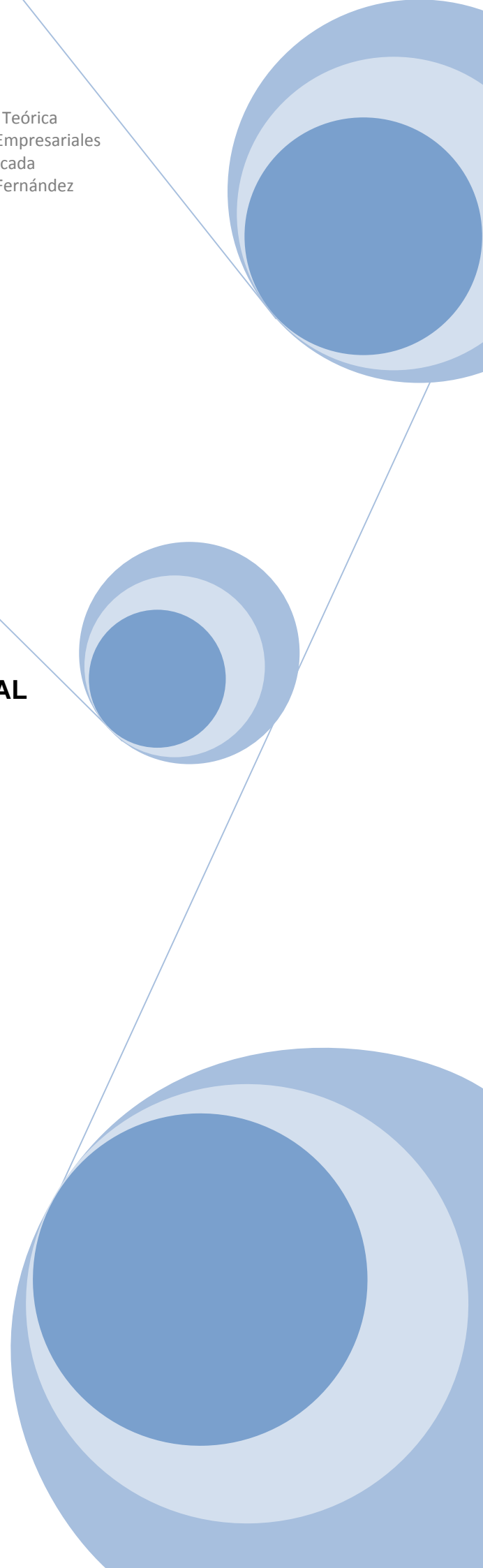




Gestión Aeronáutica: Estadística Teórica
Facultad Ciencias Económicas y Empresariales
Departamento de Economía Aplicada
Profesor: Santiago de la Fuente Fernández

EJERCICIOS RESUELTOS VARIABLE ALEATORIA UNIDIMENSIONAL





EJERCICIOS RESUELTOS VARIABLE ALEATORIA UNIDIMENSIONAL

Ejercicio 1.- Un experimento consiste en lanzar tres veces una moneda. Sea la variable aleatoria: $X = \text{"número de caras que se obtienen"}$. Se pide:

- Distribución de probabilidad de X
- Función de distribución de X . Representación gráfica
- Media, varianza y desviación típica de X
- Probabilidad de que salgan a lo sumo dos caras
- Probabilidad de que salgan al menos dos caras

Solución:

a) Espacio muestral: $\Omega = \{(c, c, c), (c, c, e), (c, e, c), (e, c, c), (c, e, e), (e, c, e), (e, e, c), (e, e, e)\}$

$$X(c, c, c) = 3 \qquad P(X = 3) = 1/8$$

$$X(c, c, e) = X(c, e, c) = X(e, c, c) = 2 \qquad P(X = 2) = 3/8$$

$$X(c, e, e) = X(e, c, e) = X(e, e, c) = 1 \qquad P(X = 1) = 3/8$$

$$X(e, e, e) = 0 \qquad P(X = 0) = 1/8$$

La distribución de probabilidad será:

$X = x_i$	$P(X = x_i) = p_i$	$x_i \cdot p_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot p_i$
$x_1 = 0$	$1/8$	0	0	0
$x_2 = 1$	$3/8$	$3/8$	1	$3/8$
$x_3 = 2$	$3/8$	$6/8$	4	$12/8$
$x_4 = 3$	$1/8$	$3/8$	9	$9/8$
	1	$12/8 = 1,5$		$24/8 = 3$

b) La función de distribución: $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i) = \sum_{x_i \leq x} p_i$

$$x < 0 \quad F(x) = P(X \leq x) = P(\emptyset) = 0$$

$$0 \leq x < 1 \quad F(x) = P(X \leq x) = P(X = 0) = 1/8$$

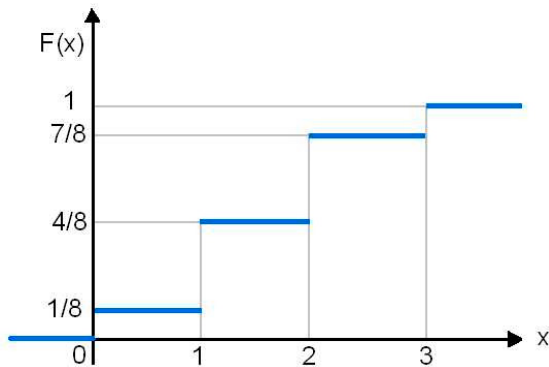
$$1 \leq x < 2 \quad F(x) = P(X \leq x) = P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) = 1/8 + 3/8 = 4/8$$

$$2 \leq x < 3 \quad F(x) = P(X \leq x) = P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 1/8 + 3/8 + 3/8 = 7/8$$

$$x = 3 \quad F(x) = P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 1$$

$$x > 3 \quad F(x) = P(X \leq x) = P(\Omega) = 1$$

$X = x_i$	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	1/8	3/8	3/8	1/8
$F(x) = P(X \leq x)$	1/8	4/8	7/8	1



$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1/8 & 0 \leq x < 1 \\ 4/8 & 1 \leq x < 2 \\ 7/8 & 2 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$$

c) Media, varianza y desviación típica de X

$$\text{Media: } \alpha_1 = \mu_x = E(X) = \sum_{i=1}^4 x_i \cdot P(X = x_i) = \sum_{i=1}^4 x_i \cdot p_i = \frac{12}{8} = 1,5$$

$$\alpha_2 = E(X^2) = \sum_{i=1}^4 x_i^2 \cdot P(X = x_i) = \sum_{i=1}^4 x_i^2 \cdot p_i = \frac{24}{8} = 3$$

$$\text{Varianza: } \sigma_x^2 = E(X - \mu_x)^2 = \sum_{i=1}^4 (x_i - \mu_x)^2 \cdot P(X = x_i) = \alpha_2 - \alpha_1^2$$

$$\sigma_x^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = 3 - 1,5^2 = 0,75$$

$$\text{Desviación típica: } \sigma_x = \sqrt{0,75} = 0,87$$

d) Probabilidad de que salgan a lo sumo dos caras

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$$

$$\text{o bien } P(X \leq 2) = F(2) = \frac{7}{8}$$

e) Probabilidad de que salgan al menos dos caras

$$P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\text{o bien } P(X \geq 2) = F(1) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Ejercicio 2.- La variable aleatoria: $X = \text{"número de hijos por familia de una ciudad"}$ tiene la siguiente distribución de probabilidad:

X	0	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	0,47	0,3	0,1	0,06	0,04	0,02	0,01

Se pide:

- Media o esperanza matemática. Significado
- Varianza y desviación típica
- Si el Ayuntamiento de la ciudad paga 2000 euros por hijo e $Y = 2000 \cdot X$, ¿cuál es la distribución de probabilidad?
- Media, varianza y desviación típica de Y

Solución:

a)

$X = x_i$	$P(X = x_i) = p_i$	$x_i \cdot p_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot p_i$
$x_1 = 0$	0,47	0	0	0
$x_2 = 1$	0,3	0,3	1	0,3
$x_3 = 2$	0,1	0,2	4	0,4
$x_4 = 3$	0,06	0,18	9	0,54
$x_5 = 4$	0,04	0,16	16	0,64
$x_6 = 5$	0,02	0,10	25	0,5
$x_7 = 6$	0,01	0,06	36	0,36
	1	1		2,74

$$\text{Media: } \alpha_1 = \mu_x = E(X) = \sum_{i=1}^7 x_i \cdot P(X = x_i) = \sum_{i=1}^7 x_i \cdot p_i = 1$$

Si se toma al azar una familia de la ciudad, el número de hijos que se espera que tenga por término medio es uno.

b) Varianza y desviación típica

$$\text{Varianza: } \sigma_x^2 = E(X - \mu_x)^2 = \sum_{i=1}^7 (x_i - \mu_x)^2 \cdot P(X = x_i) = \alpha_2 - \alpha_1^2$$

$$\alpha_2 = E(X^2) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 \cdot P(X = x_i) = \sum_{i=1}^7 x_i^2 \cdot p_i = 2,74$$

$$\sigma_x^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = 2,74 - 1^2 = 1,74$$

$$\text{Desviación típica: } \sigma_x = \sqrt{1,74} = 1,32$$

c) Distribución de probabilidad de la variable $Y = 2000 \cdot X$

$Y = y_j$	$P(Y = y_j) = p_j$
$y_1 = 0$	0,47
$y_2 = 2.000$	0,3
$y_3 = 4.000$	0,1
$x_4 = 6.000$	0,06
$y_5 = 8.000$	0,04
$y_6 = 10.000$	0,02
$y_7 = 12.000$	0,01
	1

d) Media, varianza y desviación típica de Y

$$\mu_Y = \mu_{2000X} = E(2000 \cdot X) = 2000 \cdot E(X) = 2000 \cdot 1 = 2.000$$

$$\sigma_Y^2 = \sigma_{2000X}^2 = \text{Var}(2000 \cdot X) = 2000^2 \cdot \text{Var}(X) = 2000^2 \cdot 1,74 = 6.960.000$$

$$\sigma_Y = \sqrt{6.960.000} = 2638,18$$

Ejercicio 3.- Completar la ley de probabilidad , conociendo que la esperanza matemática es 1,8

