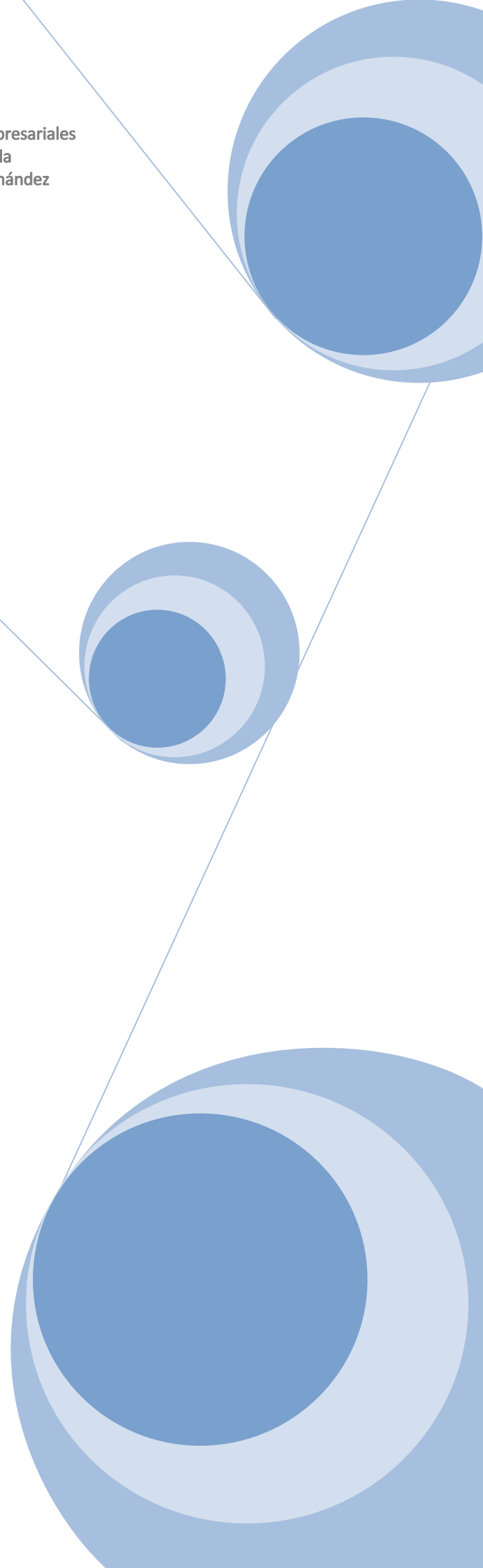


## NÚMEROS ÍNDICES





**NÚMEROS ÍNDICES.**- Se plantea la cuestión de comparar una serie de observaciones respecto a una situación inicial, fijada arbitrariamente.

Si dos observaciones  $x_0$  y  $x_1$  se comparan mediante el cociente  $C = \frac{x_1}{x_0}$ , diremos

$$\begin{cases} x_1 < x_0 & \text{si } C < 1 \\ x_1 = x_0 & \text{si } C = 1 \\ x_1 > x_0 & \text{si } C > 1 \end{cases}$$

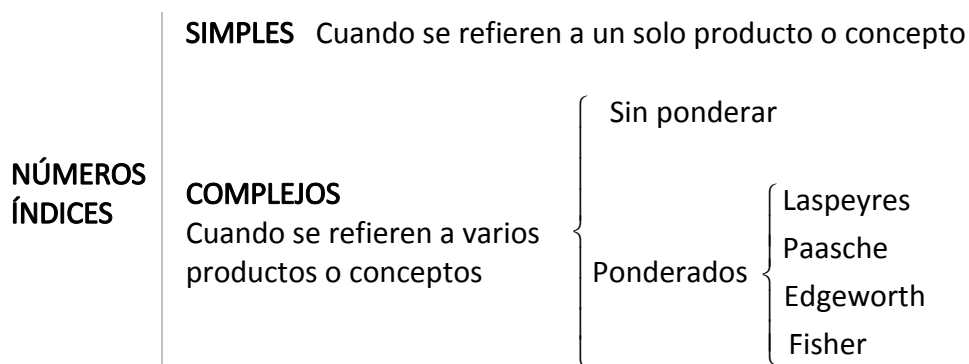
Para las comparaciones hay que tener en cuenta dos aspectos importantes:

