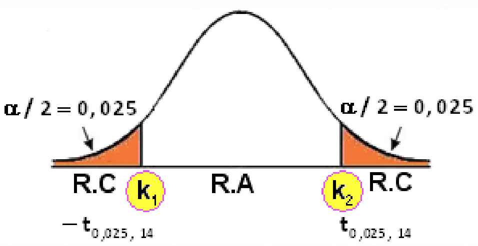
Se trata de un muestreo pequeño de la población normal con varianza desconocida.

En consecuencia, $\bar{x} \sim t_{n-1}\left(\mu\ ,\ \dfrac{s_x}{\sqrt{n}}\right)$

Como la hipótesis alternativa $H_1: \mu \neq 74$ en la decisión son válidos valores de μ tanto mayores o menores que 74 por lo que se trata de un contraste bilatreral o de dos colas.

Regla de decisión $\begin{cases} |\bar{x}| \leq k & \text{Se acepta } H_0 \\ |\bar{x}| > k & \text{Se rechaza } H \end{cases}$

o bien $\begin{cases} k_1 \leq \bar{x} \leq k_2 & \text{Se acepta } H_0 \\ \bar{x} < k_1 \text{ ó } \bar{x} > k_2 & \text{Se rechaza } H \end{cases}$



Bajo la hipótesis nula $H_0 : \mu = 74$ con los datos muestrales: $n = 15$, $\overline{x} = 80{,}6$, $s_x = 13{,}881$, $\in = 3{,}584$ se tiene $\overline{x} \sim t_{14}\left(74\,,\,3{,}584\right)$

$$\alpha = P\left[\text{Rechazar } H_0 \,\middle|\, H_0 \text{ Cierta}\right] = P\left[\overline{x} < k_1 \,\middle|\, t_{14}\left(74\,,\,3{,}584\right)\right] + P\left[\overline{x} > k_2 \,\middle|\, t_{14}\left(74\,,\,3{,}584\right)\right] =$$

$$= P\left[\frac{\overline{x}-74}{3{,}584} < \frac{k_1-74}{3{,}584}\right] + P\left[\frac{\overline{x}-74}{3{,}584} > \frac{k_2-74}{3{,}584}\right] = P\left[t_{14} < \frac{k_1-74}{3{,}584}\right] + P\left[t_{14} > \frac{k_2-74}{3{,}584}\right] = 0{,}025 + 0{,}025$$

$$P\left[t_{14} < \frac{k_1-74}{3{,}584}\right] = P\left[t_{14} > \frac{74-k_1}{3{,}584}\right] = 0{,}025 \;\rightarrow\; \frac{74-k_1}{3{,}584} = 2{,}145 \;\rightarrow\; k_1 = 66{,}3123$$

$$P\left[t_{14} > \frac{k_2-74}{3{,}584}\right] = 0{,}025 \;\rightarrow\; \frac{k_2-74}{3{,}584} = 2{,}145 \;\rightarrow\; k_2 = 81{,}6876$$

La media muestral observada $\overline{x} = 80{,}6$ se encuentra incluida en la región de aceptación $80{,}6 \in \left[66{,}3123\,,\,81{,}6867\right]$ por lo que se acepta que la media poblacional sea 74.

$$\alpha_p \equiv p\_valor \equiv \text{Sig (bilateral)} = P\left[\text{Rechazar media muestral} \,\middle|\, H_0 \text{ Cierta}\right]$$

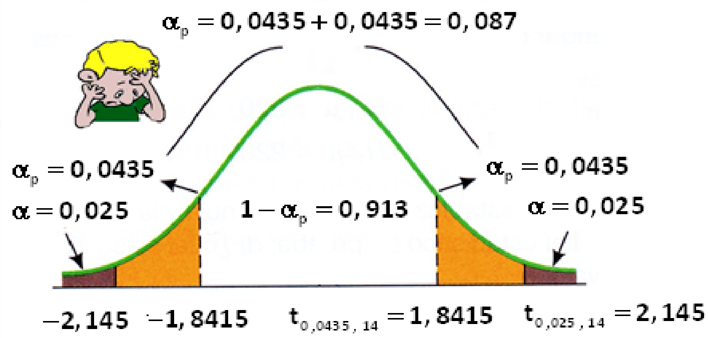
$$\alpha_p \equiv p\_valor \equiv \text{Sig (bilateral)} = P\left[\,\left|\overline{x}\right| > 80{,}6 \,\middle|\, t_{14}\left(74\,,\,3{,}584\right)\right] = P\left[\left|\frac{\overline{x}-74}{3{,}584}\right| > \frac{80{,}6-74}{3{,}584}\right] =$$

$$= P\left[\left|t_{14}\right| > 1{,}8415\right] = P\left[t_{14} < -1{,}8415\right] + P\left[t_{14} > 1{,}8415\right] = 2\,.\,P\left[t_{14} > 1{,}8415\right] = 2\,.\,0{,}0435 = 0{,}087$$

Interpolando en la tabla t de Student:

$$\frac{1{,}761 - 2{,}145}{1{,}8415 - 2{,}145} = \frac{0{,}05 - 0{,}025}{x - 0{,}025}$$

$x = 0{,}0435$



Como $p\_valor\,(\text{Sig.bilateral}) = 0{,}087 \,>\, 0{,}05 = \alpha \;\rightarrow\;$ Se acepta H_0

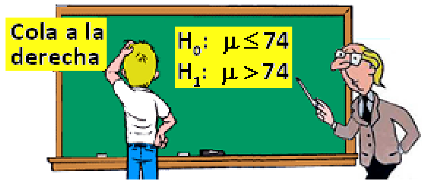
UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....

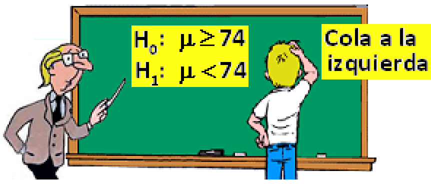
Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....

$\alpha_p = \text{Sig.bilateral} / 2$



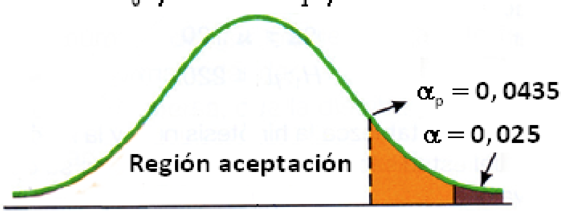
$\alpha_p = 1 - \text{Sig.bilateral} / 2$



CONTRASTE UNILATERAL $\alpha_p > \alpha$ se acepta H_0

Prueba de una cola a la derecha

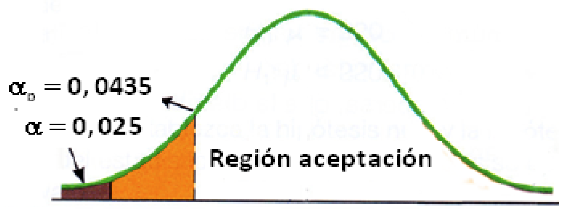
$H_0:\ \mu \leq 74 \qquad H_1:\ \mu > 74$



$\alpha_p = P\left[t_{14} \geq 1,841\right] = 0,0435$

Prueba de una cola a la izquierda

$H_0:\ \mu \geq 74 \qquad H_1:\ \mu < 74$



$\alpha_p = P\left[t_{14} \leq 1,841\right] = 1 - P\left[t_{14} \geq 1,841\right] = 1 - 0,0435 = 0,9565$

Prueba para una muestra

	Valor de prueba ≤ 74					
	t	gl	Sig. (unilateral derecha)	Diferencia de medias	95% Intervalo de confianza para la diferencia: Inferior	95% Intervalo de confianza para la diferencia: Superior
Autónoma_Madrid	1,841	14	0,0435	6,600	-1,09	14,29

$\alpha_p = 0,0435 < 0,05 = \alpha \quad \rightarrow \quad$ **Se rechaza $H_0:\ \mu \leq 74$**

Prueba para una muestra

	Valor de prueba ≥ 74					
	t	gl	Sig. (unilateral izquierda)	Diferencia de medias	95% Intervalo de confianza para la diferencia: Inferior	95% Intervalo de confianza para la diferencia: Superior
Autónoma_Madrid	1,841	14	0,9565	6,600	-1,09	14,29

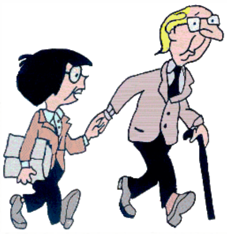
$\alpha_p = 0,9565 > 0,05 = \alpha \quad \rightarrow \quad$ **Se acepta $H_0:\ \mu \geq 74$**

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....



Contrastes de bondad de ajuste

Uno de los problemas fundamentales de la inferencia no paramétrica consiste en examinar la bondad de ajuste de una distribución.

Para resolver un problema de bondad de ajuste cabe destacar dos métodos: Contrastes de la Chi-cuadrado y Contrastes de Kolmogorov-Smirnov.

El objetivo del contraste de bondad del ajuste normal es saber sí una muestra $(X_1, X_2, \cdots, X_k)$ procede de una población teórica con distribución normal $N(\mu, \sigma)$

Sea una población donde sea analiza un carácter X con modalidades excluyentes, denotando por n_i la frecuencia observada (número de elementos que presentan la modalidad x_i), siendo

$\sum_{i=1}^{k} n_i = n$ con k modalidades y n el número total de elementos.

Se origina la Tabla de Contingencia:

Carácter X	X_1	X_2	• • • •	X_i	• • • •	X_k
Frecuencia observada	n_1	n_2	• • • •	n_i	• • • •	n_k
Frecuencia teórica	e_1	e_2	• • • •	e_i	• • • •	e_k

Ahora se establece la hipótesis nula H_0 consistente en suponer que la distribución teórica escogida representa bien a la distribución observada (empírica) y que, por tanto, las desviaciones entre las frecuencias observadas y las teóricas son debidas al azar.

Para ello, se define el estadístico $\chi_{k-1} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - e_i)^2}{e_i} = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i^2}{e_i} - n$ que sigue aproximadamente una Chi-cuadrado de Pearson con $(k-1)$ grados de libertad.

Con un nivel de significación α (riesgo α) se acepta la hipótesis nula si:

$$\chi_{k-1} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - e_i)^2}{e_i} < \chi^2_{\alpha, k-1}$$

En caso contrario, $\chi_{k-1} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - e_i)^2}{e_i} \geq \chi^2_{\alpha, k-1}$ se rechaza la hipótesis nula

El test de la Chi-cuadrado se puede aplicar en situaciones donde se desea decidir si una serie de datos (observaciones) se ajusta o no a una función teórica previamente determinada (Binomial, Poisson, Normal, Hipergeométrica) . Es necesario hacer algunas consideraciones:

Asignatura.. Grupo..

Apellidos .... Nombre..

Ejercicio del día ....

Hay que tener en cuenta el número de modalidades que admite el carácter, al haber más modalidades la Chi-cuadrado va siendo cada vez más grande.

Es necesario que las frecuencias esperadas de las distintas modalidades no sea inferior a cinco $(e_i > 5)$. Si hay alguna modalidad que tenga una frecuencia esperada menor que cinco se agrupan dos o mas modalidades contiguas en una sola hasta lograr que la nueva frecuencia esperada sea mayor que cinco.
En la práctica se admite un 20% de modalidades inferior a cinco.

Si para obtener frecuencias esperadas se necesitan hallar p parámetros entonces los grados de libertad de la Chi-cuadrado son $(k-p)$ si son independientes y $(k-p-1)$ si son excluyentes las modalidades.

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....

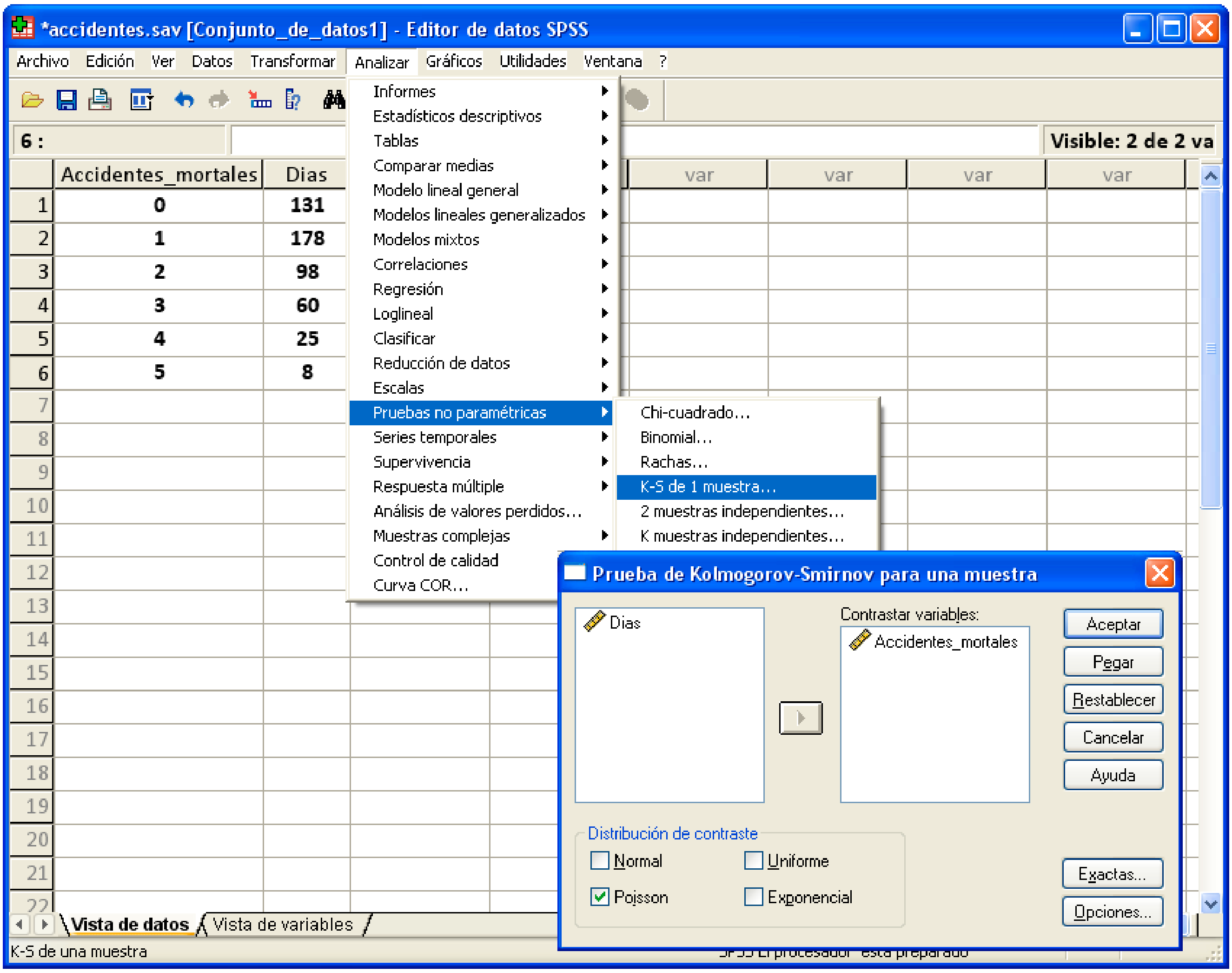
Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....