X	0	1	2	3
$P(X = x_i) = p_i$	0,2	a	b	0,3

Solución:

$$\bullet \sum_{i=1}^4 p_i = 0,2 + a + b + 0,3 = 1 \quad \mapsto \quad a + b = 0,5$$

$$\bullet \sum_{i=1}^4 x_i \cdot p_i = a + 2b + 0,9 = 1,8 \quad \mapsto \quad a + 2b = 0,9$$

$$\text{Resolviendo el sistema: } \begin{cases} a + b = 0,5 \\ a + 2b = 0,9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0,4 \\ a = 0,1 \end{cases}$$

Ejercicio 4.- Al lanzar cuatro monedas se considera el número de escudos obtenidos. De la variable aleatoria X así obtenida, se pide:

- Ley de probabilidad. Representación gráfica
- Función de distribución. Representación gráfica
- Esperanza matemática y varianza
- Mediana y moda de la distribución
- Probabilidad de obtener más de uno y menos de tres escudos

Solución:

a) Sea X = 'número de escudos en la tirada de cuatro monedas'

$$\Omega = \left\{ (c, c, c, c), (c, c, c, e), (c, c, e, c), (c, c, e, e), (c, e, c, c), (c, e, c, e), (e, c, c, c), (e, c, c, e), \right. \\ \left. (e, e, e, e), (e, e, e, c), (e, e, c, e), (e, e, c, c), (e, c, e, e), (e, c, e, c), (c, e, e, e), (c, e, e, c) \right\}$$

$$X(c, c, c, c) = 0 \qquad P(X = 0) = 1/16$$

$$X(c, c, c, e) = X(c, c, e, c) = X(c, e, c, c) = X(e, c, c, c) = 1 \qquad P(X = 1) = 4/16$$

$$X(c, c, e, e) = X(c, e, c, e) = X(e, c, e, c) = \\ X(e, e, c, c) = X(e, c, e, c) = X(c, e, c, e) = 2 \qquad P(X = 2) = 6/16$$

$$X(e, e, e, c) = X(e, e, c, e) = X(e, c, e, e) = X(c, e, e, e) = 3 \qquad P(X = 3) = 4/16$$

$$X(e, e, e, e) = 4 \qquad P(X = 4) = 1/16$$

La ley de probabilidad o función de cuantía:

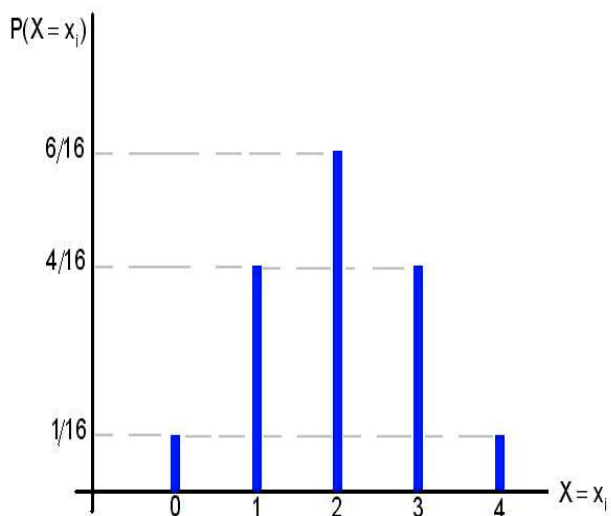
$X = x_i$	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	1/16	4/16	6/16	4/16	1/16

b) Función de distribución:

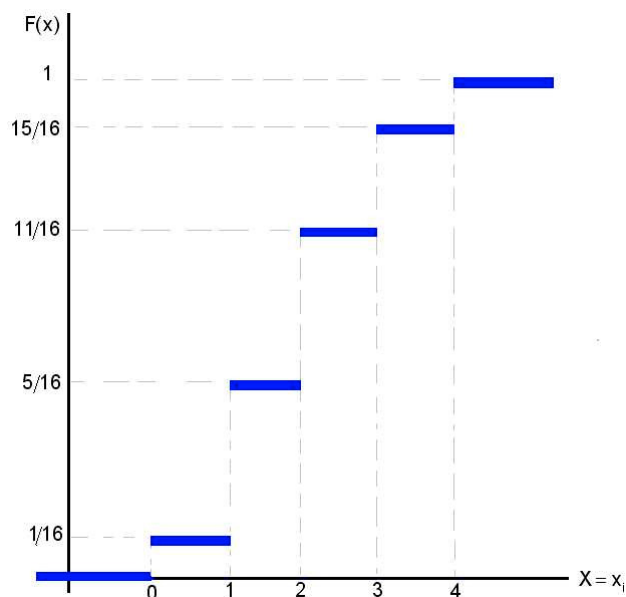
$X = x_i$	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	1/16	4/16	6/16	4/16	1/16
$F(x) = P(X \leq x)$	1/16	5/16	11/16	15/16	1

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1/16 & 0 \leq x < 1 \\ 5/16 & 1 \leq x < 2 \\ 11/16 & 2 \leq x < 3 \\ 15/16 & 3 \leq x < 4 \\ 1 & x \geq 4 \end{cases}$$

Ley de Probabilidad



Función de distribución



c) Cálculo de la esperanza matemática y varianza

$X = x_i$	0	1	2	3	4	
$P(X = x_i)$	1/16	4/16	6/16	4/16	1/16	
$x_i \cdot P(X = x_i)$	0	4/16	12/16	12/16	4/16	$\sum_{i=1}^5 x_i \cdot P(X = x_i) = 2$
$x_i^2 \cdot P(X = x_i)$	0	4/16	24/16	36/16	16/16	$\sum_{i=1}^5 x_i^2 \cdot P(X = x_i) = 5$

$$\text{Media: } \alpha_1 = \mu_X = E(X) = \sum_{i=1}^5 x_i \cdot P(X = x_i) = 2$$

$$\alpha_2 = E(X^2) = \sum_{i=1}^5 x_i^2 \cdot P(X = x_i) = 5$$

$$\text{Varianza: } \sigma_X^2 = \text{Var}(X) = \alpha_2 - \alpha_1^2 = 5 - 2^2 = 1$$

d) Observando la ley de probabilidad la moda $M_d = 2$

Observando la función de distribución la mediana $M_e = 2$ por ser $F(x = 2) = 11/16$ el primer valor que iguala o deja por debajo a 0,5

$$\text{e) } P(1 < X < 3) = P(X = 2) = \frac{6}{16} = 0,375 \quad \text{o bien} \quad P(1 < X < 3) = F(2) - F(1) = \frac{11}{16} - \frac{5}{16} = \frac{6}{16}$$

Ejercicio 5.- Calcular la media, varianza y coeficiente de variación de la variable aleatoria que tiene como función de distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 2 \\ 0,2 & 2 \leq x < 4 \\ 0,55 & 4 \leq x < 6 \\ 0,85 & 6 \leq x < 8 \\ 1 & x \geq 8 \end{cases}$$

Solución:

La ley de probabilidad o función de cuantía:

$X = x_i$	2	4	6	8
$P(X = x_i)$	0,2	0,35	0,30	0,15

Adviértase que la función de distribución $F(x)$ es una función acumulativa, por tanto:

$$P(X = 2) = F(2) - F(0) = 0,2 \qquad P(X = 4) = F(4) - F(2) = 0,55 - 0,2 = 0,35$$

$$P(X = 6) = F(6) - F(4) = 0,85 - 0,55 = 0,30 \qquad P(X = 8) = F(8) - F(6) = 1 - 0,85 = 0,15$$

Cálculo de la esperanza matemática y varianza

$X = x_i$	2	4	6	8	
$P(X = x_i)$	0,2	0,35	0,30	0,15	
$x_i \cdot P(X = x_i)$	0,4	1,4	1,8	1,2	$\sum_{i=1}^4 x_i \cdot P(X = x_i) = 4,8$
$x_i^2 \cdot P(X = x_i)$	0,8	5,6	10,8	9,6	$\sum_{i=1}^4 x_i^2 \cdot P(X = x_i) = 26,8$

$$\text{Media: } \alpha_1 = \mu_x = E(X) = \sum_{i=1}^4 x_i \cdot P(X = x_i) = 4,8$$

$$\alpha_2 = E(X^2) = \sum_{i=1}^4 x_i^2 \cdot P(X = x_i) = 26,8$$

$$\text{Varianza: } \sigma_x^2 = \text{Var}(X) = \alpha_2 - \alpha_1^2 = 26,8 - 4,8^2 = 3,76$$

$$\text{Desviación típica: } \sigma_x = \sqrt{3,76} = 1,94$$

$$\text{Coeficiente variación: } CV = \frac{\sigma_x}{\mu_x} = \frac{1,94}{4,8} = 0,40$$

Ejercicio 6.- La variable discreta X tiene como distribución de probabilidad

X	1	2	3	4
P(X = x _i)	0,30	0,25	0,10	0,35

Se realiza un cambio de origen hacia la izquierda de dos unidades y un cambio de escala de 3 unidades.