- Fijar la situación inicial (de forma arbitraria) a la que se referirán las comparaciones. Señalar que la elección de la situación inicial condiciona el resultado de la comparación, por lo que el punto de referencia inicial debe ser el más idóneo posible a los objetivos que se persiguen.
- Las magnitudes que se comparan pueden ser simples o complejas, lo que nos introduce en el problema de la construcción de sistemas de comparación adecuados. Una magnitud compleja es comparar la producción de un mismo país en dos épocas diferentes o la producción global de dos países. No olvidemos que la producción es una magnitud compleja compuesta por magnitudes simples heterogéneas (unidades de producción, litros, kilogramos, etc).

Un **Número Índice** es una medida estadística que nos permite estudiar los cambios que se producen en una magnitud simple o compleja con respecto al tiempo o al espacio.

Al período inicial se le denomina **período base o referencia** y se le asigna el valor 100, en cambio, la situación que deseamos comparar se denomina **período actual o corriente**.

La clasificación más sencilla de los número índices sería:



**NÚMEROS ÍNDICES SIMPLES.**- Son los que proporcionan la variación que ha sufrido una magnitud o concepto entre dos períodos o lugares distintos. Generalmente, esta comparación se realiza con el valor de un período fijo (*período base*).

El número índice simple para la magnitud  $M_i$ , siendo  $m_{i0}$  y  $m_{it}$  los valores de dicha magnitud en los períodos base y actual, respectivamente, es:

$$I_i = I_0^t(i) = \frac{m_{it}}{m_{i0}} \cdot 100$$

A partir de un número índice de una magnitud (del período t en base 0) se puede obtener la **tasa de variación de dicha magnitud** (en el período comprendido entre el período 0 y el período t), o la **variación relativa** de la misma:

$$t_0^t = \frac{m_{it} - m_{i0}}{m_{i0}} = \frac{m_{it}}{m_{i0}} - 1 = I_0^t - 1 \quad \mapsto \quad \boxed{t_0^t = I_0^t - 1} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{I_0^t = t_0^t + 1}$$

Cuando se trabaja con datos anuales, si se conoce la tasa de variación en el intervalo de tiempo que comienza en el año 0 y termina en el año t ( $t_0^t$ ), o bien las tasas de variación anuales en dicho intervalo ( $t_0^1, t_1^2, t_2^3, \dots, t_{t-1}^t$ ), la tasa de variación anual vendrá dada por cualquiera de las siguientes expresiones:

$$t_{m_0}^t = \sqrt[t]{(1+t_0^1) \cdot (1+t_1^2) \cdot (1+t_2^3) \cdots (1+t_{t-1}^t)} - 1 = \sqrt[t]{I_0^1 \cdot I_1^2 \cdot I_2^3 \cdots I_{t-1}^t} - 1 = \sqrt[t]{I_0^t} - 1 = \sqrt[t]{1+t_0^t} - 1$$

razonamiento que puede extenderse a datos con cualquier otro tipo de periodicidad.

### ÍNDICES SIMPLES MÁS UTILIZADOS:

- **PRECIO RELATIVO:** Relación entre el precio de un bien en el período actual  $p_{it}$  y el precio del mismo en el período base  $p_{i0}$ :  $p_0^t = \frac{p_{it}}{p_{i0}} \cdot 100$
- **CANTIDAD RELATIVA:** Razón entre la cantidad producida o vendida de un bien en sus períodos actual  $q_{it}$  y base  $q_{i0}$ :  $q_0^t = \frac{q_{it}}{q_{i0}} \cdot 100$
- **VALOR RELATIVO:** Valor de un bien en un período cualquiera se define como el producto del precio de ese bien y la cantidad producida (vendida). El valor relativo será la razón entre los valores de ese bien en el período actual ( $p_{it} \cdot q_{it}$ ) y en el período base ( $p_{i0} \cdot q_{i0}$ ):

$$V_0^t = \frac{p_{it} \cdot q_{it}}{p_{i0} \cdot q_{i0}} \cdot 100 = \left( \frac{p_{it}}{p_{i0}} \right) \cdot \left( \frac{q_{it}}{q_{i0}} \right) \cdot 100 = p_0^t \cdot q_0^t \cdot 100$$

El valor relativo de un bien es igual al producto de su precio relativo y su cantidad relativa.