3. La tabla refleja el número de accidentes mortales de tráfico que se producen en una carretera a lo largo de un período de tiempo.

Accidentes mortales por día	0	1	2	3	4	5
Número de días	131	178	98	60	25	8

¿Se ajustan los datos a una distribución de Poisson?. Utilizar un nivel de significación 0,05



Estadísticos descriptivos

	N	Media	Desviación típica	Mínimo	Máximo
Accidentes_mortales	500	1,39	1,223	0	5

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....

Prueba de Kolmogorov-Smirnov para una muestra

		Accidentes_mortales
N		500
Parámetro de Poisson[a,b]	Media	1,39
Diferencias más extremas	Absoluta	,022
	Positiva	,022
	Negativa	-,022
Z de Kolmogorov-Smirnov		,501
Sig. asintót. (bilateral)		,964

a. La distribución de contraste es la de Poisson.

b. Se han calculado a partir de los datos.

Hipótesis nula H_0: Los accidentes mortales de tráfico siguen una distribución de Poisson

El $p\_valor\,(\text{Sig. asintótica bilateral}) = 0,964 > 0,05 = \alpha \quad \rightarrow$ Se acepta la hipótesis nula H_0

✓ **Hipótesis nula H_0 : La distribución empírica se ajusta a la distribución de Poisson**

La hipótesis nula se acepta a un nivel de significación α sí

$$\chi^2_{k-p-1} = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - e_i)^2}{e_i}}_{\text{estadístico contraste}} = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i^2}{e_i} - n \; < \; \underbrace{\chi^2_{\alpha\,;\,k-p-1}}_{\text{estadístico teórico}}$$

$k \equiv$ Número intervalos $\quad p \equiv$ Número parámetros a estimar

La distribución de Poisson se caracteriza porque sólo depende del parámetro λ que coincide con la media.

Sea la variable aleatoria X = Número de accidentes mortales por día y $n_i \equiv$ Número de días

x_i	n_i	$x_i\,n_i$	$P(x_i = k) = p_i$	$e_i = n\,.\,p_i$
0	131	0	0,2496	124,80
1	178	178	0,3464	173,20
2	98	196	0,2404	120,20
3	60	180	0,1112	55,60
4	25	100	0,0386	19,30
5	8	40	0,0107	5,35
	n = 500	694		

$$\overline{x} = \lambda = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{6} x_i = \frac{694}{540} = 1,388$$

$$P(x_i = k) = \frac{1,388^k}{k!}\, e^{-1,388} \qquad k = 0, \cdots, 5$$

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

Las probabilidades con que ocurren los accidentes mortales por día $k = 0, \cdots, 5$ se obtienen sustituyendo los valores de k en $P(x_i = k) = \dfrac{1{,}39^k}{k!} e^{-1{,}39}$

Para verificar si el ajuste de los datos a una distribución de Poisson se acepta o no, mediante una χ^2, hay que calcular las frecuencias esperadas $(e_i = n \,.\, p_i)$

Dando lugar a una tabla de contingencia 1 x 6, no teniendo que agrupar columnas contiguas al no aparecer frecuencias esperadas menor que cinco

x_i	0	1	2	3	4	5
Frecuencias	131 $e_1 = 124{,}80$	178 $e_2 = 173{,}20$	98 $e_3 = 120{,}20$	60 $e_4 = 55{,}60$	25 $e_5 = 19{,}30$	8 $e_6 = 5{,}35$

Los grados de libertad son cuatro: $k - p - 1 = 6 - 1 - 1 = 4$

Estadístico de contraste:

$$\chi^2_3 = \sum_{i=1}^{6} \frac{(n_i - e_i)^2}{e_i} = \sum_{i=1}^{6} \frac{n_i^2}{e_i} - n =$$

$$= \frac{131^2}{124{,}80} + \frac{178^2}{173{,}20} + \frac{98^2}{120{,}20} + \frac{60^2}{55{,}60} + \frac{25^2}{19{,}30} + \frac{8^2}{5{,}35} - 500 = 9{,}435$$

Estadístico teórico: $\chi^2_{0{,}05\,;\,4} = 9{,}488$

El estadístico de contraste (bondad de ajuste) es menor que el estadístico teórico, $(9{,}435 < 9{,}488)$, por lo que se acepta la hipótesis nula, es decir, con un nivel de significación 0,05, los accidentes mortales de tráfico en la carretera se ajustan a una distribución de Poisson.

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

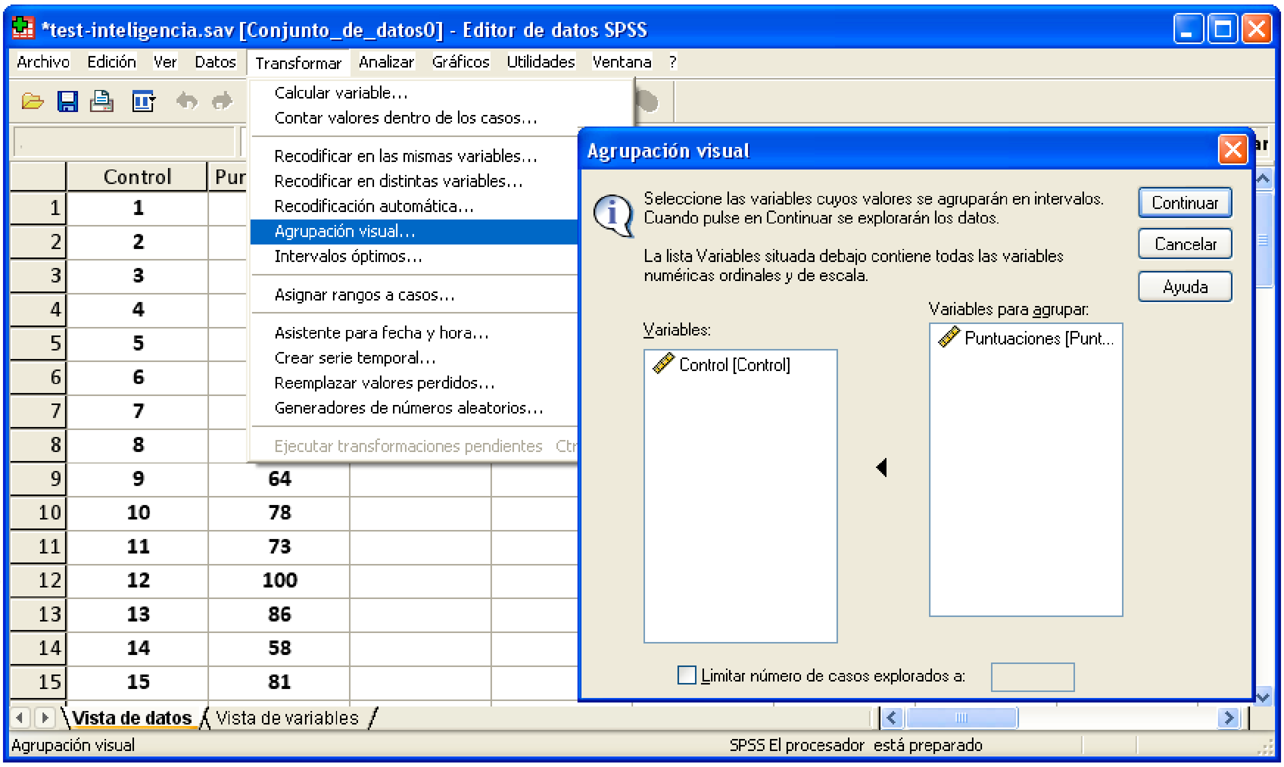
Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....

Con un nivel de significación 0,05 se desea comprobar si las puntuaciones obtenidas en un test de inteligencia se distribuyen según una ley normal. Los datos obtenidos fueron:

51	70	87	79	54	65
76	91	64	78	73	100
86	58	81	92	77	68
55	99	90	71	52	89
67	46	82	104	88	59
83	75	84	57	72	80

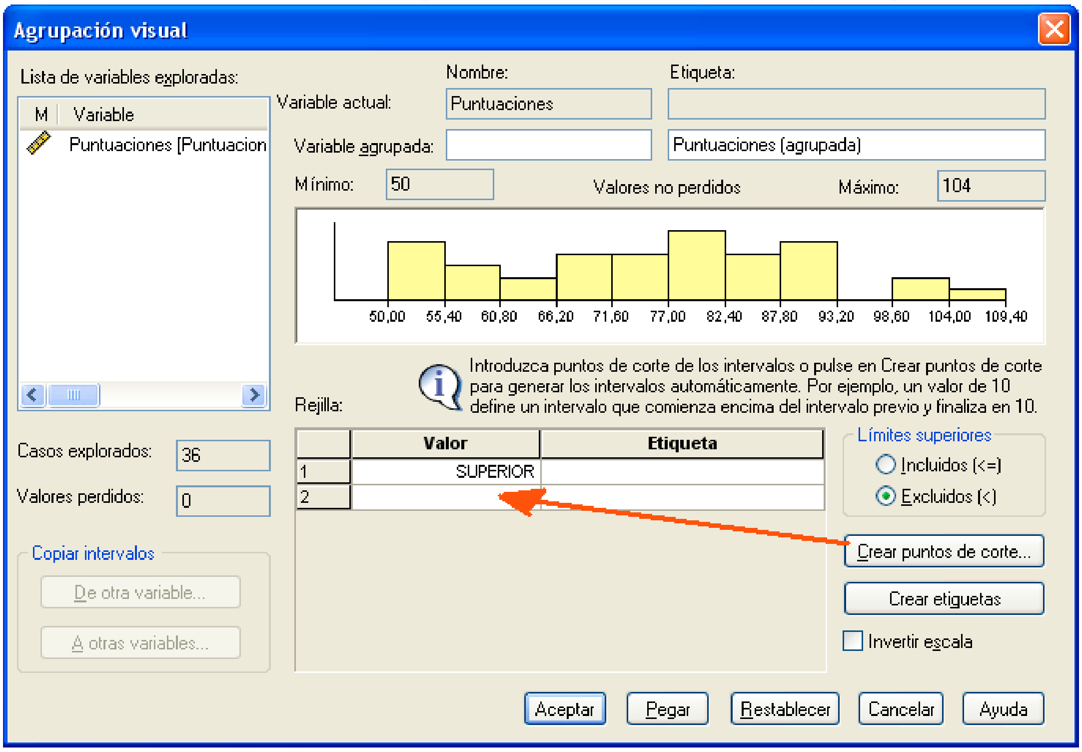


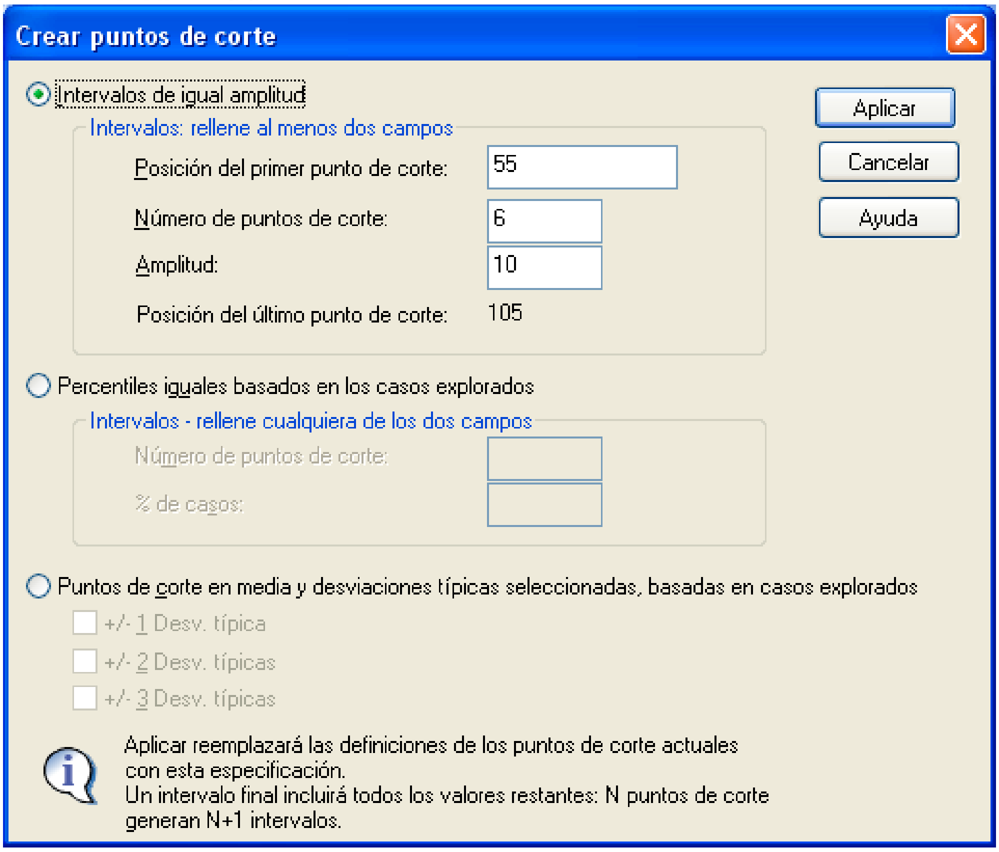
UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....