Se pide:

- Media y varianza de la X
- Media, varianza y coeficiente de variación de la variable transformada por el cambio de origen
- Media, varianza y coeficiente de variación de la variable transformada por el cambio de escala
- Media, varianza y coeficiente de variación de la variable transformada por el cambio de origen y escala

Solución:

a)

X = x _i	P(X = x _i) = p _i	x _i · p _i	x _i ²	x _i ² · p _i
x ₁ = 1	0,30	0,30	1	0,30
x ₂ = 2	0,25	0,50	4	1,00
x ₃ = 3	0,10	0,30	9	0,90
x ₄ = 4	0,35	1,40	16	5,60
	1	2,5		7,8

$$\text{Media: } \alpha_1 = \mu_X = E(X) = \sum_{i=1}^4 x_i \cdot P(X = x_i) = \sum_{i=1}^4 x_i \cdot p_i = 2,5$$

$$\alpha_2 = E(X^2) = \sum_{i=1}^4 x_i^2 \cdot P(X = x_i) = \sum_{i=1}^4 x_i^2 \cdot p_i = 7,8$$

$$\text{Varianza: } \sigma_X^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = 7,8 - 2,5^2 = 1,55$$

$$\text{Desviación típica: } \sigma_X = \sqrt{1,55} = 1,245$$

$$\text{Coeficiente de variación: } CV_X = \frac{\sigma_X}{\mu_X} = \frac{1,245}{2,5} = 0,498$$

b) Sea Y la variable transformada, al realizar un cambio de origen hacia la izquierda de dos unidades hay que restar 2, quedando: $Y = X - 0' = X - (-2) = X + 2$.

$$\text{Media: } \mu_Y = E(Y) = E[X + 2] = E(X + 2) = E(X) + 2 \quad \mapsto \quad \mu_Y = E(Y) = 2,5 + 2 = 4,5$$

Varianza: $\sigma_Y^2 = \text{Var}[X + 2] = \text{Var}(X) + \text{Var}(2) = \sigma_X^2 + 0 = \sigma_X^2 \quad \mapsto \quad \sigma_Y^2 = 1,55$

Desviación típica: $\sigma_Y = \sqrt{1,55} = 1,245$

Coefficiente de variación: $CV_Y = \frac{\sigma_Y}{\mu_Y} = \frac{\sigma_X}{\mu_X + 2} = \frac{1,245}{4,5} = 0,28 \neq CV_X$

En consecuencia, el cambio de origen afecta a la media y, en consecuencia, al coeficiente de variación.

c) Al realizar un cambio de escala de 3 unidades, la variable transformada es $Y = \frac{X}{3}$

Media: $\mu_Y = E(Y) = E\left[\frac{X}{3}\right] = \frac{1}{3} \cdot E(X) \quad \mapsto \quad \mu_Y = \frac{1}{3} \cdot \mu_X = \frac{2,5}{3}$

Varianza: $\sigma_Y^2 = \text{Var}\left[\frac{X}{3}\right] = \frac{1}{9} \cdot \text{Var}(X) = \frac{1}{9} \cdot \sigma_X^2 \quad \mapsto \quad \sigma_Y^2 = \frac{1}{9} \cdot 1,55 = \frac{1,55}{9}$

Desviación típica: $\sigma_Y = \sqrt{\frac{1,55}{9}} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{1,55} = \frac{1}{3} \cdot \sigma_X$

Coefficiente de variación: $CV_Y = \frac{\sigma_Y}{\mu_Y} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \sigma_X}{\frac{1}{3} \cdot \mu_X} = \frac{\sigma_X}{\mu_X} = CV_X = 0,498$

El cambio de escala afecta a la media y a la desviación típica de la misma forma, en consecuencia deja invariante al coeficiente de variación.

Resultados que se observan en la tabla, donde $Y = \frac{X}{3}$

$Y = y_j$	$P(Y = y_j) = p_j$	$y_j \cdot p_j$	y_j^2	$y_j^2 \cdot p_j$
$x_1 = 1/3$	0,30	0,1	1/9	0,3/9
$x_2 = 2/3$	0,25	0,5/3	4/9	1/9
$x_3 = 1$	0,10	0,1	1	0,1
$x_4 = 4/3$	0,35	1,4/3	16/9	5,6/9
	1	2,5/3		7,8/9

Media: $\alpha_1 = \mu_Y = E(Y) = \sum_{j=1}^4 y_j \cdot P(Y = y_j) = \sum_{j=1}^4 y_j \cdot p_j = \frac{2,5}{3} = \frac{1}{3} \cdot \mu_X$

$\alpha_2 = E(Y^2) = \sum_{j=1}^4 y_j^2 \cdot P(Y = y_j) = \sum_{j=1}^4 y_j^2 \cdot p_j = \frac{7,8}{9} = \frac{1}{9} \cdot E(Y^2)$

Varianza: $\sigma_Y^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = \frac{7,8}{9} - \left(\frac{2,5}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} \cdot \sigma_X^2 = \frac{1,55}{9}$

$$\text{Desviación típica: } \sigma_Y = \sqrt{\frac{1,55}{9}} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{1,55} = \frac{1}{3} \cdot \sigma_X$$

$$\text{Coeficiente de variación: } CV_Y = \frac{\sigma_Y}{\mu_Y} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \sigma_X}{\frac{1}{3} \cdot \mu_X} = \frac{\sigma_X}{\mu_X} = CV_X = 0,498$$

d) Al realizar simultáneamente un cambio de origen de 2 unidades a la izquierda y un cambio de escala de 3 unidades, la variable transformada es $Y = \frac{X+2}{3}$

$$\text{Media: } \mu_Y = E(Y) = E\left[\frac{X+2}{3}\right] = \frac{1}{3} \cdot E(X+2) = \frac{1}{3} \cdot E(X) + \frac{2}{3}$$

$$\text{con lo que, } \mu_Y = E(Y) = \frac{1}{3} \cdot E(X) + \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \cdot 2,5 + \frac{2}{3} = \frac{4,5}{3} = 1,5$$

$$\text{Varianza: } \sigma_Y^2 = \text{Var}(Y) = \text{Var}\left[\frac{X+2}{3}\right] = \frac{1}{9} \cdot \text{Var}(X+2) = \frac{1}{9} \cdot \text{Var}(X) = \frac{1}{9} \cdot \sigma_X^2$$

$$\text{Desviación típica: } \sigma_Y = \sqrt{\frac{1,55}{9}} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{1,55} = \frac{1}{3} \cdot \sigma_X$$

$$\text{Coeficiente de variación: } CV_Y = \frac{\sigma_Y}{\mu_Y} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \sigma_X}{\frac{1}{3} \cdot \mu_X + \frac{2}{3}} = \frac{\sigma_X}{\mu_X + 2} = \frac{1,245}{4,5} = 0,28 \neq CV_X$$

El cambio de origen y de escala afecta a la media y desviación típica de distinta forma, en consecuencia también queda afectado el coeficiente de variación

Resultados que se observan en la tabla, donde $Y = \frac{X+2}{3}$

$Y = y_j$	$P(Y = y_j) = p_j$	$y_j \cdot p_j$	y_j^2	$y_j^2 \cdot p_j$
$x_1 = 1$	0,30	0,30	1	0,30
$x_2 = 4/3$	0,25	1/3	16/9	4/9
$x_3 = 5/3$	0,10	0,5/3	25/9	2,5/9
$x_4 = 2$	0,35	0,70	4	1,4
	1	4,5/3		21,8/9

$$\text{Media: } \alpha_1 = \mu_Y = E(Y) = \sum_{j=1}^4 y_j \cdot P(Y = y_j) = \sum_{j=1}^4 y_j \cdot p_j = \frac{4,5}{3} = 1,5$$

$$\alpha_2 = E(Y^2) = \sum_{j=1}^4 y_j^2 \cdot P(Y = y_j) = \sum_{j=1}^4 y_j^2 \cdot p_j = \frac{21,8}{9}$$

$$\text{Varianza: } \sigma_Y^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = \frac{21,8}{9} - \left(\frac{4,5}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} \cdot \sigma_X^2 = \frac{1,55}{9}$$

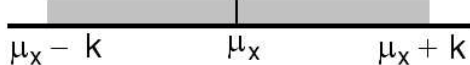
$$\text{Desviación típica: } \sigma_Y = \sqrt{\frac{1,55}{9}} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{1,55} = \frac{1}{3} \cdot \sigma_X$$

$$\text{Coeficiente de variación: } CV_Y = \frac{\sigma_Y}{\mu_Y} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \sigma_X}{\frac{1}{3} \cdot 4,5} = \frac{\sigma_X}{4,5} = \frac{1,245}{4,5} = 0,28 \neq CV_X$$

Ejercicio 7.- En un cine de verano hay instaladas 800 sillas, sabiendo que el número de asistentes es una variable aleatoria de media 600 y desviación típica 100.
¿Qué probabilidad existe de que el número de personas que vaya al cine un día cualquiera sea superior al número de sillas instaladas?