**Ejemplo 1.** Deseamos conocer la evolución del precio de la barra de pan ente 2005 y 2010 en nuestro país. Para ello se dispone de la siguiente información:

		Índices
Años	Precio barra de pan (céntimos euro)	Variación precio barra de pan
2005	25	100
2006	30	$I_{2005}^{2006} = \frac{30}{25} \cdot 100 = 120$
2007	32	$I_{2005}^{2007} = \frac{32}{25} \cdot 100 = 128$
2008	38	$I_{2005}^{2008} = \frac{38}{25} \cdot 100 = 152$
2009	44	$I_{2005}^{2009} = \frac{44}{25} \cdot 100 = 176$
2010	48	$I_{2005}^{2010} = \frac{48}{25} \cdot 100 = 192$

Calculada la serie de índices de variación, se observa que el precio de la barra de pan en 2007 fue 1,28 veces el de 2005; el de 2010 fue 1,92 veces la de 2005, y así sucesivamente. Señalar que el índice es una medida adimensional, ya que numerador y denominador vienen dados en las mismas unidades de medida.

**ÍNDICES COMPLEJOS.**- En la realidad, generalmente no es estamos interesados en comparar precios, cantidades o valores individuales, sino que se comparan fenómenos del mundo real donde intervienen muchas variables. Como consecuencia, la información suministrada por los índices de diferentes bienes debe de ser resumida en un único índice al que denominamos **índice complejo**.

La construcción de un índice complejo no es una tarea fácil. Como ejemplo, para elaborar la evolución del coste de la vida de un país, el IPC en España, habría que seleccionar un grupo de bienes que reflejaran dicho coste, teniendo en cuenta la importancia relativa de cada uno de esos bienes, decidiendo finalmente la forma de unificar toda la información para obtener un único índice.

El objetivo es llegar a un número índice sencillo que reúna la mayor cantidad posible de información. De esta manera, llegamos a dos tipos de índices complejos: **índices complejos no ponderados** (cuando prima la sencillez) e **índices complejos ponderados** (cuando se desea que contengan la mayor cantidad de información).

**ÍNDICES COMPLEJOS DE PRECIOS NO PONDERADOS.**- Vamos a analizar el estudio de magnitudes económicas a través de los llamados **Índices de Precios**, que cuantifican la evolución de la magnitud precio de un conjunto de bienes y servicios. Es decir, tendríamos la información que proporciona un cuadro análogo al siguiente:

Artículos Épocas	1	2	.....	n
0	p <sub>10</sub>	p <sub>20</sub>	.....	p <sub>n0</sub>
1	p <sub>11</sub>	p <sub>21</sub>	.....	p <sub>n1</sub>
2	p <sub>12</sub>	p <sub>22</sub>	.....	p <sub>n2</sub>
⋮	⋮	⋮	.....	⋮
⋮	⋮	⋮	.....	⋮
t	p <sub>1t</sub>	p <sub>2t</sub>	.....	p <sub>nt</sub>

Artículos	1	2	...	n
Índices simples	$\frac{p_{1t}}{p_{10}} \cdot 100$	$\frac{p_{2t}}{p_{20}} \cdot 100$	...	$\frac{p_{nt}}{p_{n0}} \cdot 100$

El objetivo será encontrar una medida estadística que resuma toda la información y permita conocer cuál ha sido la variación experimentada por los precios en el período t respecto al período base.

Para resumir la información obtenida a través de los índices simples, es lógico promediar éstos. De este modo, los índices complejos van a ser medias aritméticas, geométricas, armónicas y agregativas de los índices simples.

**ÍNDICE DE SAUERBECK:** Considerando los precios relativos  $l_i = \frac{p_{it}}{p_{i0}}$ , es la media aritmética no

ponderada de los índices simples:  $S_p = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{p_{it}}{p_{i0}} \cdot 100$

**ÍNDICE MEDIA GEOMÉTRICA:**  $I_0^t = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n \frac{p_{it}}{p_{i0}}} \cdot 100$

**ÍNDICE MEDIA ARMÓNICA:**  $I_0^t = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{p_{i0}}{p_{it}}} \cdot 100$

De los tres índices el que se utiliza con mayor frecuencia es el índice de Sauerbeck.