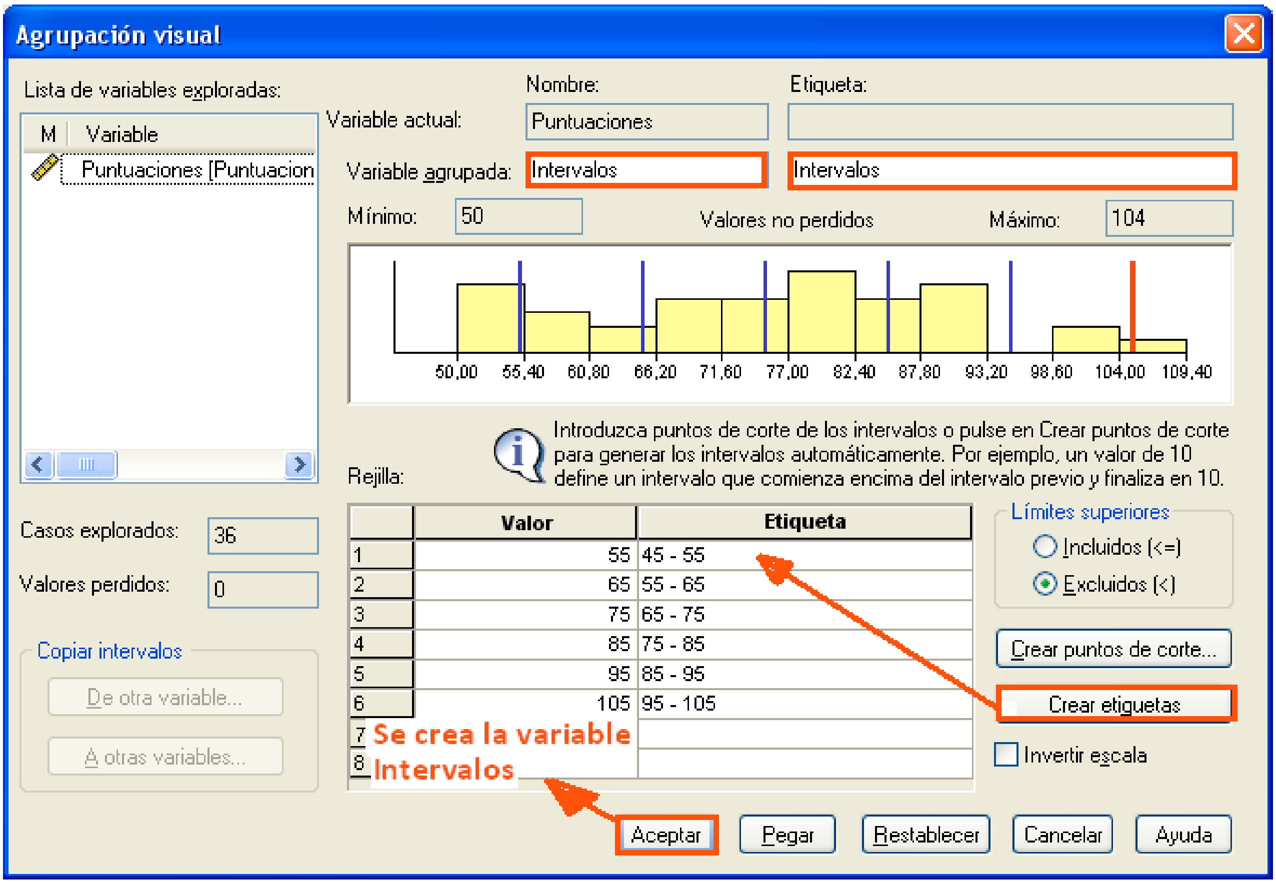


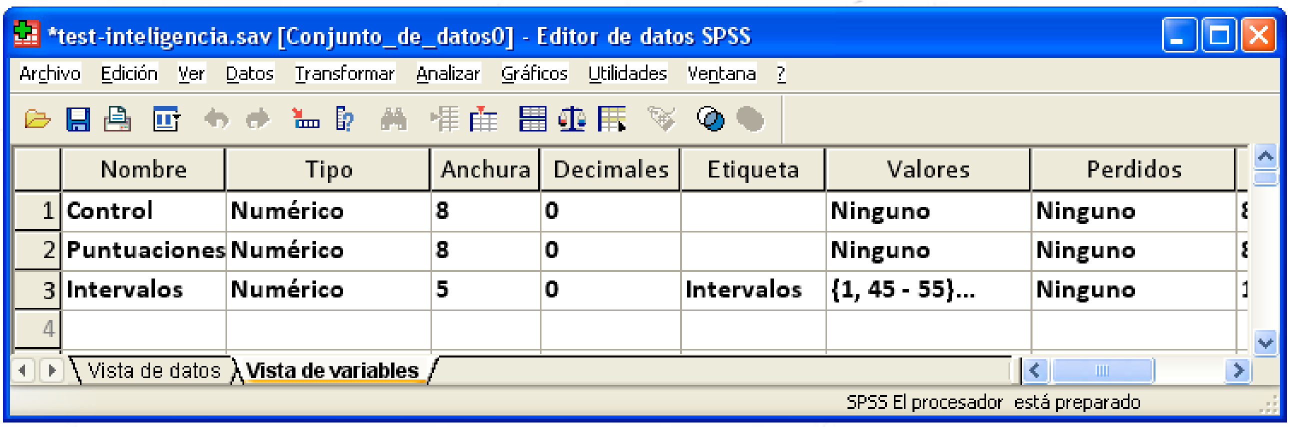
UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....





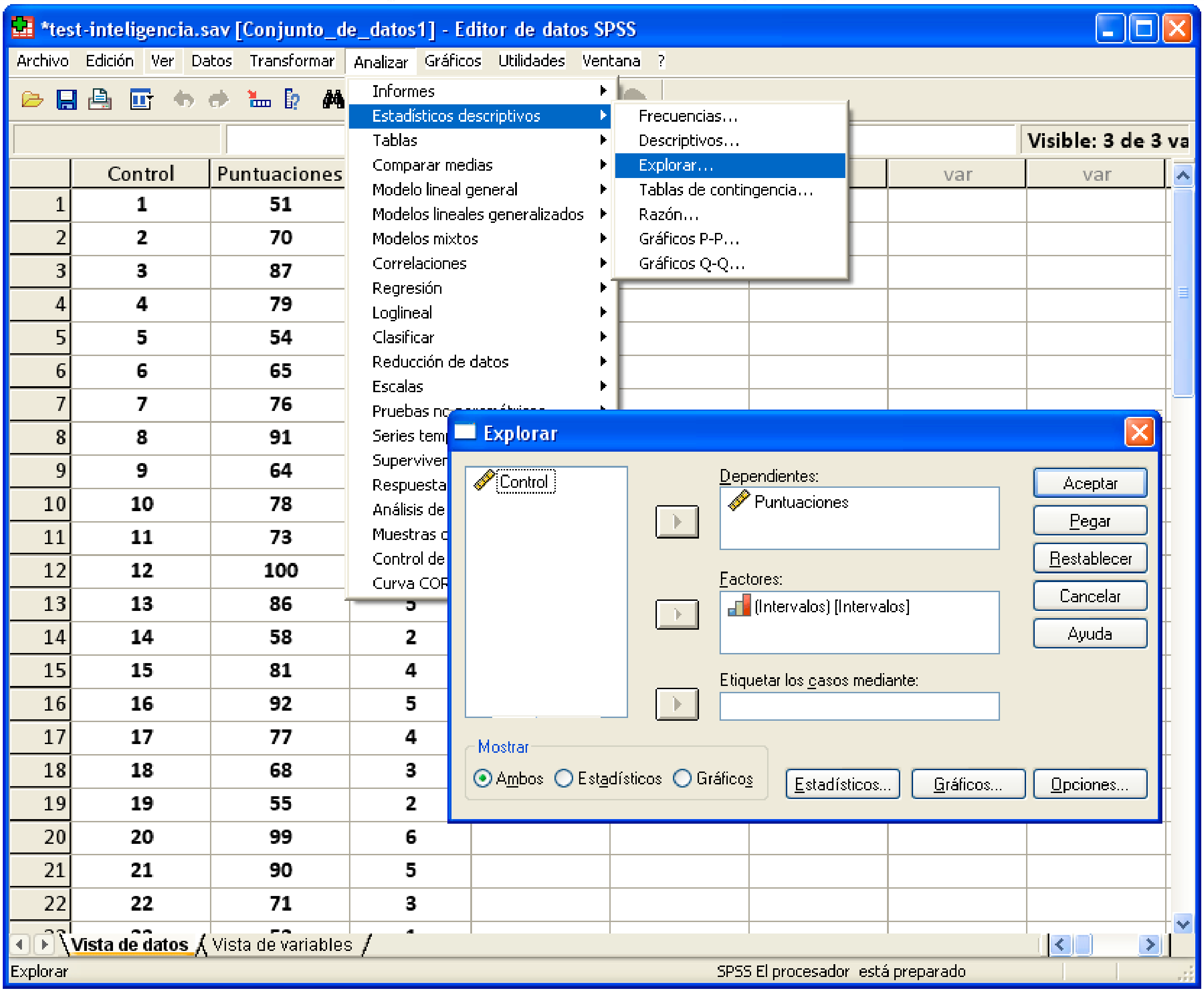
UNICAMENTE PARA USO ESCOLAR (IMPRESO EN PAPEL RECICLADO)

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....



Pruebas de normalidad

	(Intervalos)	Kolmogorov-Smirnov[a] Estadístico	gl	Sig.	Shapiro-Wilk Estadístico	gl	Sig.
Puntuaciones	45 -55	,279	4	.	,923	4	,556
	55 - 65	,253	5	,200*	,925	5	,560
	65 - 75	,150	7	,200*	,964	7	,854
	75 - 85	,096	10	,200*	,970	10	,892
	85 - 95	,108	7	,200*	,978	7	,949
	95 - 105	,314	3	.	,893	3	,363

*. Este es un límite inferior de la significación verdadera.

a. Corrección de la significación de Lilliefors

En el test de Kolmogorov-Smirnov con la corrección de Lilliefors resultan cuatro modalidades con un un p_valor (Sig.) > 0,05 con lo que se admite la hipótsis nula de que la muestra procede de una distribución normal.

Con el contraste de Shapiro-Wilk se llega a la misma afirmación.

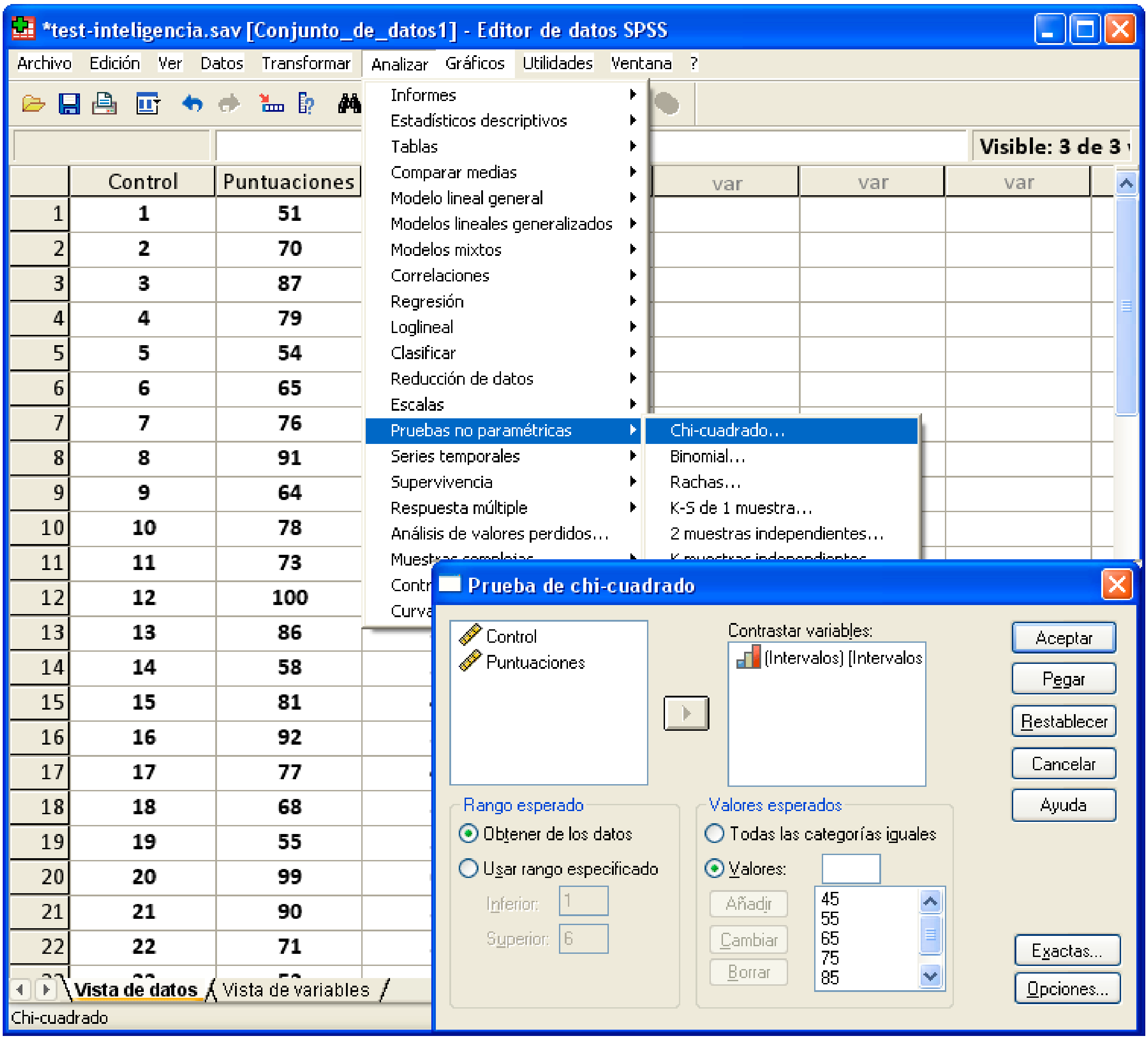
UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....

2º procedimiento:



Intervalos

	N observado	N esperado	Residual
45 -55	4	4,1	-,1
55 - 65	5	4,9	,1
65 - 75	7	5,6	1,4
75 - 85	10	6,4	3,6
85 - 95	7	7,1	-,1
95 - 105	3	7,9	-4,9
Total	36		

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura.. Grupo..............................

Apellidos .... Nombre..............................

Ejercicio del día ....

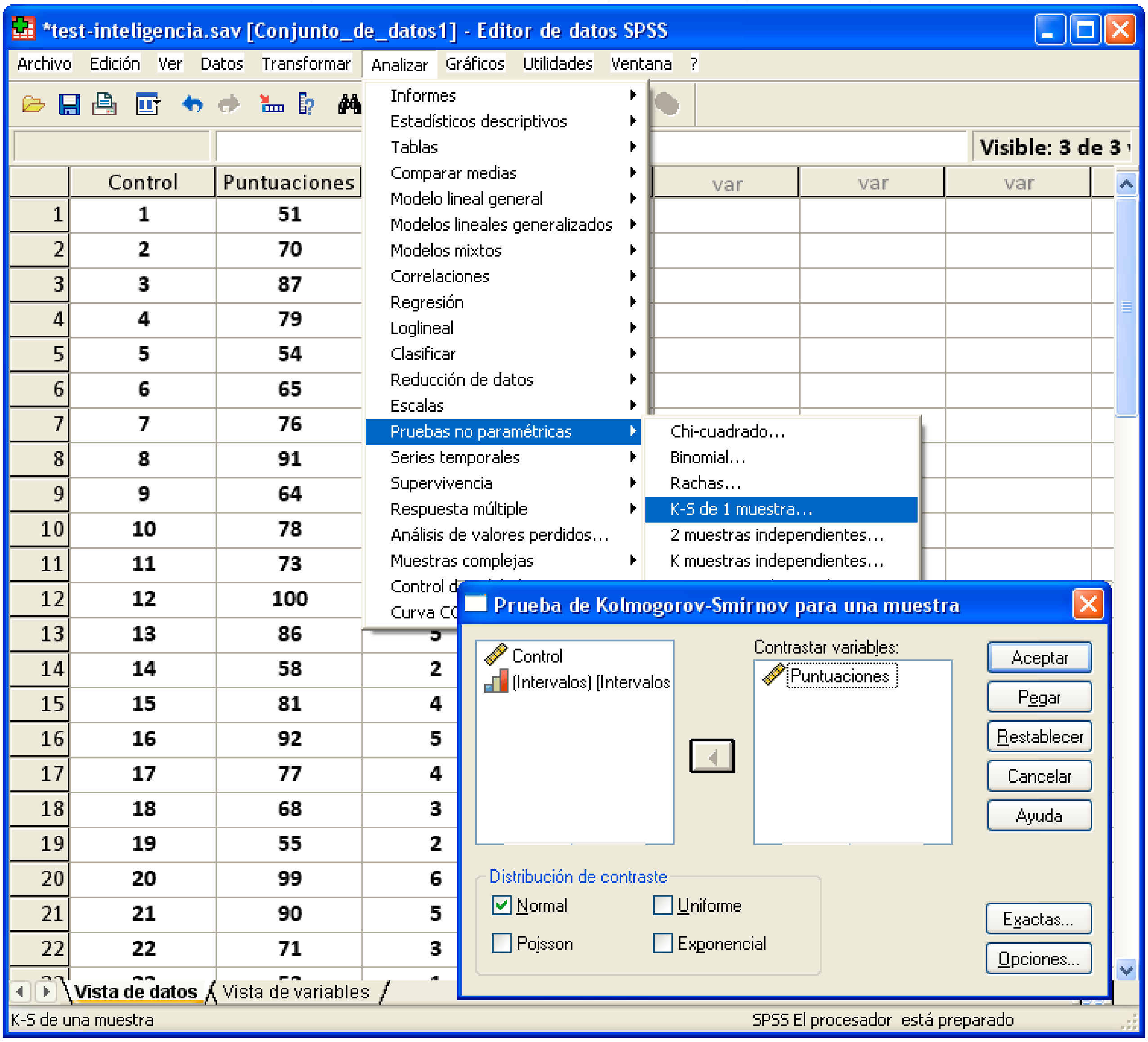
Estadísticos de contraste

	Intervalos
Chi-cuadrado[a]	5,424
gl	5
Sig. asintót.	,366

a. 2 casillas (33,3%) tienen frecuencias esperadas menores que 5. La frecuencia de casilla esperada mínima es 4,1.