Solución:

Sea la variable aleatoria $X =$ "número de sillas del cine", donde $\mu = 600$, $\sigma = 100$

$$P[X > 800] < P[|X - \mu_x| > k] \leq \frac{\sigma^2}{k^2}$$


$$\mu_x + k = 800 \quad \mapsto \quad k = 800 - 600 = 200$$

$$P[X > 800] \leq \frac{100^2}{200^2} = \frac{1}{4} = 0,25$$

Ejercicio 8.- La variable discreta X tiene como distribución de probabilidad

$$P(X = k) = \frac{1}{10} \quad \text{siendo } k = 2, 3, \dots, 11$$

Se pide:

- Función de distribución
- $P(X > 7)$
- $P(X < 5)$
- $P(3 \leq X < 7)$

Solución:

$$\text{a) } F(x) = P(X \leq x) = \frac{x-1}{10} \quad \text{siendo } x = 2, 3, \dots, 11$$

Adviértase que entre dos valores consecutivos de la variable, la función de distribución toma el valor menor.

$$\text{b) } P(X > 7) = 1 - P(X \leq 7) = 1 - F(7) = 1 - \frac{6}{10} = \frac{4}{10} = 0,4$$

o bien, $P(X > 7) = P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) + P(X = 11) = \frac{4}{10} = 0,4$

c) $P(X < 5) = F(5) = \frac{4}{10} = 0,4$

o bien, $P(X < 5) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = \frac{4}{10} = 0,4$

d) $P(3 \leq X < 7) = F(7) - F(3) = \frac{6}{10} - \frac{2}{10} = \frac{4}{10} = 0,4$

o bien, $P(3 \leq X < 7) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) = \frac{4}{10} = 0,4$

Ejercicio 9.- Se desea conocer el número de automóviles que se deben poner a la venta durante un periodo determinado para que se satisfaga una demanda media de 300 unidades con una desviación típica de 100 unidades, con una probabilidad no inferior al 75%.

Solución:

Sea la variable aleatoria $X =$ "número de automóviles a la venta"

$$\mu = 300, \sigma = 100$$

Según Chebyshev:

$$P[|X - \mu_x| \leq k] \geq 1 - \frac{\sigma^2}{k^2} \longrightarrow P[\mu_x - k \leq X \leq \mu_x + k] \geq 1 - \frac{\sigma^2}{k^2}$$

$$P[300 - k \leq X \leq 300 + k] \geq 1 - \frac{\overbrace{100^2}^{0,75}}{k^2}$$

$$0,75 = 1 - \frac{100^2}{k^2} \quad \mapsto \quad \frac{100^2}{k^2} = 0,25 \quad \mapsto \quad k^2 = \frac{100^2}{0,25} \quad \mapsto \quad k = \sqrt{\frac{100^2}{0,25}} = 200$$

$$300 + k = 300 + 200 = 500 \text{ automóviles}$$

Ejercicio 10.- La demanda media de un producto es de 100 unidades con una desviación típica de 40 unidades. Calcular la cantidad del producto que se debe tener a la venta para satisfacer la demanda de forma que puedan ser atendidos al menos el 80% de los clientes.

Solución:

$$\mu = 100, \sigma = 40$$

Según Chebyshev:

$$P[|X - \mu_x| \leq k] \geq 1 - \frac{\sigma^2}{k^2} \longrightarrow P[\mu_x - k \leq X \leq \mu_x + k] \geq 1 - \frac{\sigma^2}{k^2}$$

$$P[100 - k \leq X \leq 100 + k] \geq 1 - \frac{40^2}{k^2}$$

$$0,80 = 1 - \frac{40^2}{k^2} \mapsto \frac{40^2}{k^2} = 0,20 \mapsto k^2 = \frac{40^2}{0,20} \mapsto k = \sqrt{\frac{40^2}{0,20}} = 89,44$$

Se deben poner a la venta 90 unidades.

Ejercicio 11.- La variable X = "número de centímetros a que un dardo queda del centro de la diana" al ser tirado por una persona tiene como función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} k & 0 < x < 10 \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

Se pide:

- Hallar k para que $f(x)$ sea función de densidad. Representarla
- Hallar la función de distribución. Representarla
- Media, varianza y desviación típica
- $P(X \leq 1)$
- Probabilidad de acertar en la diana

Solución:

a) Para que $f(x)$ sea función de densidad debe verificar:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{10} f(x) dx + \int_{10}^{\infty} f(x) dx = \int_0^{10} f(x) dx$$

la primera y tercera integral son cero al ser $f(x) = 0$ en esos intervalos.

$$1 = \int_0^{10} k dx = k \int_0^{10} dx = 10[x]_0^{10} = 10k \mapsto k = \frac{1}{10}$$

En consecuencia, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} & 0 < x < 10 \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$



b) La función de distribución se define $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$

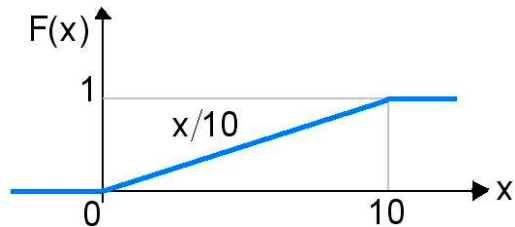
$$x < 0 \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = 0$$

$$0 \leq x \leq 10 \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^x f(t) dt = \int_0^x \frac{1}{10} dt = \frac{x}{10}$$

$$x > 10 \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^{10} f(t) dt + \int_{10}^x f(t) dt = \int_0^{10} \frac{1}{10} dt = 1$$

En consecuencia,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x}{10} & 0 \leq x \leq 10 \\ 1 & x > 10 \end{cases}$$



c) Media

$$\alpha_1 = \mu_x = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^{10} x \cdot \frac{1}{10} \cdot dx = \frac{1}{10} \int_0^{10} x dx = \frac{1}{10} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{10} = 5 \text{ cm}$$

Varianza: $\sigma_x^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2$

$$\alpha_2 = E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^{10} x^2 \cdot \frac{1}{10} \cdot dx = \frac{1}{10} \int_0^{10} x^2 dx = \frac{1}{10} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{10} = \frac{1}{10} \left[\frac{1000}{3} - 0 \right] = \frac{100}{3}$$

$$\sigma_x^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = \frac{100}{3} - 5^2 = \frac{25}{3} \text{ cm}^2$$

Desviación típica: $\sigma_x = \sqrt{\frac{25}{3}} = 2,9 \text{ cm}$

$$d) P(X \leq 1) = F(1) = \frac{1}{10}$$

$$\text{o también, } P(X \leq 1) = \int_0^1 \frac{1}{10} dx = \frac{1}{10} \int_0^1 dx = \frac{1}{10} [x]_0^1 = \frac{1}{10}$$

e) Probabilidad de acertar en la diana: $P(X = 0) = 0$ por ser una variable continua

$$P(X = 0) = \int_0^0 f(x) dx = \int_0^0 \frac{1}{10} dx = \frac{1}{10} \int_0^0 dx = 0$$

Ejercicio 12.- Se ha verificado que la variable X = "peso en kilos de los niños al nacer" es una variable aleatoria continua con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} kx & 2 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

Se pide:

- Hallar k para que $f(x)$ sea función de densidad. Representarla
- Hallar la función de distribución. Representarla
- Media, varianza y desviación típica
- Probabilidad de que un niño elegido al azar pese más de 3 kilos
- Probabilidad de que pese entre 2 y 3,5 kilos
- Qué debe pesar un niño para tener un peso igual o inferior al 90% de los niños

Solución:

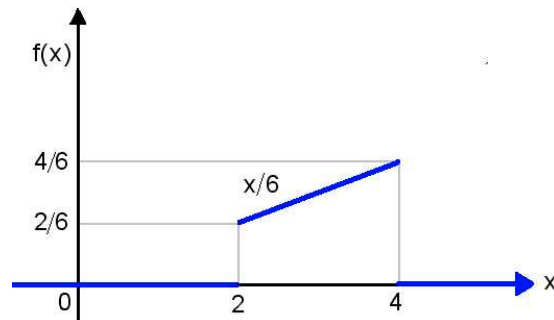
a) Para que $f(x)$ sea función de densidad debe verificar:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx + \int_4^{\infty} f(x) dx = \int_2^4 f(x) dx$$

La primera y tercera integral son cero al ser $f(x) = 0$ en esos intervalos.

$$1 = \int_2^4 f(x) dx = \int_2^4 kx dx = k \int_2^4 x dx = k \left[\frac{x^2}{2} \right]_2^4 = k \left[\frac{16}{2} - \frac{4}{2} \right] = 6k \quad \mapsto \quad k = \frac{1}{6}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{6} & 2 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$



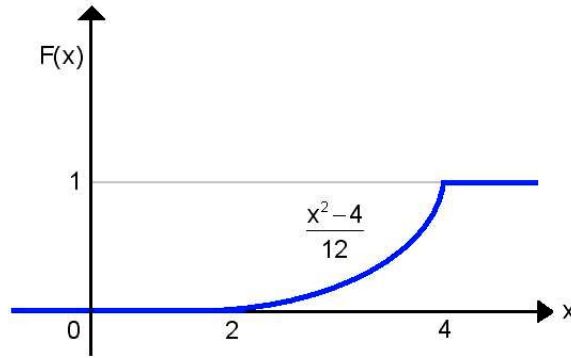
b) La función de distribución se define $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$

$$x < 2 \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = 0$$

$$2 \leq x \leq 4 \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_2^x f(t) dt = \int_2^x \frac{t}{6} dt = \frac{1}{6} \left[\frac{t^2}{2} \right]_2^x = \frac{1}{6} \left[\frac{x^2 - 4}{2} \right] = \frac{x^2 - 4}{12}$$

$$x > 4 \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_2^4 f(t) dt + \int_4^x f(t) dt = \int_2^4 \frac{t}{6} dt = \frac{1}{6} \left[\frac{t^2}{2} \right]_2^4 = \frac{1}{6} \left[\frac{16 - 4}{2} \right] = 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 2 \\ \frac{x^2 - 4}{12} & 2 \leq x \leq 4 \\ 1 & x > 4 \end{cases}$$



c) Media

$$\alpha_1 = \mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_2^4 x \cdot \frac{x}{6} dx = \frac{1}{6} \int_2^4 x^2 dx = \frac{1}{6} \left[\frac{x^3}{3} \right]_2^4 = \frac{1}{6} \left[\frac{64}{3} - \frac{8}{3} \right] = \frac{56}{18} = 3,1 \text{ kilos}$$

Varianza: $\sigma_X^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2$

$$\alpha_2 = E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_2^4 x^2 \cdot \frac{x}{6} dx = \frac{1}{6} \int_2^4 x^3 dx = \frac{1}{6} \left[\frac{x^4}{4} \right]_2^4 = \frac{1}{6} \left[\frac{256}{4} - \frac{16}{4} \right] = 10 \text{ kilos}^2$$

$$\sigma_X^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = 10 - 3,1^2 = 0,39 \text{ kilos}^2$$

Desviación típica: $\sigma_X = \sqrt{0,39} = 0,62 \text{ kilos}$

$$d) P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - F(3) = 1 - \frac{3^2 - 4}{12} = 1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12} = 0,58$$

$$\text{o también, } P(X > 3) = \int_3^4 f(x) dx = \int_3^4 \frac{x}{6} dx = \frac{1}{6} \left[\frac{x^2}{2} \right]_3^4 = \frac{1}{6} \left(8 - \frac{9}{2} \right) = \frac{7}{12} = 0,58$$

$$e) P(2 \leq X \leq 3,5) = F(3,5) - F(2) = \frac{3,5^2 - 4}{12} - 0 = 0,6875$$

$$P(2 \leq X \leq 3,5) = \int_2^{3,5} f(x) dx = \int_2^{3,5} \frac{x}{6} dx = \frac{1}{6} \left[\frac{x^2}{2} \right]_2^{3,5} = \frac{1}{6} \left(\frac{12,25}{2} - \frac{4}{2} \right) = \frac{8,25}{12} = 0,6875$$

f) Sea k el peso del niño, se tiene:

$$F(k) = P(X \leq k) = 0,9 \longrightarrow \frac{k^2 - 4}{12} = 0,9 \Rightarrow k^2 - 4 = 10,8 \Rightarrow k^2 = 14,8$$

$k = \sqrt{14,8} = 3,85$, es decir, el niño debe pesar 3,85 kilos para tener para tener al 90% de los niños con un peso igual o inferior.

Ejercicio 13.- Gran número de fenómenos aeronáuticos tienen asociada una variable aleatoria con ley de probabilidad:

$$f(x) = \begin{cases} k e^{-kx} & 0 < x < \infty \quad k > 0 \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

Se pide:

- ¿Puede tomar k cualquier valor?
- Para $k = 0,1$ representar la función de densidad, la función de distribución y su gráfica
- Siendo $k = 0,1$ hallar $P(X > 10)$
- Para $k = 0,1$ calcular $P(50 < X \leq 100)$

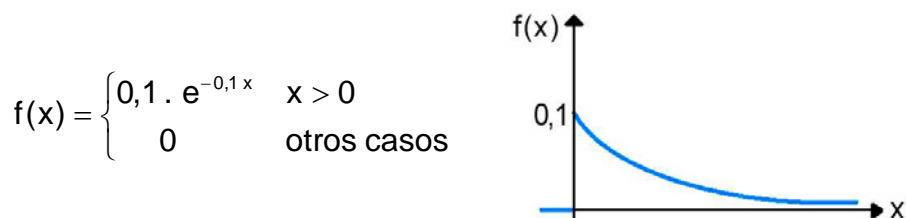
Solución:

a) Para que $f(x)$ sea función de densidad debe verificar:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{\infty} f(x) dx = \int_0^{\infty} k e^{-kx} dx = - \int_0^{\infty} -k e^{-kx} dx = - \left[e^{-kx} \right]_0^{\infty} = - \left[\frac{1}{e^{kx}} \right]_0^{\infty} = 1$$

La función de densidad no depende del valor del parámetro k, pudiendo tomar éste cualquier valor positivo.

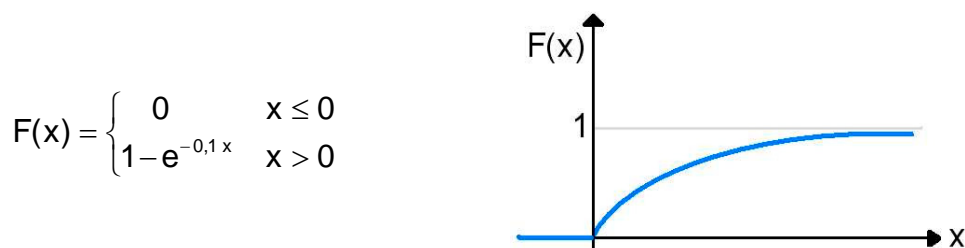
b) La función de densidad para $k = 0,1$ será:



La función de distribución se define $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$

$$x \leq 0 \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = 0$$

$$x > 0 \quad F(x) = \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^x f(t) dt = \int_0^x 0,1 \cdot e^{-0,1t} dt = - \int_0^x -0,1 \cdot e^{-0,1t} dt = - \left[e^{-0,1t} \right]_0^x = - \left[\frac{1}{e^{0,1t}} \right]_0^x = - \left(\frac{1}{e^{0,1x}} - 1 \right) = 1 - e^{-0,1x}$$



$$c) P(X > 10) = 1 - P(X \leq 10) = 1 - F(10) = 1 - (1 - e^{-0,1 \cdot 10}) = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$d) P(50 < X \leq 100) = F(100) - F(50) = (1 - e^{-0,1 \cdot 100}) - (1 - e^{-0,1 \cdot 50}) = -e^{-10} + e^{-5} = \frac{1}{e^5} - \frac{1}{e^{10}}$$

Ejercicio 14.- Una variable aleatoria continua X tiene por función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & 0 \leq x < 1 \\ x-1 & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{otros casos} \end{cases}$$

Se pide:

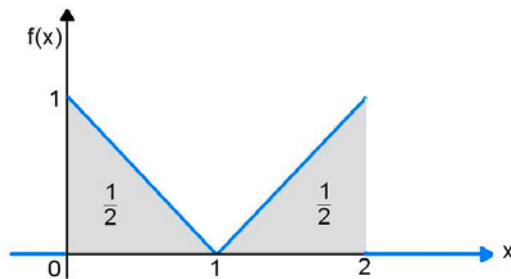
a) Representa la función de densidad

b) Hallar la función de distribución y su gráfica

$$c) P(0 \leq X \leq 1) \quad P(-2 \leq X \leq 2) \quad P\left(\frac{1}{2} \leq X < \infty\right)$$

Solución:

a)



Se observa que el área encerrada es igual a la unidad

b) La función de distribución se define $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$

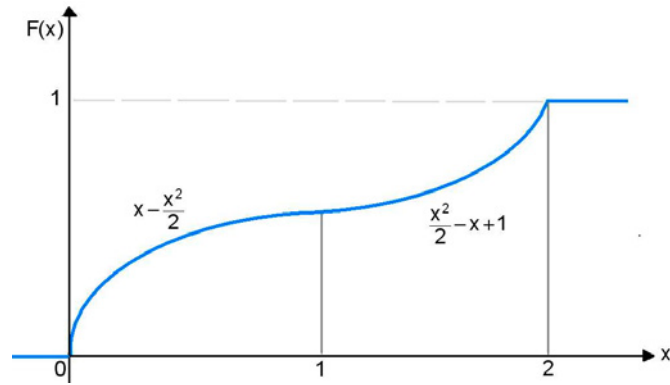
$$x < 0 \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = 0$$

$$0 \leq x < 1 \quad F(x) = \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^x f(t) dt = \int_0^x (1-t) dt = \left[t - \frac{t^2}{2} \right]_0^x = x - \frac{x^2}{2}$$

$$1 \leq x \leq 2 \quad F(x) = \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^1 f(t) dt + \int_1^x f(t) dt = \int_0^1 (1-t) dt + \int_1^x (t-1) dt = \left[t - \frac{t^2}{2} \right]_0^1 + \left[\frac{t^2}{2} - t \right]_1^x = \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left[\left(\frac{x^2}{2} - x \right) - \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \right] = \frac{x^2}{2} - x + 1$$

$$x > 2 \quad F(x) = \int_0^1 (1-t) dt + \int_1^2 (t-1) dt = \left[t - \frac{t^2}{2} \right]_0^1 + \left[\frac{t^2}{2} - t \right]_1^2 = 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x - \frac{x^2}{2} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{x^2}{2} - x + 1 & 1 \leq x \leq 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$



c) $P(0 \leq X \leq 1)$ $P(-2 \leq X \leq 2)$ $P\left(\frac{1}{2} \leq X < \infty\right)$

$$P(0 \leq X \leq 1) = F(1) - F(0) = \left(\frac{1}{2} - 1 + 1\right) - 0 = \frac{1}{2}$$

$$P(-2 \leq X \leq 2) = F(2) - F(-2) = \left(\frac{4}{2} - 2 + 1\right) - 0 = 1$$

$$P\left(\frac{1}{2} \leq X < \infty\right) = F(\infty) - F\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1/4}{2}\right) = \frac{5}{8}$$