El p_valor (Sig. Asintótica) = 0,366 > 0,05 aceptando la hipótesis nula de que las puntuaciones siguen una ley normal con una significación $\alpha = 0{,}05$

3º procedimiento:



UNICAMENTE PARA USO ESCOLAR (IMPRESO EN PAPEL RECICLADO)

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

Prueba de Kolmogorov-Smirnov para una muestra

		Puntuaciones
N		36
Parámetros normales[a,b]	Media	75,08
	Desviación típica	14,900
Diferencias más extremas	Absoluta	,082
	Positiva	,082
	Negativa	-,053
Z de Kolmogorov-Smirnov		,492
Sig. asintót. (bilateral)		,969

a. La distribución de contraste es la Normal.

b. Se han calculado a partir de los datos.

El p_valor (Sig. Asintótica bilateral) $=$ 0,969 > 0,05 aceptando la hipótesis nula de que las puntuaciones siguen una ley normal con una significación $\alpha = 0{,}05$

El método de aplicación de la Prueba de ajuste para la normalidad de la distribución de frecuencias es:

Número de intervalos $= \sqrt{36} = 6$

Amplitud del Intervalo $= \dfrac{X_{máx} - X_{mín}}{n} = \dfrac{104 - 46}{6} \approx 10$

Utilizando intervalos de clase convenientes, se clasifican los datos en una distribución de frecuencias:

Intervalos	x_i	n_i	p_i	$e_i = p_i\, n$
45 – 55	50	4	0,0594	2,14
55 – 65	60	5	0,1563	5,63
65 – 75	70	7	0,2513	9,05
75 – 85	80	10	0,2614	9,41
85 – 95	90	7	0,1661	5,98
95 – 105	100	3	0,0683	2,46
		$n = 36$		

Se calcula la media y la desviación típica: En este caso, $\mu = 75{,}56$ **y** $\sigma = 14{,}4$

$$\alpha_1 = \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{6} x_i \, . n_i = \frac{2720}{36} = 75,56 \qquad \alpha_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{6} x_i^2 \, . n_i = \frac{213000}{36} = 5916,67$$

$$\sigma_x^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = 5916,67 - 75,56^2 = 207,35 \qquad \sigma_x = \sqrt{207,35} = 14,4$$

Mediante la tabla de la normal se calculan las probabilidades de cada uno de los intervalos:

$$P[45 < x < 55] = P\left[\frac{45-75,56}{14,4} < \frac{x-75,56}{14,4} < \frac{55-75,56}{14,4}\right] = P[-2,12 < z < -1,43] =$$
$$= P[1,43 < z < 2,12] = P[z > 1,43] - P[z > 2,12] = 0,0764 - 0,0170 = 0,0594$$

$$P[55 < x < 65] = P[-1,43 < z < -0,73] = P[0,73 < z < 1,43] = P[z > 0,73] - P[z > 1,43] =$$
$$= 0,2327 - 0,0764 = 0,1563$$

$$P[65 < x < 75] = P[-0,73 < z < -0,04] = P[0,04 < z < 0,73] = P[z > 0,04] - P[z > 0,73] =$$
$$= 0,4840 - 0,2327 = 0,2513$$

$$P[75 < x < 85] = P[-0,04 < z < 0,66] = P[z > -0,04] - P[z > 0,66] = 1 - P[z > 0,04] - P[z > 0,66] =$$
$$= 1 - 0,4840 - 0,2546 = 0,2614$$

$$P[85 < x < 95] = P[0,66 < z < 1,35] = P[z > 0,66] - P[z > 1,35] = 0,2546 - 0,0885 = 0,1661$$

$$P[95 < x < 105] = P[1,35 < z < 2,05] = P[z > 1,35] - P[z > 2,05] = 0,0885 - 0,0202 = 0,0683$$

Las condiciones necesarias para aplicar el test de la Chi-cuadrado exigen que al menos el 80% de los valores esperados de las celdas sean mayores que 5. Cuando esto no ocurre hay que agrupar modalidades contiguas en una sola hasta lograr que la nueva frecuencia sea mayor que cinco.

Intervalos	x_i	n_i	p_i	$e_i = p_i\, n$	n_i^2	n_i^2 / e_i
45 – 65	55	9	0,2157	7,77	81	10,42
65 – 75	70	7	0,2513	9,05	49	5,41
75 – 85	80	10	0,2614	9,41	100	10,63
85 – 105	95	10	0,2344	8,44	100	11,85
		$n = 36$				38,31

Se halla el estadístico de contraste: $\chi_1^2 = \sum_{i=1}^{4} \frac{(n_i - e_i)^2}{e_i} = \sum_{i=1}^{4} \frac{n_i^2}{e_i} - n = 38,81 - 36 = 2,81$

Para esta prueba el número de grados de libertad es igual al número de clases $k = 4$ menos tres parámetros que han tenido que calcularse: $\sum_{i=1}^{4} n_i = n$, μ y σ por tratarse de modalidades independientes $(k-p)$

El estadístico teórico para un nivel de significación $\alpha = 0{,}05$ es, por tanto, $\chi^2_{0{,}05\,,\,1} = 3{,}841$

Siendo $\chi^2_1 = 2{,}81 < 3{,}841 = \chi^2_{0{,}05\,,\,1}$ se afirma que las puntuaciones en el test de inteligencia se distribuyen normalmente a un nivel $\alpha = 0{,}05$

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....

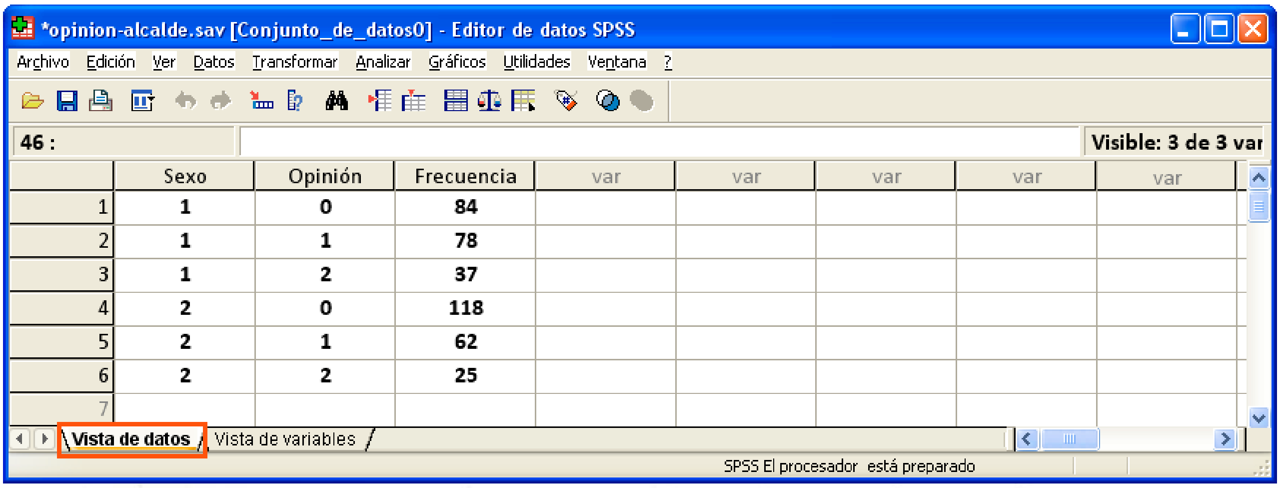
Apellidos .... Nombre ....

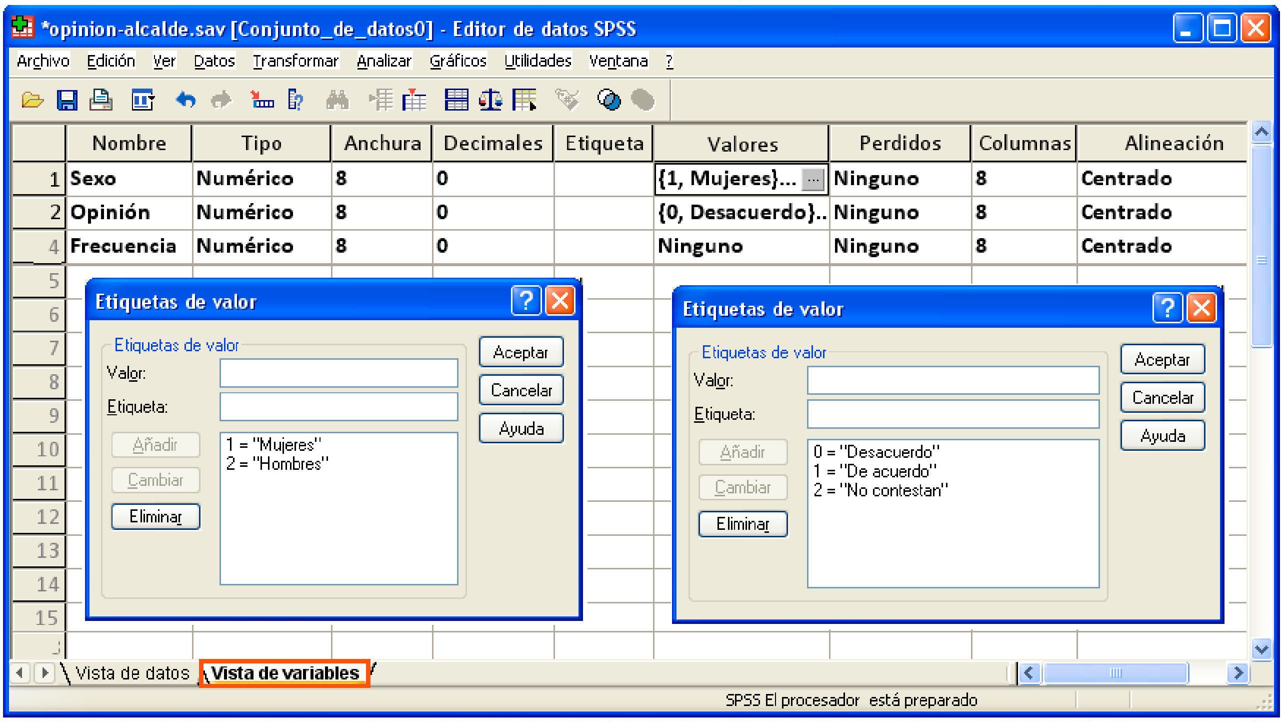
Ejercicio del día ....

Para conocer la opinión de los ciudadanos sobre la actuación del alcalde de una determinada ciudad se realiza una encuesta a 404 personas. Los resultados se recogen en la siguiente tabla:

	Desacuerdo	De acuerdo	No contestan
Mujeres	84	78	37
Varones	118	62	25

Contrastar, con un nivel de significación del 5%, que no existen diferencias de opinión entre hombres y mujeres ante la actuación del alcalde.



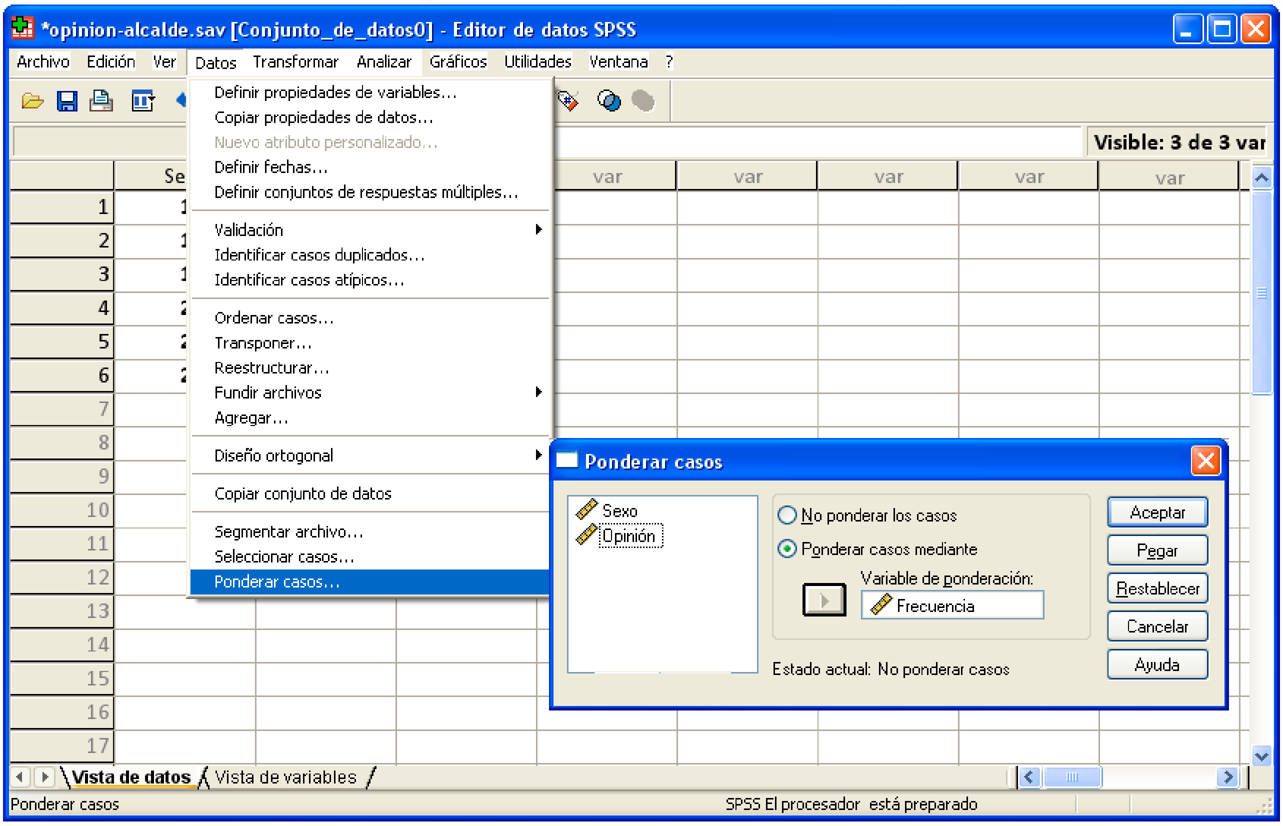


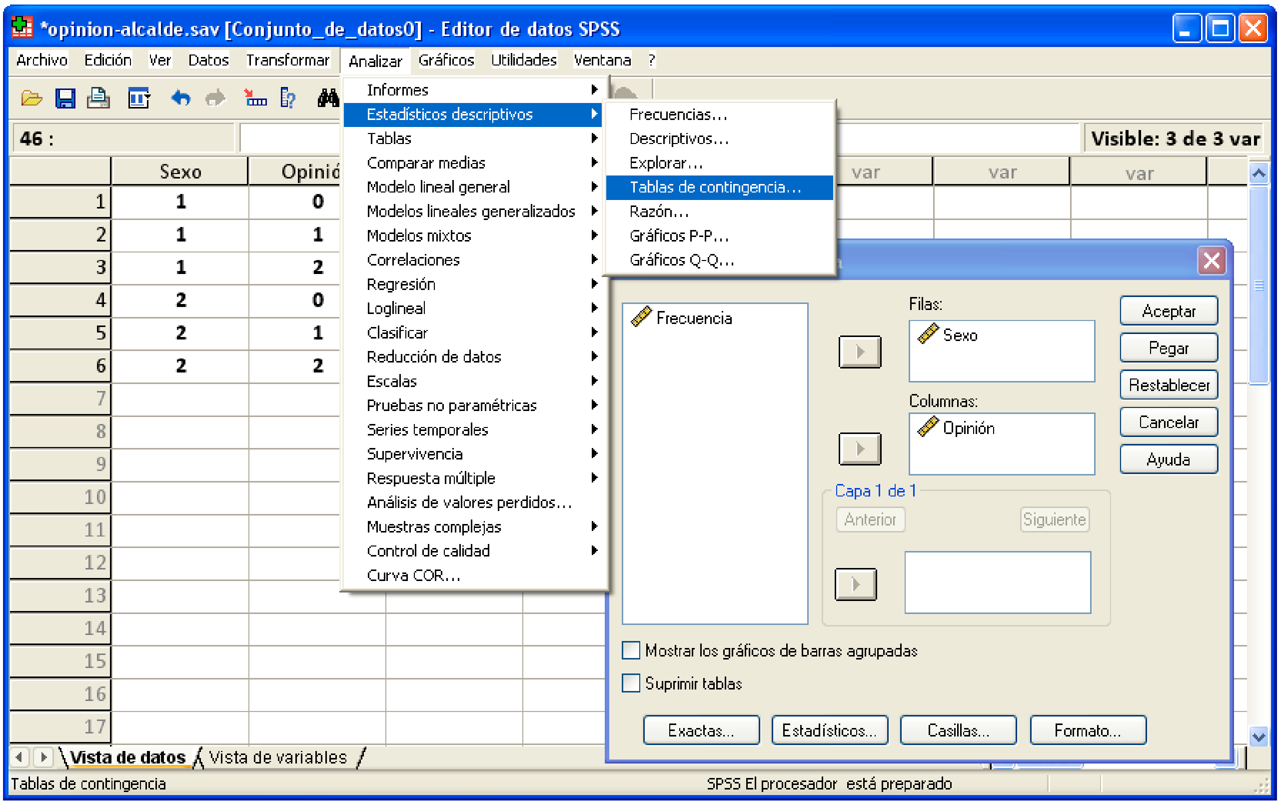
UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....





(IMPRESO EN PAPEL RECICLADO)

UNICAMENTE PARA USO ESCOLAR

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

Tabla de contingencia Sexo * Opinión

			Opinión			Total
			Desacuerdo	De acuerdo	No contestan	
Sexo	Mujeres	Recuento	84	78	37	199
		Frecuencia esperada	99,50	68,96	30,54	199
	Hombres	Recuento	118	62	25	205
		Frecuencia esperada	102,50	71,04	31,46	205
Total		Recuento	202	140	62	404
		Frecuencia esperada	202	140	62	404

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	9,787[a]	2	,007
Razón de verosimilitudes	9,831	2	,007
Asociación lineal por lineal	8,932	1	,003
N de casos válidos	404		

a. 0 casillas (,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 30,54.

El contraste de homogeneidad de la hipótesis nula H_0: 'No existe diferencia entre hombres y mujeres respecto a la opinión', analiza si hombres y mujeres proceden de la misma población o no. Esto es, si se comportan de manera semejante respecto a la opinión de la actuación del alcalde.

El test de Chi-cuadrado tiene p_valor (Sig. Asintótica bilateral) $= 0,007 < 0,05$, afirmando que en cuanto al sexo existe diferencia de opinión respecto al alcalde con una fiabilidad del 95%.

El test G da la razón de verosimilitud, prueba de hipótesis que presenta mejores resultados que el test de Chi-cuadrado de Pearson, tiene un p_valor (Sig. Asintótica bilateral) $= 0,007 < 0,05$ con lo que se rechaza la hipótesis nula.

Hipótesis nula: H_0 : 'No existe diferencia entre hombres y mujeres respecto a la opinión'

Se forma una tabla de contingencia 2 x 3: En cada frecuencia observada $(n_{ij})_{i=1,\cdots,k\,;\,j=1,\cdots,m}$ en la tabla de contingencia se tiene una frecuencia teórica o esperada e_{ij} que se calcula mediante la expresión:

$$e_{ij} = p_{ij}\,.\,n = \frac{n_{i\bullet} \times n_{\bullet j}}{n}$$

, donde p_{ij} son las probabilidades de que un elemento tomado de la muestra presente las modalidades x_i de X e y_j de Y.

	Desacuerdo	De acuerdo	No contestan	$n_{i\bullet}$
Mujeres	84 $e_{11}=99,50$ $g_{11}=-0,169$	78 $e_{12}=68,96$ $g_{12}=0,123$	37 $e_{13}=30,54$ $g_{13}=0,192$	199
Varones	118 $e_{21}=102,50$ $g_{21}=0,141$	62 $e_{22}=71,04$ $g_{22}=-0,136$	25 $e_{23}=31,46$ $g_{23}=-0,230$	205
$n_{\bullet j}$	202	140	62	$n=404$

Siendo $e_{ij} > 5 \;\; \forall\, i,j$ no es necesario agrupar filas o columnas contiguas

$$e_{11}=\frac{199\,.\,202}{404}=99,50 \qquad e_{12}=\frac{199\,.\,140}{404}=68,96 \qquad e_{13}=\frac{199\,.\,62}{404}=30,54$$

$$e_{21}=\frac{205\,.\,202}{404}=102,5 \qquad e_{22}=\frac{205\,.\,140}{404}=71,04 \qquad e_{23}=\frac{205\,.\,62}{404}=31,46$$

Estadístico de contraste Chi-cuadrado: $\displaystyle\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}\frac{(n_{ij}-e_{ij})^2}{e_j}=\chi^2_{(k-1)\,.\,(m-1)}=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}\frac{n_{ij}^2}{e_j}-n$

$$\chi_2^2=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}\frac{(n_{ij}-e_{ij})^2}{e_{ij}}=\frac{(84-99,5)^2}{99,50}+\frac{(78-68,96)^2}{68,96}+\frac{(37-30,53)^2}{30,54}+\frac{(118-102,5)^2}{102,50}+$$

$$+\frac{(62-71,04)^2}{71,04}+\frac{(25-31,46)^2}{31,46}=9,787$$

o bien, $\displaystyle\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}\frac{n_{ij}^2}{e_{ij}}-n=\frac{84^2}{99,50}+\frac{78^2}{68,96}+\frac{37^2}{30,54}+\frac{118^2}{102,50}+\frac{62^2}{71,04}+\frac{25^2}{31,46}-404=9,787$

Estadístico teórico $\chi^2_{0,05\,,\,2}=5,991$

Como $\chi_2^2=9,7787 > 5,991=\chi^2_{0,05\,,\,2}$ se rechaza la hipótesis nula, concluyendo que las muestras no son homogéneas, es decir, no proceden de la misma población, hombres y mujeres no opinan lo mismo respecto al alcalde.

Estadístico de contraste razón de verosimilitud: $\displaystyle G=2\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}n_{ij}\,.\,\mathrm{Ln}\left(\frac{n_{ij}}{e_{ij}}\right)$

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....

$$g_{11} = \text{Ln}\left(\frac{84}{99,50}\right) = -0,169 \qquad g_{12} = \text{Ln}\left(\frac{78}{68,96}\right) = 0,123 \qquad g_{13} = \text{Ln}\left(\frac{37}{30,54}\right) = 0,192$$

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i -$$

$$g_{21} = \text{Ln}\left(\frac{118}{102,50}\right) = -0,141 \qquad g_{22} = \text{Ln}\left(\frac{62}{71,04}\right) = -0,136 \qquad g_{23} = \text{Ln}\left(\frac{25}{31,46}\right) = -0,230$$

$$G = 2\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} n_{ij}\,.\,\text{Ln}\left(\frac{n_{ij}}{e_{ij}}\right) =$$

$$= 2\,x\left[84\,.(-0,169) + 78\,.\,0,123 + 37\,.\,0,192 + 118\,.(-0,141) + 62\,.(-0,136) + 25\,.(-0,230)\right] =$$

$$= 9,831$$

$G = 2\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} n_{ij}\,.\text{Ln}\left(\frac{n_{ij}}{e_{ij}}\right) = 9,831 > 5,991 = \chi^2_{0,05,\,2}$ **con lo que se rechaza la hipótesis nula, por tanto, existe diferencia significativa entre la opinión de hombres y mujeres.**

El test G da la razón de verosimilitud es una prueba de hipótesis que presenta mejores resultados que el test de la Chi-cuadrado de Pearson.

(IMPRESO EN PAPEL RECICLADO) UNICAMENTE PARA USO ESCOLAR

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....

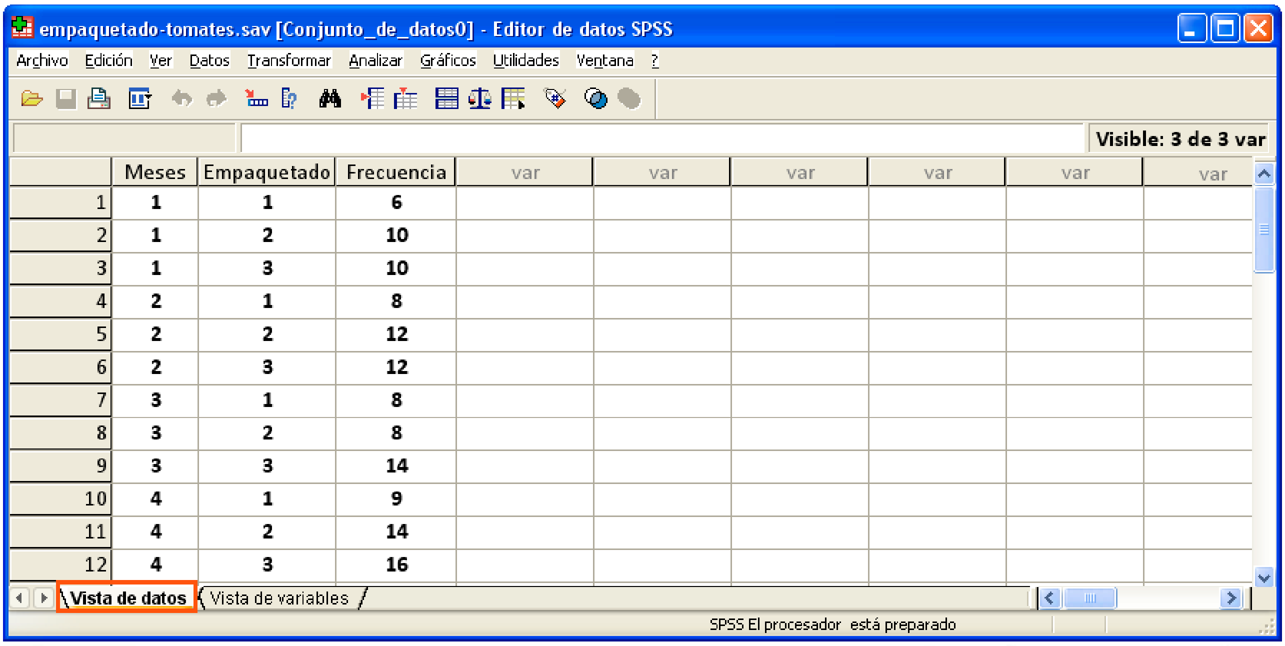
Apellidos .... Nombre ....

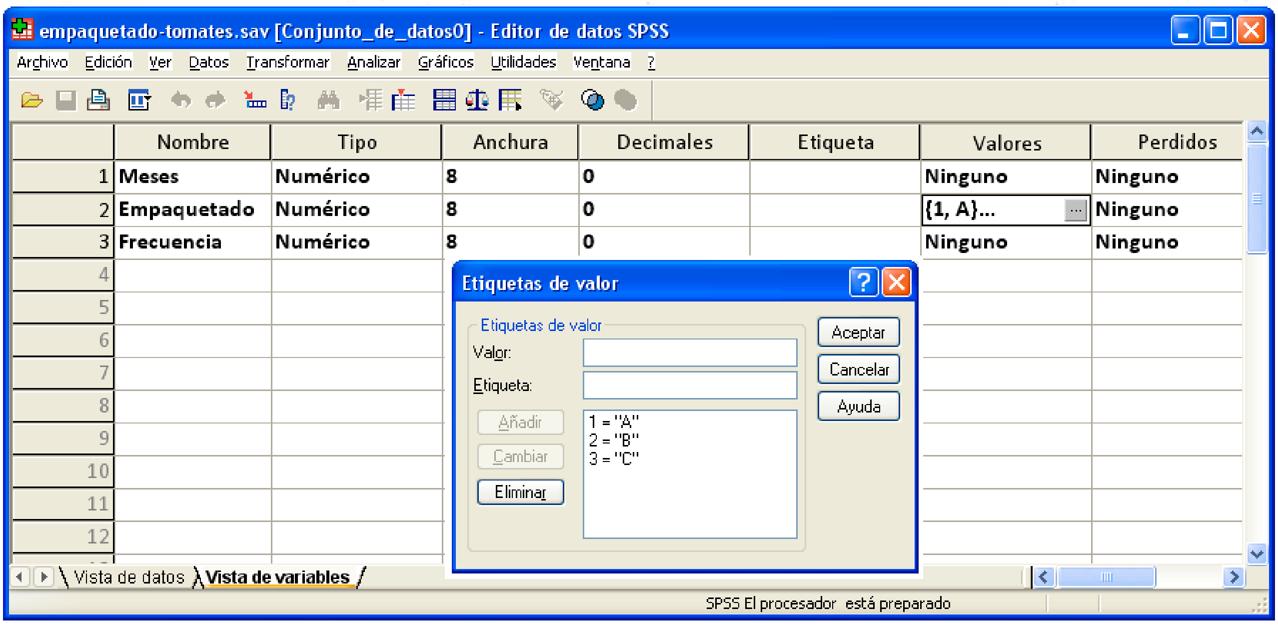
Ejercicio del día ....