Ejercicio 15.- Una variable aleatoria continua X tiene por función de distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x^2}{2} & 0 \leq x \leq 1 \\ 2x - \frac{x^2}{2} - 1 & 1 < x \leq 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$

Se pide:

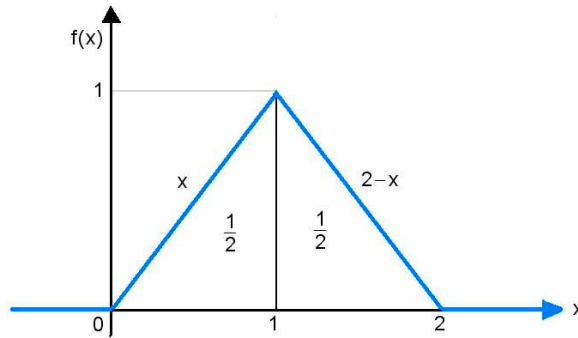
- Hallar la función de distribución y representarla
- Media, varianza, desviación típica y coeficiente de variación
- $P\left(\frac{1}{2} < X \leq \frac{3}{2}\right)$

Solución:

- La función de densidad es la derivada de la función de distribución en los puntos donde exista la derivada, entonces:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & 1 < x \leq 2 \\ 0 & x > 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x & 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{otros valores} \end{cases}$$



b) Media

$$\begin{aligned} \alpha_1 = \mu_x = E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^1 x \cdot x \cdot dx + \int_1^2 x \cdot (2-x) \cdot dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (2x - x^2) \cdot dx = \\ &= \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 + \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \frac{1}{3} + \left(4 - \frac{8}{3} \right) - \left(1 - \frac{1}{3} \right) = 1 \end{aligned}$$

Varianza: $\sigma_x^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2$

$$\begin{aligned} \alpha_2 = E(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^1 x^2 \cdot x \cdot dx + \int_1^2 x^2 \cdot (2-x) \cdot dx = \int_0^1 x^3 dx + \int_1^2 (2x^2 - x^3) \cdot dx = \\ &= \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 + \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_1^2 = \frac{1}{4} + \left(\frac{16}{3} - \frac{16}{4} \right) - \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{14}{12} = \frac{7}{6} \end{aligned}$$

$$\sigma_x^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = \frac{7}{6} - 1^2 = \frac{1}{6}$$

Desviación típica: $\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{6}} = 0,41$

Coefficiente variación: $CV_x = \frac{\sigma_x}{\mu_x} = \frac{0,41}{1} = 0,41$

$$c) P\left(\frac{1}{2} < X \leq \frac{3}{2}\right) = F\left(\frac{3}{2}\right) - F\left(\frac{1}{2}\right) = \left(2 \cdot \frac{3}{2} - \frac{(3/2)^2}{2} - 1 \right) - \left(\frac{(1/2)^2}{2} \right) = 3 - \frac{9}{8} - 1 - \frac{1}{8} = \frac{3}{4} = 0,75$$

Ejercicio 16.- Una variable aleatoria continua X tiene por función de distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ x-1 & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

- Calcular la función de densidad o función de cuantía
- Calcular la media, mediana y coeficiente de variación

Solución:

- La función de densidad o función de cuantía es la derivada de la función de distribución en los puntos donde exista la derivada, entonces:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1 & 1 \leq x < 2 \\ 0 & x \geq 2 \end{cases} \longrightarrow f(x) = \begin{cases} 1 & 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\text{b) Media: } \alpha_1 = \mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_1^2 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$$

- La Mediana de una distribución es el valor que deja el 50% de la distribución a la derecha y el otro 50% a la izquierda, por lo que:

$$\begin{cases} F(M_e) = 0,5 \Rightarrow M_e - 1 = 0,5 \Rightarrow M_e = 1,5 \\ \int_1^{M_e} f(x) dx = 0,5 \Rightarrow \int_1^{M_e} dx = 0,5 \Rightarrow [x]_1^{M_e} = 0,5 \Rightarrow M_e - 1 = 0,5 \Rightarrow M_e = 1,5 \end{cases}$$

- Coeficiente de variación: $CV_X = \frac{\sigma_X}{\mu_X}$

$$\alpha_2 = E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_1^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

$$\sigma_X^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = \frac{7}{3} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{7}{3} - \frac{9}{4} = \frac{1}{12} \Rightarrow \sigma_X = \sqrt{\frac{1}{12}} = 0,08$$

$$CV_X = \frac{\sigma_X}{\mu_X} = \frac{0,08}{1,5} = 0,05$$

Ejercicio 17.- La función de densidad de una variable aleatoria es:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases} \quad \text{sabiendo que } P\left[\frac{1}{2} < x < 1\right] = 0,1666.$$

Determinar a y b.

Solución:

Hay que calcular dos parámetros (a y b), por lo que se necesitan dos ecuaciones:

- Por ser función de densidad:

$$1 = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 (ax^2 + b) dx = \left[a \frac{x^3}{3} + bx \right]_0^2 = \frac{8a}{3} + 2b \quad \mapsto \quad 8a + 6b = 3$$

- $P\left[\frac{1}{2} \leq x \leq 1\right] = \int_{1/2}^1 f(x) dx = \int_{1/2}^1 (ax^2 + b) dx = \left[a \frac{x^3}{3} + bx \right]_{1/2}^1 = 0,1666$, con lo que:

$$\left[a \frac{x^3}{3} + bx \right]_{1/2}^1 = \left[\frac{a}{3} + b \right] - \left[\frac{a}{24} + \frac{b}{2} \right] = \frac{7a}{24} + \frac{b}{2} = 0,1666 \quad \mapsto \quad 7a + 12b \approx 4$$

en consecuencia,

$$\begin{cases} 8a + 6b = 3 \\ 7a + 12b = 4 \end{cases} \quad \mapsto \quad \begin{cases} 16a + 12b = 6 \\ 7a + 12b = 4 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \boxed{a = \frac{2}{9} = 0,22} \quad 6b = 3 - \frac{16}{9} = \frac{11}{9} \quad \mapsto \quad \boxed{b = \frac{11}{54} = 0,20}$$

Ejercicio 18.- La función de distribución asociada a la producción de una máquina, en miles de unidades, es del tipo:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x(2-x) & 0 \leq x \leq k \\ 1 & x > k \end{cases}$$

- Determinar k para que sea función de distribución
- Hallar la función de densidad
- Calcular la media, mediana, moda y varianza de la producción
- Hallar $P(X < 0,5)$ y $P(X > 0,25)$

Solución:

a) Para que sea función de distribución se debe verificar:

$$1 = \lim_{x \rightarrow k^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow k^-} F(x) \quad \mapsto \quad \lim_{x \rightarrow k^-} x(x-2) = k(k-2) = 1 \quad \mapsto \quad k^2 - 2k + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 1$$

En consecuencia, la función de distribución es:
$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x(2-x) & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

b) La función de densidad o función de cuantía es la derivada de la función de distribución en los puntos donde exista la derivada.

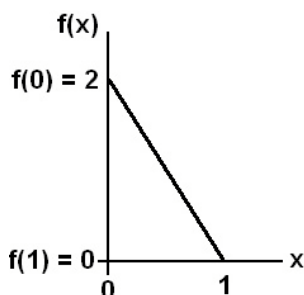
$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 2-2x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases} \quad \longrightarrow \quad f(x) = \begin{cases} 2-2x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

c) Media:

$$\alpha_1 = \mu_x = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^1 x(2-2x) dx = \int_0^1 (2x - 2x^2) dx = \left[x^2 - \frac{2x^3}{3} \right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

• Para calcular la Moda hay que ver el valor que hace mínima la función de densidad o de cuantía, es decir:

$$f(x) = \begin{cases} 2-2x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad \mapsto \quad f'(x) = \begin{cases} -2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$



La derivada de la función de cuantía $f'(x) = -2 < 0$, por lo que se trata de una función decreciente y toma el valor máximo en el extremo del intervalo $[0, 1]$, por tanto la moda $M_d = 0$

$f(1) = 0 \leq f(x) \leq f(0) = 1$, con lo que $M_d = 0$

- La Mediana de una distribución es el valor que deja el 50% de la distribución a la derecha y el otro 50% a la izquierda, por lo que:

$$F(M_e) = 0,5 \Rightarrow M_e(2 - M_e) = 0,5 \Rightarrow M_e^2 - 2M_e + 0,5 = 0 \Rightarrow 2M_e^2 - 4M_e + 1 = 0$$

$$2M_e^2 - 4M_e + 1 = 0 \mapsto M_e = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 8}}{4} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{4} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

De las dos soluciones se rechaza aquella que es mayor que 1, por lo que la Mediana es:

$$M_e = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

- La Varianza de la producción: $\sigma_x^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2$

$$\alpha_2 = E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^1 x^2 (2 - 2x) dx = \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{2} \right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$\sigma_x^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}$$

d) Función de distribución $F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x(2 - x) & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$

$$P(X < 0,5) = P(X \leq 0,5) = F(0,5) = 0,5(2 - 0,5) = 0,75$$

$$P(X > 0,25) = 1 - P(X \leq 0,25) = 1 - F(0,25) = 1 - 0,25(2 - 0,25) = 0,5625$$

También mediante la función de cuantía: $f(x) = \begin{cases} 2 - 2x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

$$P(X < 0,5) = \int_0^{0,5} f(x) dx = \int_0^{0,5} (2 - 2x) dx = [2x - x^2]_0^{0,5} = 1 - 0,25 = 0,75$$

$$P(X > 0,25) = \int_{0,25}^1 f(x) dx = \int_{0,25}^1 (2 - 2x) dx = [2x - x^2]_{0,25}^1 = 1 - (0,5 - 0,0625) = 0,5625$$

Ejercicio 19.- Dada la función $f(x) = e^{-2x}$

- Comprobar si puede ser función de densidad de una variable aleatoria X cuando su campo de variación es el intervalo $x \geq 0$
- En caso de que no lo pueda ser, qué modificaciones habría que introducir para que lo fuera.