Tres métodos de empaquetado de tomates fueron probados durante un período de cuatro meses; se hizo un recuento del número de kilos por 1000 que llegaron estropeados, obteniéndose los siguientes datos:

Meses	A	B	C	Total
1	6	10	10	26
2	8	12	12	32
3	8	8	14	30
4	9	14	16	39
Total	31	44	52	127

Con un nivel de significación de 0,05, analizar si los tres métodos tienen la misma eficacia.





Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....

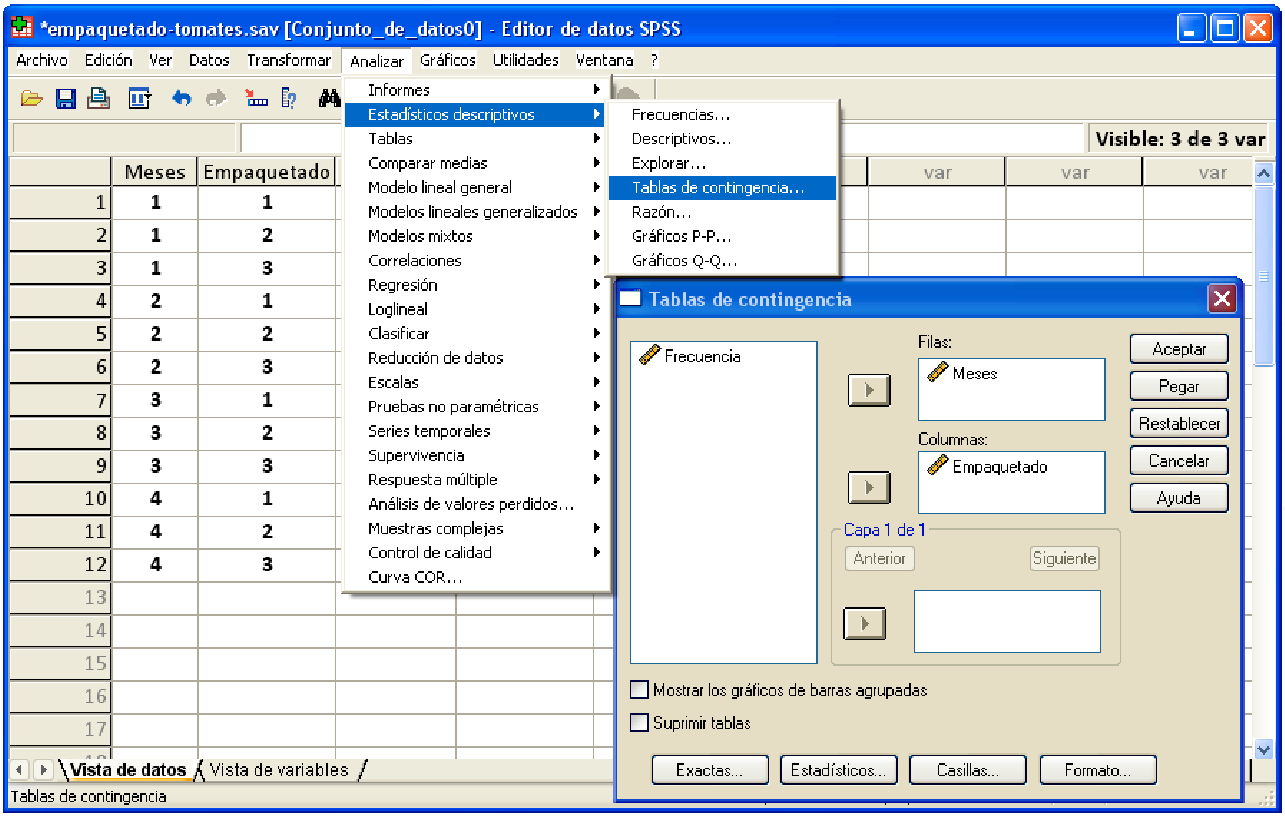


Tabla de contingencia Meses * Empaquetado

			Empaquetado			
			A	B	C	Total
Meses	1	Recuento	6	10	10	26
		Frecuencia esperada	6,35	9,01	10,65	26
	2	Recuento	8	12	12	32
		Frecuencia esperada	7,81	11,09	13,10	32
	3	Recuento	8	8	14	30
		Frecuencia esperada	7,32	10,39	12,28	30
	4	Recuento	9	14	16	39
		Frecuencia esperada	9,52	13,51	15,97	39
Total		Recuento	31	44	52	127
		Frecuencia esperada	31	44	52	127

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	1,240[a]	6	,975
Razón de verosimilitudes	1,274	6	,973
Asociación lineal por lineal	,059	1	,808
N de casos válidos	127		

a. 0 casillas (,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 6,35.

El test Chi-cuadrado de Pearson presenta p_valor (Sig. Asintótica bilateral) $= 0{,}975 > 0{,}05 = \alpha$ con lo que se acepta la hipótesis nula 'No existe diferencia entre los métodos de empaquetado'

Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....

H_0: 'No existe diferencia entre los métodos de empaquetado'

Con la simple observación de los datos, el empaquetado A parece ser el mejor, ya que es el que menos kilos de tomates estropeados tuvo. Ahora bien, esta situación puede ser engañosa, ya que hay que tener en cuenta el número de kilos que se empaquetaron.

Para tomar una decisión sobre si hay diferencia entre los diferentes métodos de empaquetado, se contrasta la hipótesis nula.

Se forma la tabla de contingencia 3 x 4 donde $e_{ij} = \dfrac{n_{i\bullet} \text{ x } n_{\bullet j}}{n}$

Empaquetado Meses	A	B	C	Total
1	6 $e_{11} = 6,35$ $g_{11} = -0,057$	10 $e_{12} = 9,01$ $g_{12} = 0,104$	10 $e_{13} = 10,65$ $g_{13} = -0,063$	26 26
2	8 $e_{21} = 7,81$ $g_{21} = 0,024$	12 $e_{22} = 11,09$ $g_{22} = 0,079$	12 $e_{23} = 13,10$ $g_{23} = -0,088$	32 32
3	8 $e_{31} = 7,32$ $g_{31} = 0,089$	8 $e_{32} = 10,39$ $g_{32} = -0,261$	14 $e_{33} = 12,28$ $g_{33} = 0,131$	30 30
4	9 $e_{41} = 9,52$ $g_{41} = -0,056$	14 $e_{42} = 13,51$ $g_{42} = 0,036$	16 $e_{43} = 15,97$ $g_{43} = 0,002$	39 39
Total	31	44	52	127

$$e_{11} = \frac{26\,.\,31}{127} = 6,35 \qquad e_{12} = \frac{26\,.\,44}{127} = 9,01 \qquad e_{13} = \frac{26\,.\,52}{127} = 10,65$$

$$e_{21} = \frac{32\,.\,31}{127} = 7,81 \qquad e_{22} = \frac{32\,.\,44}{127} = 11,09 \qquad e_{23} = \frac{32\,.\,52}{127} = 13,10$$

$$e_{31} = \frac{30\,.\,31}{127} = 7,32 \qquad e_{32} = \frac{30\,.\,44}{127} = 10,39 \qquad e_{33} = \frac{30\,.\,52}{127} = 12,28$$

$$e_{41} = \frac{39\,.\,31}{127} = 9,52 \qquad e_{42} = \frac{39\,.\,44}{127} = 13,51 \qquad e_{43} = \frac{39\,.\,52}{127} = 15,97$$

Estadístico de contraste Chi-cuadrado: $\chi^2_{(4-1).(3-1)} = \chi^2_6 = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} \dfrac{n_{ij}^2}{e_{ij}} - n$

$$\chi_6^2 = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3}\frac{n_{ij}^2}{e_{ij}} - n = \frac{6^2}{6,35}+\frac{10^2}{9,01}+\frac{10^2}{10,65}+\frac{8^2}{7,81}+\frac{12^2}{11,09}+\frac{12^2}{13,10}+\frac{8^2}{7,32}+\frac{8^2}{10,39}+\frac{14^2}{12,28}+$$

$$+\frac{9^2}{9,52}+\frac{14^2}{13,51}+\frac{16^2}{15,97} = 128,24 - 127 = 1,24$$

Estadístico teórico o esperado: $\chi^2_{0,05\,,\,6} = 12,592$

Siendo $\chi_6^2 = 1,24 < 12,592 = \chi^2_{0,05\,,\,6}$**, el estadístico observado es menor que el estadístico teórico o esperado, por tanto, se acepta la hipótesis nula, concluyendo que los tres métodos de empaquetado tienen la misma eficiencia.**

Estadístico de contraste razón de verosimilitud: $G = 2\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} n_{ij}\,.\mathrm{Ln}\left(\frac{n_{ij}}{e_{ij}}\right)$

$$g_{11} = \mathrm{Ln}\left(\frac{6}{6,35}\right) = -0,057 \qquad g_{12} = \mathrm{Ln}\left(\frac{10}{9,01}\right) = 0,104 \qquad g_{13} = \mathrm{Ln}\left(\frac{10}{10,65}\right) = -0,063$$

$$g_{21} = \mathrm{Ln}\left(\frac{8}{7,81}\right) = 0,024 \qquad g_{22} = \mathrm{Ln}\left(\frac{12}{11,09}\right) = 0,079 \qquad g_{23} = \mathrm{Ln}\left(\frac{12}{13,10}\right) = -0,088$$

$$g_{31} = \mathrm{Ln}\left(\frac{8}{7,32}\right) = 0,089 \qquad g_{32} = \mathrm{Ln}\left(\frac{8}{10,39}\right) = -0,261 \qquad g_{33} = \mathrm{Ln}\left(\frac{14}{12,28}\right) = 0,131$$

$$g_{41} = \mathrm{Ln}\left(\frac{9}{9,52}\right) = -0,056 \qquad g_{42} = \mathrm{Ln}\left(\frac{14}{13,51}\right) = 0,036 \qquad g_{43} = \mathrm{Ln}\left(\frac{16}{15,97}\right) = 0,002$$

$$G = 2\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} n_{ij}\,.\,\mathrm{Ln}\left(\frac{n_{ij}}{e_{ij}}\right) =$$

$$= 2 \times [6\,.(-0,057) + 10\,.\,0,104 + 10\,.(-0,063) + 8\,.\,0,024 + 12\,.\,0,079 + 12\,.(-0,088)$$
$$+ 8\,.\,0,089 + 8\,.(-0,261) + 14\,.\,0,131 + 9\,.(-0,056) + 14\,.\,0,036 + 16\,.\,0,002] = 1,274$$

Como $G = 2\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} n_{ij}\,.\,\mathrm{Ln}\left(\frac{n_{ij}}{e_{ij}}\right) = 1,274 < 12,592 = \chi^2_{0,05\,,\,6}$ **se acepta la hipótesis nula, por tanto, no existe diferencia significativa entre los métodos de empaquetado.**

Asignatura.. Grupo..............................

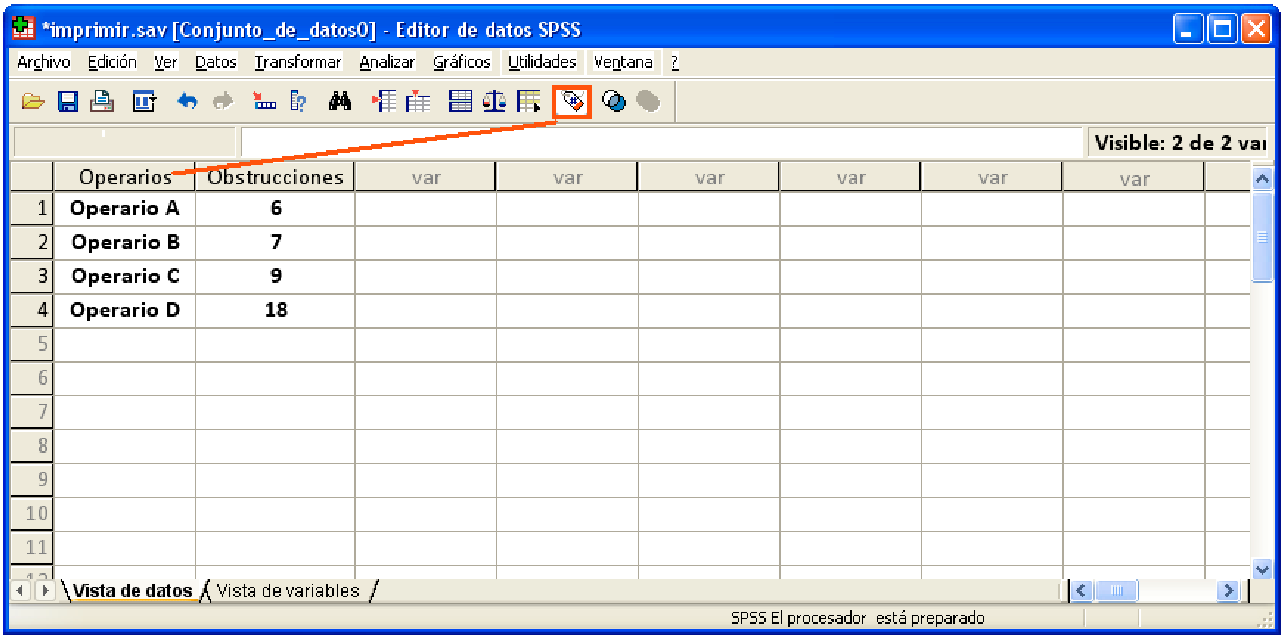
Apellidos .... Nombre..............................

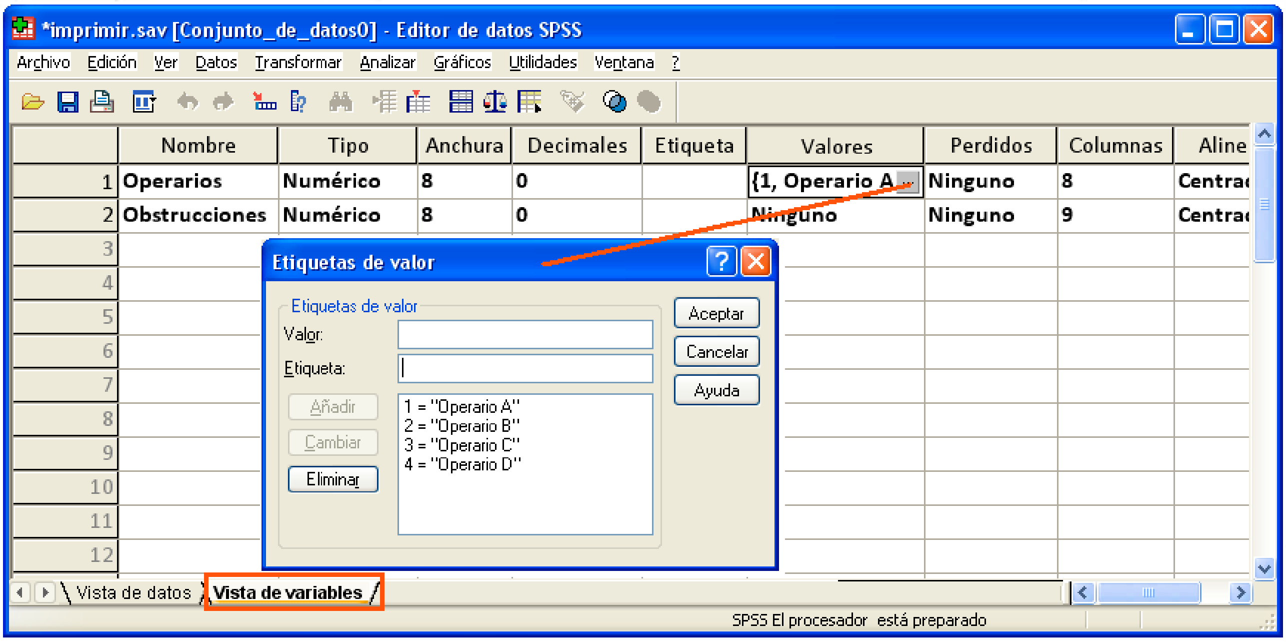
Ejercicio del día ....

Para comprobar si los operarios encontraban dificultades con una prensa manual de imprimir, se hizo una prueba a cuatro operarios anotando el número de atascos sufridos al introducir el mismo número de hojas, dando lugar a la siguiente tabla:

Operario	A	B	C	D
Obstrucciones	6	7	9	18

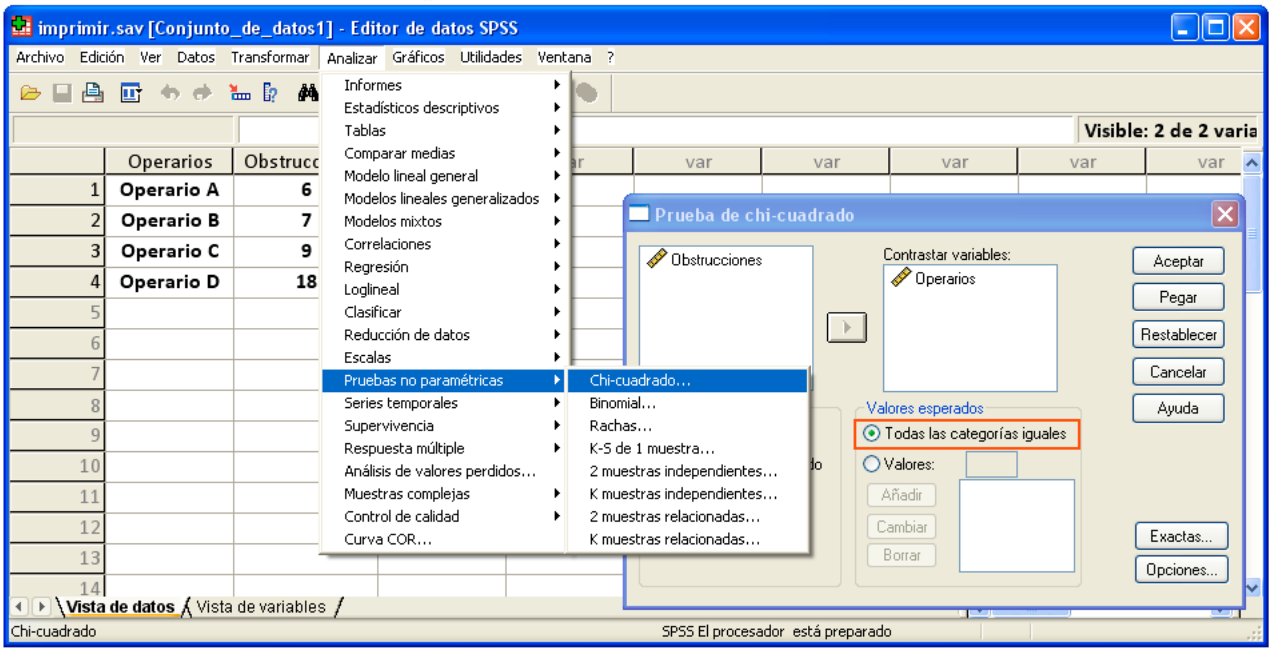
Con un nivel de significación del 5%, ¿existe diferencia entre los operarios?





UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....



	N observado	N esperado	Residual
Operario A	6	10	-4
Operario B	7	10	-3
Operario C	9	10	-1
Operario D	18	10	8
Total	40		

Estadísticos de contraste

	Operarios
Chi-cuadrado [a]	9
gl	3
Sig. asintót.	,029

a. 0 casillas (,0%) tienen frecuencias esperadas menores que 5. La frecuencia de casilla esperada mínima es 10,0.

El p_valor (Sig. asintótica) $= 0,029 < 0,05 = \alpha$ $\rightarrow$ Se rechaza la hipótesis nula que establece que no existe diferencia entre los operarios, con una significación $\alpha = 0,05$

Estableciendo la hipótesis nula H_0: 'No existe diferencia entre los operarios'

La probabilidad de que se atascase una hoja sería $1/4$ para todos los operarios.

De este modo, el número de atascos esperados para cada uno de ellos sería $e_i = 10 \quad i = 1, \cdots, 4$

Se elabora la tabla de contingencia 1 x 4:

Operario	A	B	C	D	Total
Obstrucciones	6 10	7 10	9 10	18 10	40 40

Se acepta la hipótesis nula, a un nivel de significación α si

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura.. Grupo..............................

Apellidos .... Nombre..............................

Ejercicio del día ....

$$\chi^2_{k-1} = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - e_i)^2}{e_i}}_{\text{estadístico contraste}} = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i^2}{e_i} - n \; < \; \underbrace{\chi^2_{\alpha,\, k-1}}_{\text{estadístico teórico}} \qquad k \equiv \text{número intervalos}$$

Estadístico contraste: $\chi^2_3 = \sum_{i=1}^{4} \frac{n_i^2}{e_i} - n = \frac{6^2}{10} + \frac{7^2}{10} + \frac{9^2}{10} + \frac{18^2}{10} - 40 = 9$

Estadístico teórico: $\chi^2_{0,05\,,\,3} = 7,815$

Siendo $\chi^2_3 = 9 > 7,815 = \chi^2_{0,05\,,\,3}$ se rechaza la hipótesis nula, concluyendo que existe diferencia significativa entre los operarios respecto al número de atascos en la prensa de imprimir.

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....

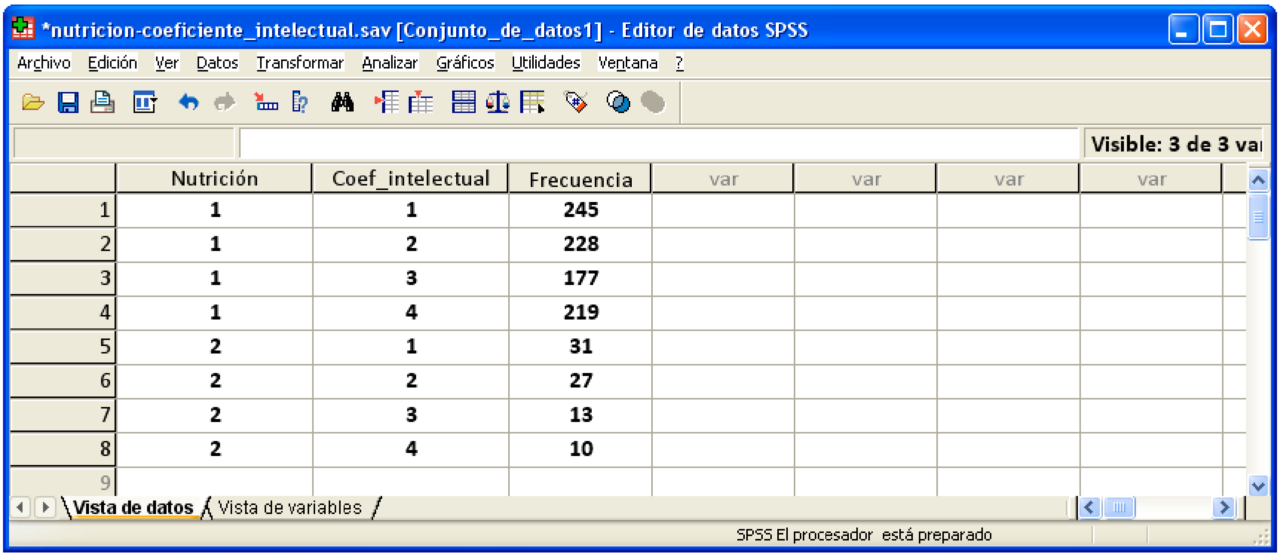
Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....

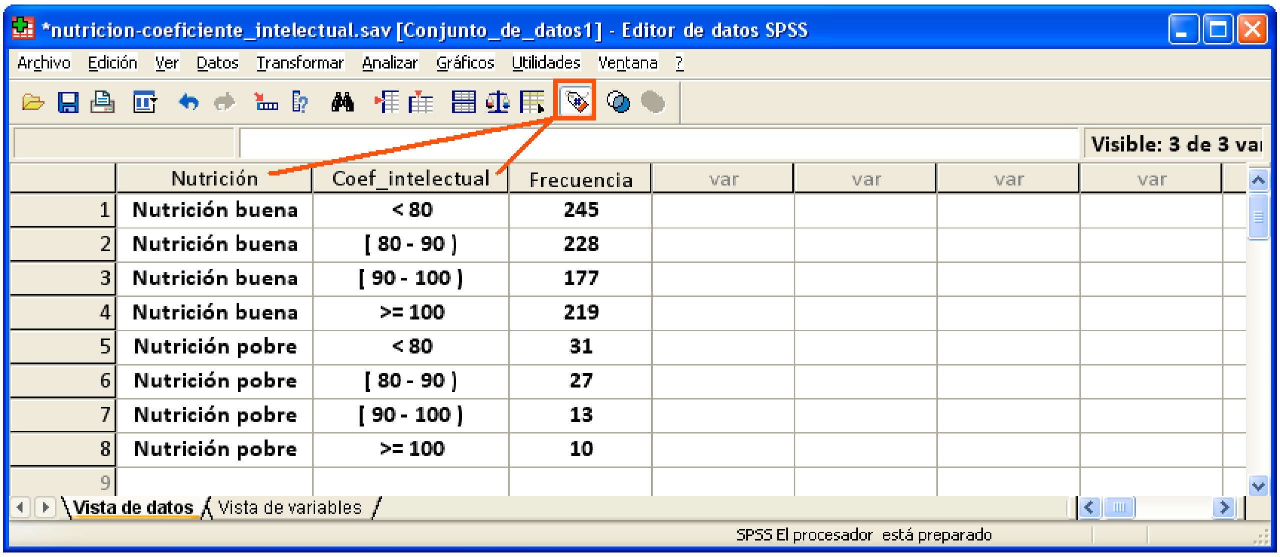
Novecientos cincuenta escolares se clasificaron de acuerdo a sus hábitos alimenticios y a su coeficiente intelectual:

	Coeficiente Intelectual			
	< 80	80 - 90	90 - 99	≥ 100
Nutrición buena	245	228	177	219
Nutrición pobre	31	27	13	10
Total	276	255	190	229

A un nivel de significación del 5%, se pide:
¿Hay relación entre las dos variables tabuladas?. Calcular los coeficientes Phi, V de Cramer y Coeficiente de contingencia.



	Nutrición	Coef_intelectual	Frecuencia	var	var	var	var
1	1	1	245				
2	1	2	228				
3	1	3	177				
4	1	4	219				
5	2	1	31				
6	2	2	27				
7	2	3	13				
8	2	4	10				
9							



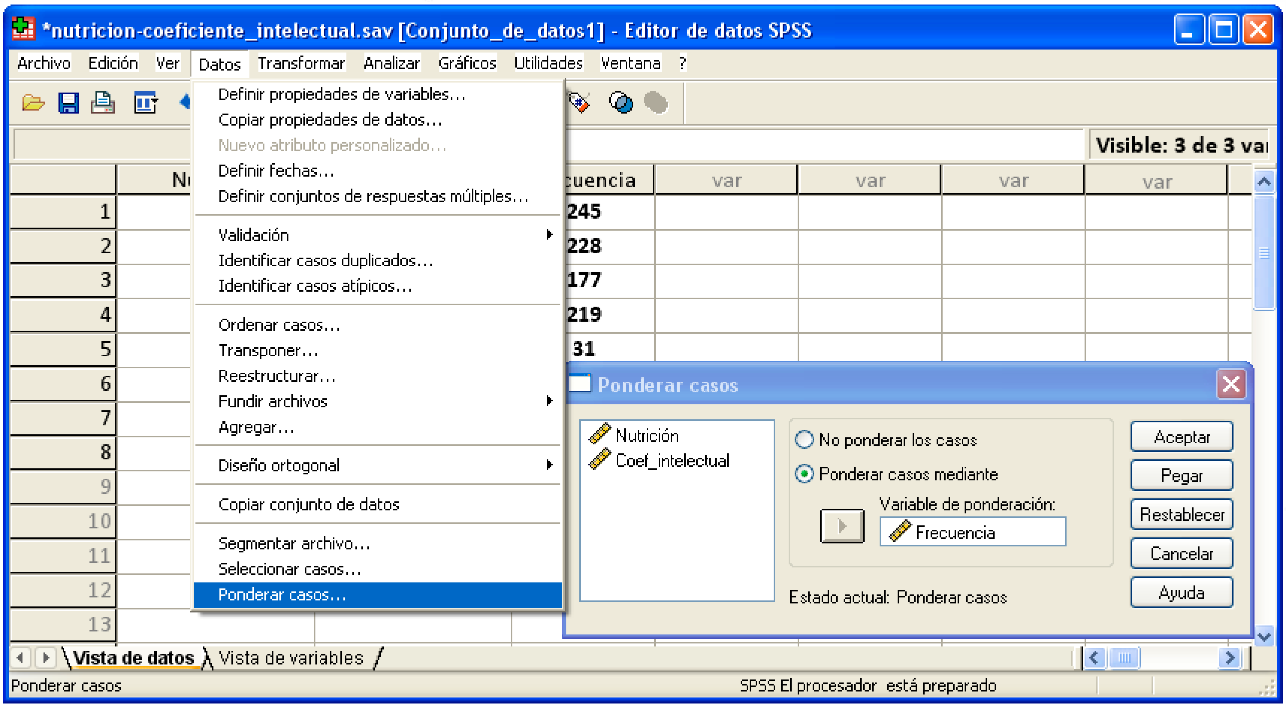
	Nutrición	Coef_intelectual	Frecuencia	var	var	var	var
1	Nutrición buena	< 80	245				
2	Nutrición buena	[80 - 90)	228				
3	Nutrición buena	[90 - 100)	177				
4	Nutrición buena	>= 100	219				
5	Nutrición pobre	< 80	31				
6	Nutrición pobre	[80 - 90)	27				
7	Nutrición pobre	[90 - 100)	13				
8	Nutrición pobre	>= 100	10				
9							