Solución:

- Para que sea función de densidad, debe cumplir dos condiciones en el campo de variación de la variable aleatoria:

- $f(x)$ no puede ser negativa
- La integral de $f(x)$ en el campo de variación es 1

• $f(x) = e^{-2x} \geq 0 \quad \mapsto \quad L e^{-2x} \geq L 0 \Rightarrow -2x > -\infty \Rightarrow x < \infty$ es positiva

• $\int_0^{\infty} e^{-2x} dx = \left[-\frac{1}{2} e^{-2x} \right]_0^{\infty} = \left[0 + \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{2} \neq 1$. No se cumple, luego la función dada no es de densidad en el intervalo.

- Para que sea función de densidad, se define $f(x) = k e^{-2x}$

$$\int_0^{\infty} k e^{-2x} dx = k \int_0^{\infty} e^{-2x} dx = k \left[-\frac{1}{2} e^{-2x} \right]_0^{\infty} = \frac{k}{2} = 1 \mapsto k = 2$$

En consecuencia, $f(x) = 2 e^{-2x}$

Ejercicio 20.- Dada la variable aleatoria continua X con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} k(x+2) & 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Hallar:

- El valor de k para que sea realmente una función de densidad
- La función de distribución
- La varianza
- $P(2 \leq X \leq 3)$

Solución:

- $\int_0^4 f(x) dx = 1 \quad \mapsto \quad \int_0^4 k(x+2) dx = k \int_0^4 (x+2) dx = k \left[\frac{x^2}{2} + 2x \right]_0^4 = 16k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{16}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{16}(x+2) & 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

b) Función de distribución: $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$, en este caso:

$$x < 0 \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$$

$$\begin{aligned} 0 \leq x < 4 \quad F(x) &= \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt + \int_0^x \frac{1}{16}(t+2) dt = \frac{1}{16} \int_0^x (t+2) dt = \frac{1}{16} \left[\frac{t^2}{2} + 2t \right]_0^x = \\ &= \frac{x^2 + 4x}{32} \end{aligned}$$

$$x \geq 4 \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt + \int_0^4 \frac{1}{16}(t+2) dt + \int_4^x 0 dt = \frac{1}{16} \left[\frac{t^2}{2} + 2t \right]_0^4 = 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x^2 + 4x}{32} & 0 \leq x < 4 \\ 1 & x \geq 4 \end{cases}$$

c) Para calcular la varianza: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{16}(x+2) & 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \alpha_1 = \mu = E[X] &= \int_0^4 x f(x) dx = \int_0^4 x \left[\frac{1}{16}(x+2) \right] dx = \frac{1}{16} \int_0^4 (x^2 + 2x) dx = \frac{1}{16} \left[\frac{x^3}{3} + x^2 \right]_0^4 = \\ &= \frac{1}{16} \left[\frac{112}{3} \right] = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_2 = E[X^2] &= \int_0^4 x^2 f(x) dx = \int_0^4 x^2 \left[\frac{1}{16}(x+2) \right] dx = \frac{1}{16} \int_0^4 (x^3 + 2x^2) dx = \frac{1}{16} \left[\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} \right]_0^4 = \\ &= \frac{1}{16} \left[64 + \frac{128}{3} \right] = \frac{20}{3} \end{aligned}$$

$$\sigma_x^2 = \text{Var}(X) = \alpha_2 - (\alpha_1)^2 \Rightarrow \sigma_x^2 = \frac{20}{3} - \left(\frac{7}{3} \right)^2 = \frac{11}{9}$$

$$d) F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x^2 + 4x}{32} & 0 \leq x < 4 \\ 1 & x \geq 4 \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{16}(x+2) & 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

$$P(2 \leq X \leq 3) = F(3) - F(2) = \left(\frac{9+12}{32}\right) - \left(\frac{4+8}{32}\right) = \frac{21-12}{32} = \frac{9}{32}$$

$$P(2 \leq X \leq 3) = \int_2^3 \frac{1}{16}(x+2) dx = \frac{1}{16} \left[\frac{x^2}{2} + 2x \right]_2^3 = \frac{1}{16} \frac{9}{2} = \frac{9}{32}$$

Ejercicio 21.- Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad tal que

$$f(x) = \begin{cases} \frac{8}{7x^2} & 1 \leq x \leq 8 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

a) Calcular el primer y tercer cuartil, el decil 7 y el percentil 85

b) Calcular la mediana y moda

Solución:

a) La Función de distribución:

$$F(x) = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_1^x \frac{8}{7t^2} dt = -\frac{8}{7} \left[\frac{1}{t} \right]_1^x = \frac{8(x-1)}{7x} \quad 1 \leq x \leq 8$$

sustituyendo, queda:

$$F(Q_1) = \frac{1}{4} = \frac{8(Q_1-1)}{7Q_1} \quad \mapsto \quad 7Q_1 = 32(Q_1-1) \quad \mapsto \quad Q_1 = \frac{32}{25} = 1,28 \quad \boxed{Q_1 = P_{25} = 1,28}$$

$$F(Q_3) = \frac{3}{4} = \frac{8(Q_3-1)}{7Q_3} \quad \mapsto \quad 21Q_3 = 32(Q_3-1) \quad \mapsto \quad Q_3 = \frac{32}{11} = 2,91 \quad \boxed{Q_3 = D_5 = P_{75} = 2,91}$$

$$F(D_7) = \frac{7}{10} = \frac{8(D_7-1)}{7D_7} \quad \mapsto \quad 49D_7 = 80(D_7-1) \quad \mapsto \quad D_7 = \frac{80}{31} = 2,58$$

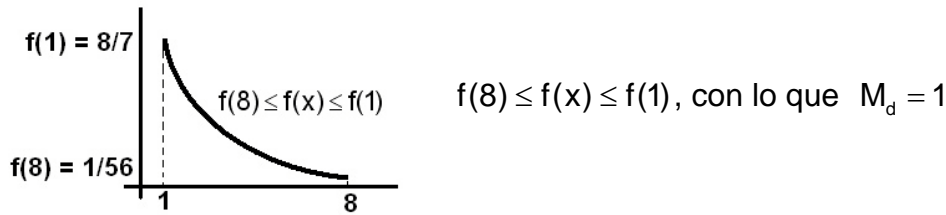
$$F(P_{85}) = \frac{85}{100} = \frac{8(P_{85}-1)}{7P_{85}} \quad \mapsto \quad 595P_{85} = 800(P_{85}-1) \quad \mapsto \quad P_{85} = \frac{800}{205} = 3,90$$

b) $M_e = Q_2 = D_5 = P_{50}$

$$F(M_e) = \frac{1}{2} = \frac{8(M_e-1)}{7M_e} \quad \mapsto \quad 7M_e = 16(M_e-1) \quad \mapsto \quad M_e = \frac{16}{9} = 1,78$$

La Moda M_d se obtiene calculando el máximo de la función de densidad:

$$f(x) = \frac{8}{7x^2} \mapsto f'(x) = -\frac{16}{7x^3} < 0 \mapsto \text{La función es decreciente}$$



Ejercicio 22.- La demanda diaria de un determinado artículo es una variable aleatoria con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} & 0 < x \leq 4 \\ \frac{12-x}{64} & 4 < x \leq 12 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Los beneficios diarios dependen de la demanda según la siguiente función:

$$B = \begin{cases} -5 & \text{si } x < 2 \\ 5 & \text{si } 2 < x \leq 4 \\ 10 & \text{si } 4 < x \leq 8 \\ 15 & \text{si } 8 < x \leq 12 \end{cases}$$

Calcular:

- Probabilidad de que en un día cualquiera la demanda sea superior a 10
- Probabilidad de que la demanda sea inferior a 3
- La esperanza y la varianza de la demanda
- Función de distribución de la demanda
- Función de cuantía y función de distribución de la variable aleatoria beneficios diarios.
- Esperanza y varianza de la variable beneficios

Solución:

$$a) P(X > 10) = \int_{10}^{12} f(x) dx = \int_{10}^{12} \frac{12-x}{64} dx = \frac{1}{64} \left[12x - \frac{x^2}{2} \right]_{10}^{12} = \frac{1}{32} = 0,03125$$

$$b) P(X < 3) = \int_0^3 f(x) dx = \int_0^3 \frac{1}{8} dx = \frac{1}{8} [x]_0^3 = \frac{3}{8} = 0,375$$

c) Media o Esperanza

$$\begin{aligned}\alpha_1 = \mu_x = E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx = \int_0^4 x \cdot f(x) dx + \int_4^{12} x \cdot f(x) dx = \int_0^4 x \cdot \frac{1}{8} dx + \int_4^{12} x \cdot \frac{12-x}{64} dx = \\ &= \frac{1}{8} \int_0^4 x dx + \frac{1}{64} \int_4^{12} (12x - x^2) dx = \frac{1}{16} [x^2]_0^4 + \frac{1}{64} \left[6x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_4^{12} = \\ &= 1 + \frac{1}{64} \left(864 - \frac{1728}{3} - 96 + \frac{64}{3} \right) = \frac{13}{3} = 4,33\end{aligned}$$