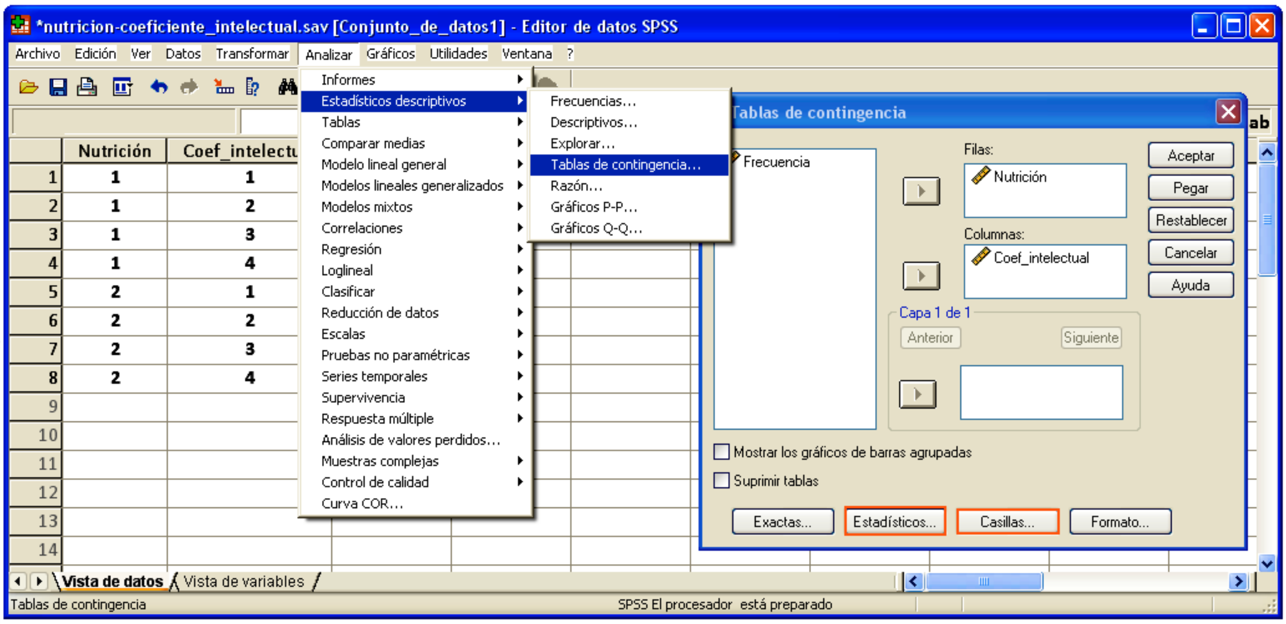
UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

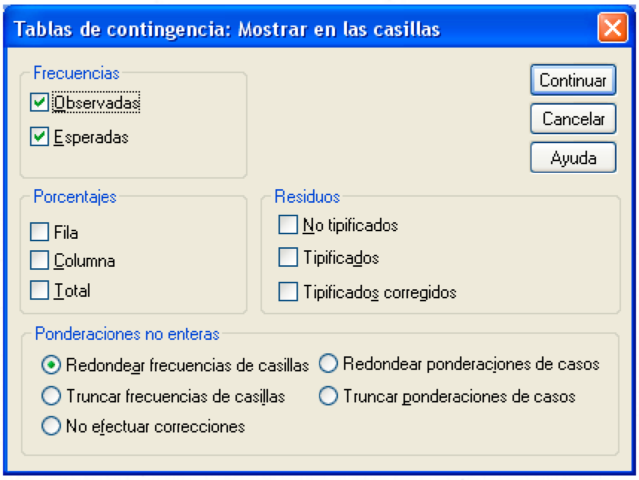
Asignatura .... Grupo ....

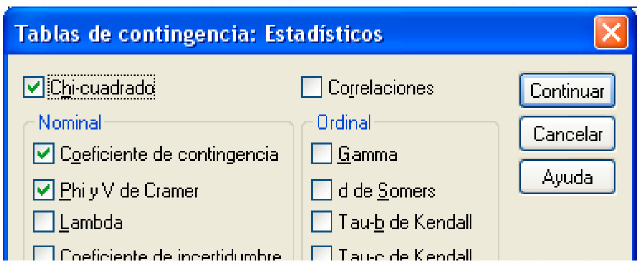
Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....









UAM UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

(IMPRESO EN PAPEL RECICLADO) UNICAMENTE PARA USO ESCOLAR

Tabla de contingencia Nutrición * Coef_intelectual

			Coef_intelectual				
			< 80	[80 - 90)	[90 - 100)	>= 100	Total
Nutrición	Nutrición buena	Recuento	245	228	177	219	869
		Frecuencia esperada	252,47	233,26	173,80	209,47	869
	Nutrición pobre	Recuento	31	27	13	10	81
		Frecuencia esperada	23,53	21,74	16,20	19,53	81
Total		Recuento	276	255	190	229	950
		Frecuencia esperada	276	255	190	229	950

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	9,751[a]	3	,021
Razón de verosimilitudes	10,506	3	,015
Asociación lineal por lineal	9,149	1	,002
N de casos válidos	950		

a. 0 casillas (,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 16,20.

En el contraste de Chi-cuadrado el p_valor (Sig. asintótica bilateral) $= 0,021 < 0,05 = \alpha$
En consecuencia, se rechaza la hipótesis nula de independencia entre los hábitos alimenticios y el coeficiente intelectual, habiendo, por tanto, dependencia estadística entre las variables.

En el contraste de Razón de verosimilitudes, más preciso que el contraste Chi-cuadrado, el p_valor $= 0,015 < 0,05 = \alpha$, rechazando la hipótesis nula de independencia entre la nutrición y el coeficiente intelectual.

Medidas simétricas

		Valor	Sig. aproximada
Nominal por nominal	Phi	,101	,021
	V de Cramer	,101	,021
	Coeficiente de contingencia	,101	,021
N de casos válidos		950	

a. Asumiendo la hipótesis alternativa.

b. Empleando el error típico asintótico basado en la hipótesis nula.

Las medidas nominales sólo aprovechan información nominal. Únicamente informan del grado de asociación existente, no de la dirección o naturaleza de la asociación.

Los coeficiente Phi, V de Cramer y Coeficiente de contingencia el p_valor $= 0,021 < 0,05 = \alpha$ con lo que se rechaza la hipótesis nula de independencia de las variables en estudio. Si bien existe una relación baja $r_{\phi} = V_{Cramer} = C = 0,101$

El grado de dependencia entre la nutrición y el coeficiente intelectual viene dada por el Coeficiente de Contingencia. El coeficiente de contingencia toma valores entre 0 y 1.
Un coeficiente de 0 indica independencia, mientras que cuando se apoxima a 1 indica una asociación perfecta.

El coeficiente de correlación Phi en las tablas 2x2 tiene el mismo valor que al coeficiente de correlación de Pearson. Su valor está determinado por la distribución de dos variables, fuera del rango típico de los coeficientes, para conseguir que el rango de valores se encontrase entre 0 y 1 se creó el Coeficiente de Contingencia.

El coeficiente V de Cramer incluye una pequeña modificación de la Phi. En las tablas 2x2 el valor de V_{Cramer} y Phi son idénticos. El coeficiente V_{Cramer} varía entre 0 y 1.
Cuando $V_{Cramer} = 0$ no hay relación entre las variables, cuando $V_{Cramer} = 1$ hay una relación perfecta, cuando $V_{Cramer} > 0,3$ se considera una correlación significativa.

Se trata de un contraste de independencia entre el coeficiente intelectual y los hábitos alimenticios.

Se establecen las hipótesis: $\begin{cases} H_0: \text{'Las variables analizadas son independientes'} \\ H_1: \text{'Existe dependencia entre las dos variables'} \end{cases}$

Se elabora la tabla de contingencia 2 x 4, donde $e_{ij} = \dfrac{n_{i\bullet} \times n_{\bullet j}}{n}$

	Coeficiente Intelectual < 80	$80 - 90$	$90 - 99$	≥ 100	$n_{i\bullet}$
Nutrición buena	245 $e_{11} = 252,47$ $g_{11} = -0,03$	228 $e_{12} = 233,26$ $g_{12} = -0,02$	177 $e_{13} = 173,80$ $g_{13} = 0,02$	219 $e_{14} = 209,47$ $g_{14} = 0,04$	869
Nutrición pobre	31 $e_{21} = 23,53$ $g_{21} = 0,28$	27 $e_{22} = 21,74$ $g_{22} = 0,22$	13 $e_{23} = 16,20$ $g_{23} = -0,22$	10 $e_{24} = 19,53$ $e_{24} = -0,67$	81
$n_{\bullet j}$	276	255	190	229	950

$$e_{11} = \frac{869 \,.\, 276}{950} = 252,47 \qquad e_{12} = \frac{869 \,.\, 255}{950} = 233,26 \qquad e_{13} = \frac{869 \,.\, 190}{950} = 173,80 \qquad e_{14} = \frac{869 \,.\, 229}{950} = 209,47$$

$$e_{21} = \frac{81 \,.\, 276}{950} = 23,53 \qquad e_{22} = \frac{81 \,.\, 255}{950} = 21,74 \qquad e_{23} = \frac{81 \,.\, 190}{950} = 16,20 \qquad e_{24} = \frac{81 \,.\, 229}{950} = 19,53$$

Estadístico de contraste: $\chi^2_{(2-1).(4-1)} = \chi^2_3 = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{4} \dfrac{n_{ij}^2}{e_{ij}} - n$

$$\chi_3^2=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{4}\frac{n_{ij}^2}{e_{ij}}-n=\frac{245^2}{252,47}+\frac{228^2}{233,26}+\frac{177^2}{173,80}+\frac{219^2}{209,47}+\frac{31^2}{23,53}+\frac{27^2}{21,74}+\frac{13^2}{16,20}+\frac{10^2}{19,53}-950=$$
$$=9,751$$

O bien,

$$\chi_3^2=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{4}\frac{(n_{ij}-e_{ij})^2}{e_{ij}}=\frac{(245-252,47)^2}{252,47}+\frac{(228-233,26)^2}{233,26}+\frac{(177-173,80)^2}{173,80}+\frac{(219-209,47)^2}{209,47}+$$
$$+\frac{(31-23,53)^2}{23,53}+\frac{(27-21,74)^2}{21,74}+\frac{(13-16,20)^2}{16,20}+\frac{(10-19,53)^2}{19,53}=9,751$$

Estadístico teórico: $\chi^2_{0,05,\,3}=7,815$

Como $\chi_3^2=9,751>7,815=\chi^2_{0,05,\,3}$ se rechaza la hipótesis nula, concluyendo hay dependencia estadística entre el coeficiente intelectual y la alimentación.

Estadístico de contraste razón de verosimilitud: $G=2\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3}n_{ij}\,.\,\text{Ln}\left(\frac{n_{ij}}{e_{ij}}\right)$

$g_{11}=\text{Ln}\left(\frac{245}{252,47}\right)=-0,03$ $\quad g_{12}=\text{Ln}\left(\frac{228}{233,26}\right)=-0,02$ $\quad g_{13}=\text{Ln}\left(\frac{177}{173,80}\right)=0,02$ $\quad g_{14}=\text{Ln}\left(\frac{219}{209,47}\right)=0,04$

$g_{21}=\text{Ln}\left(\frac{31}{23,53}\right)=0,28$ $\quad g_{22}=\text{Ln}\left(\frac{27}{21,74}\right)=0,22$ $\quad g_{23}=\text{Ln}\left(\frac{13}{16,20}\right)=-0,22$ $\quad g_{24}=\text{Ln}\left(\frac{10}{19,53}\right)=-0,67$

$$G=2\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{4}n_{ij}\,.\,\text{Ln}\left(\frac{n_{ij}}{e_{ij}}\right)=$$
$$=2\times[245\,.(-0,03)+228\,.(-0,02)+177\,.\,0,02+219\,.\,0,04+31\,.\,0,28+27\,.\,0,22$$
$$+13\,.(-0,22)+10\,.(-0,67)]=10,506$$

Como $G=2\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{4}n_{ij}\,.\,\text{Ln}\left(\frac{n_{ij}}{e_{ij}}\right)=10,506<12,592=\chi^2_{0,05,\,6}$ se acepta la hipótesis nula, por tanto, no existe diferencia significativa entre el coeficiente intelectual y la alimentación.

- El grado de dependencia se cuantifica mediante el Coeficiente de contingencia:

$$C=\sqrt{\frac{\chi_3^2}{\chi_3^2+n}}=\sqrt{\frac{9,571}{9,571+950}}=0,101$$

El grado de dependencia es del 10,1% por lo que la asociación entre las variables es baja.

En tablas de dimensión $k\times k$ el valor máximo que toma es $C_{\text{máximo}}=\sqrt{\frac{k-1}{k}}$

- **El coeficiente Phi tiene una interpretación similar al coeficiente de correlación de Pearson. En una tabla 2×2 se encuentra relacionado con el estadístico Chi-cuadrado de Pearson.**

La interpretación del coeficiente de correlación de Pearson y el coeficiente Phi se debe tomar con precaución, mientras que el coeficiente de correlación ρ varía entre -1 y 1 indicando cuando adquiere el valor 0 ausencia de relación. El coeficiente Phi tiene un máximo que está determinado por la distribución de dos variables.

Coeficiente Phi: $\phi = \sqrt{\dfrac{\chi_3^2}{n}} = \sqrt{\dfrac{9{,}571}{950}} = 0{,}101$

- **El coeficiente V_{Cramer} es un valor de medida independiente del tamaño de la muestra, medida simétrica para la intensidad de la relación entre dos o más variables de la escala nominal, cuando al menos una de las variables tiene por lo menos dos valores posibles.**

El rango de la V_{Cramer} se encuentra entre 0 y 1. Un valor $V_{Cramer} > 0{,}3$ es considerado como una correlación significativa. Cuando $V_{Cramer} = 0$ indica que no hay relación entre las variables, $V_{Cramer} = 1$ refleja que hay una relación perfecta, mientras que si $V_{Cramer} = 0{,}6$ hay una relación relativamente intensa.

$$V_{Cramer} = \sqrt{\frac{\chi_c^2}{n \,.\, \text{mín}(k-1\,,\, m-1)}} = \sqrt{\frac{\chi_3^2}{950 \,.\, \text{mín}(2-1\,,\, 4-1)}} = \sqrt{\frac{9{,}571}{950}} = 0{,}101$$

Hoja nº ....

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....

UNICAMENTE PARA USO ESCOLAR (IMPRESO EN PAPEL RECICLADO)