Varianza:

$$\begin{aligned}\alpha_2 = E(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) dx = \int_0^4 x^2 \cdot f(x) dx + \int_4^{12} x^2 \cdot f(x) dx = \int_0^4 x^2 \cdot \frac{1}{8} dx + \int_4^{12} x^2 \cdot \frac{12-x}{64} dx = \\ &= \frac{1}{8} \int_0^4 x^2 dx + \frac{1}{64} \int_4^{12} (12x^2 - x^3) dx = \frac{1}{24} [x^3]_0^4 + \frac{1}{64} \left[4x^3 - \frac{x^4}{4} \right]_4^{12} = \\ &= \frac{64}{24} + \frac{1}{64} (6912 - 5184 - 256 + 64) = \frac{5120}{192} = \frac{80}{3} = 26,67\end{aligned}$$

$$\sigma_x^2 = \text{Var}(X) = \alpha_2 - \alpha_1^2 = \frac{80}{3} - \left(\frac{13}{3}\right)^2 = \frac{71}{9} = 7,89$$

d) La función de distribución de la demanda $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$

$$F(x) = \begin{cases} \text{si } x < 0 & \int_{-\infty}^x f(x) dx = \int_{-\infty}^x 0 dx = 0 \\ \text{si } 0 \leq x < 4 & \int_{-\infty}^x f(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^x \frac{1}{8} dx = \frac{x}{8} \\ \text{si } 4 \leq x < 12 & \int_{-\infty}^x f(x) dx = \int_0^4 \frac{1}{8} dx + \int_4^x \frac{12-x}{64} dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{64} \left(-\frac{x^2}{2} + 12x - 40 \right) \\ \text{si } x \geq 12 & \int_{-\infty}^x f(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^4 \frac{1}{8} dx + \int_4^{12} \frac{12-x}{64} dx + \int_{12}^x 0 dx = 1 \end{cases}$$

En resumen,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{8} & \text{si } 0 \leq x < 4 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{64} \left(-\frac{x^2}{2} + 12x - 40 \right) & \text{si } 4 \leq x < 12 \\ 1 & \text{si } x \geq 12 \end{cases}$$

e) La función de cuantía y la función de distribución de la variable aleatoria beneficios diarios se hallan considerando:

$$B = \begin{cases} -5 & \text{si } x < 2 \\ 5 & \text{si } 2 < x \leq 4 \\ 10 & \text{si } 4 < x \leq 8 \\ 15 & \text{si } 8 < x \leq 12 \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} & 0 < x \leq 4 \\ \frac{12-x}{64} & 4 < x \leq 12 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Función de cuantía o probabilidad:

b_i	$P[B = b_i]$
-5	$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 \frac{1}{8} dx = \frac{1}{4} = 0,25$
5	$\int_2^4 f(x) dx = \int_2^4 \frac{1}{8} dx = \frac{1}{4} = 0,25$
10	$\int_4^8 f(x) dx = \int_4^8 \frac{12-x}{64} dx = \frac{1}{64} \left(12x - \frac{x^2}{2} \right)_4^8 = 0,375$
15	$\int_8^{12} f(x) dx = \int_8^{12} \frac{12-x}{64} dx = \frac{1}{64} \left(12x - \frac{x^2}{2} \right)_8^{12} = 0,125$

Función de distribución $F(B) = P(B \leq b_i)$

b_i	$P(B = b_i)$	$F(B) = P(B \leq b_i)$	$b_i \cdot P[B = b_i]$	$b_i^2 \cdot P[B = b_i]$
-5	0,25	0,25	-1,25	6,25
5	0,25	0,50	1,25	6,25
10	0,375	0,875	3,75	37,5
15	0,125	1	1,875	28,125
			$\sum_{i=1}^4 b_i \cdot P[B = b_i] = 5,625$	$\sum_{i=1}^4 b_i^2 \cdot P[B = b_i] = 78,125$

f) Media o Esperanza beneficios: $\mu_b = E(B) = \sum_{i=1}^4 b_i \cdot P[B = b_i] = 5,625$

Varianza beneficios:

$$E[B^2] = \sum_{i=1}^4 b_i^2 \cdot P[B = b_i] = 78,125$$

$$\sigma_b^2 = \text{Var}(B) = E(B^2) - \mu_b^2 = 78,125 - (5,625)^2 = 46,48$$

Desviación típica de los beneficios: $\sigma_b = \sqrt{46,48} = 6,817$

Ejercicio 23.- Sea X una variable aleatoria continua, cuya función de densidad es

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Sea $Y = 1 - X^2$ una transformación de la v.a. X

- Calcular la función de densidad de la v.a. Y
- Calcular la función de distribución de la v.a. Y

Solución:

- La transformación asociada a la v.a. Y es derivable y estrictamente monótona cuando X toma valores en el intervalo $(0, 1)$. En consecuencia, se puede aplicar la transformación, quedando la función de densidad:

$$Y = 1 - X^2 \quad \mapsto \quad x = \sqrt{1 - y} \quad \mapsto \quad \begin{cases} \frac{dx}{dy} = \frac{-1}{2\sqrt{1-y}} \\ g^{-1}(y) = \sqrt{1-y} \end{cases}$$

La función de densidad de la variable continua Y se obtiene:

$$f_Y(y) = f_X[g^{-1}(y)] \cdot \left| \frac{dx}{dy} \right| = 3 (\sqrt{1-y})^2 \left| \frac{-1}{2\sqrt{1-y}} \right| = \frac{3}{2} \sqrt{1-y}$$

La función de densidad de la v.a. Y :
$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{2} \sqrt{1-y} & 0 < y < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Función de distribución:

$$y \leq 0 \quad \mapsto \quad F_Y(y) = \int_{-\infty}^y f(t) dt = 0$$

$$0 < y < 1 \quad \mapsto \quad F_Y(y) = \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^y f(t) dt = \int_0^y \frac{3}{2} \sqrt{1-t} dt = \left[-\sqrt{(1-t)^3} \right]_0^y = 1 - \sqrt{(1-y)^3}$$

$$y \geq 1 \quad \mapsto \quad F_Y(y) = \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^1 f(t) dt + \int_1^y f(t) dt = \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 \frac{3}{2} \sqrt{1-t} dt = 1$$

La función de distribución de la v.a. Y será:
$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ 1 - \sqrt{(1-y)^3} & 0 < y < 1 \\ 1 & y \geq 1 \end{cases}$$

Ejercicio 24.- Sea X una variable aleatoria continua, cuya función de densidad es

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Sea $Y = X^2$ una transformación de la v.a. X

- Calcular la función de densidad de la v.a. Y
- Calcular la función de distribución de la v.a. Y

Solución:

La transformación $Y = X^2$ es derivable, pero no es estrictamente monótona, puesto que en el intervalo $(-1, 0)$ la transformación es decreciente y en el intervalo $[0, 1)$ es creciente.

En este caso, hay que determinar la función de distribución de la variable aleatoria Y para el caso general de las transformaciones de una variable aleatoria, ya que no se puede aplicar el método descrito en el ejercicio 25.

- Cálculo de la función de distribución

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P[Y \leq y] = P[X^2 \leq y] = P[|X| \leq \sqrt{y}] = P[-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}] = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x) dx = \\ &= \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2} [x]_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} = \sqrt{y} \end{aligned}$$

La función de distribución de la v.a. Y es:
$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ \sqrt{y} & 0 \leq y < 1 \\ 1 & y \geq 1 \end{cases}$$

- La función de densidad $f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} & 0 \leq y < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

Ejercicio 25.- Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad tal que

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

- a) Función generatriz de los momentos (f.g.m.)
- b) Esperanza y varianza a partir de la f.g.m.
- c) Función característica

Solución:

$$a) M(t) = E[e^{tx}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \cdot f(x) \cdot dx = \int_0^{\infty} e^{x(t-1)} dx = \frac{1}{t-1} [e^{x(t-1)}]_0^{\infty} = \frac{1}{1-t} \text{ si } t < 1$$

$$b) \alpha_1 = E(X) = M^{(1)}(0) = \left. \frac{dM(t)}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{1-t} \right] \right|_{t=0} = \left. \frac{1}{(1-t)^2} \right|_{t=0} = 1$$

$$\alpha_2 = E(X^2) = M^{(2)}(0) = \left. \frac{d^2 M(t)}{dt^2} \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{1-t} \right) \right] \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{(1-t)^2} \right) \right|_{t=0} = \left. \frac{2}{(1-t)^3} \right|_{t=0} = 2$$

$$\text{Var}(X) = \alpha_2 - \alpha_1^2 = 2 - 1 = 1$$

- c) La función característica se puede calcular utilizando la relación entre función característica y los momentos:

$$\varphi(t) = 1 + (it)\alpha_1 + \frac{(it)^2}{2!}\alpha_2 + \frac{(it)^3}{3!}\alpha_3 + \dots + \frac{(it)^k}{k!}\alpha_k + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(it)^j}{j!}\alpha_j \text{ si } t < 1$$







Estadística Teórica
Facultad Ciencias Económicas y Empresariales
Departamento de Economía Aplicada
Profesor: Santiago de la Fuente Fernández