**ÍNDICE MEDIA AGREGATIVA SIMPLE O DE BRADSTREET-DÛTOT:** Consiste en considerar un índice simple de agregados de magnitudes (precios). Es decir, se calcula la razón de la media aritmética de los precios de n artículos (en el período t como en el período base):

$$B-D_p = \frac{\sum_{i=1}^n p_{it}}{\sum_{i=1}^n p_{i0}} \cdot 100$$

Señalar que los índices analizados tienen la ventaja de ser fáciles de aplicar, pero presentan inconvenientes importantes: << No tienen en cuenta la importancia relativa de cada uno de los diferentes artículos en el conjunto total, puesto que no son ponderados >>

**Ejemplo 2.** En la tabla adjunta aparecen distintos artículos y los precios (en céntimos de euros) entre 2008 y 2010. Se pide calcular los índices compuestos.

Artículos	Precios		
	2008	2009	2010
Pan	38	44	48
Huevos	130	150	215
Leche	88	100	110
Pollo	160	190	205

**Índice de Sauerbeck:**  $S_p = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{p_{it}}{p_{i0}} \cdot 100$

$$S_{\frac{2009}{2008}} = \frac{1}{4} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{p_{it}}{p_{i0}} \cdot 100 = \frac{1}{4} \cdot \left[ \frac{44}{38} + \frac{150}{130} + \frac{100}{88} + \frac{190}{160} \right] \cdot 100 = 115,89$$

$$S_{\frac{2010}{2008}} = \frac{1}{4} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{p_{it}}{p_{i0}} \cdot 100 = \frac{1}{4} \cdot \left[ \frac{48}{38} + \frac{215}{130} + \frac{110}{88} + \frac{205}{160} \right] \cdot 100 = 136,21$$

**Índice media Geométrica:**  $I_0^t = \sqrt[4]{\prod_{i=1}^4 \frac{p_{it}}{p_{i0}}} \cdot 100$

$$I_{2008}^{2009} = \sqrt[4]{\frac{44}{38} \cdot \frac{150}{130} \cdot \frac{100}{88} \cdot \frac{190}{160}} \cdot 100 = 115,88$$

$$I_{2008}^{2010} = \sqrt[4]{\frac{48}{38} \cdot \frac{215}{130} \cdot \frac{110}{88} \cdot \frac{205}{160}} \cdot 100 = 135,25$$

**Índice media Armónica:**  $I_0^t = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{p_{i0}}{p_{it}}} \cdot 100$

$$I_{2008}^{2009} = \frac{4}{\frac{38}{44} + \frac{130}{150} + \frac{88}{100} + \frac{160}{190}} \cdot 100 = 115,86$$

$$I_{2008}^{2010} = \frac{4}{\frac{38}{48} + \frac{130}{215} + \frac{88}{110} + \frac{160}{205}} \cdot 100 = 134,37$$

**Índice media agregativa simple o de Bradstreet-Dùtot:**  $B-D_p = \frac{\sum_{i=1}^n p_{it}}{\sum_{i=1}^n p_{i0}} \cdot 100$

$$B-D_{P_{2008}}^{2009} = \frac{\sum_{i=1}^4 p_{it}}{\sum_{i=1}^4 p_{i0}} \cdot 100 = \frac{44 + 150 + 100 + 190}{38 + 130 + 88 + 160} \cdot 100 = 116,35$$

$$B-D_{P_{2008}}^{2010} = \frac{\sum_{i=1}^4 p_{it}}{\sum_{i=1}^4 p_{i0}} \cdot 100 = \frac{48 + 215 + 110 + 205}{38 + 130 + 88 + 160} \cdot 100 = 138,94$$

Señalar que estos cuatro tipos de índices compuestos sin ponderar se pueden utilizar para estudiar la evolución de cualquier otra variable distinta del precio.

**INDICES COMPLEJOS DE PRECIOS PONDERADOS.-** Una presentación sobre los sistemas de ponderaciones propuestos tradicionalmente:

$p_{i0} \cdot q_{i0} \equiv$  valor de la cantidad consumida del bien i-ésimo en el período base, a precios de período base. (*situación real*)

$p_{i0} \cdot q_{it} \equiv$  valor a precios del período base de la cantidad consumida del bien i-ésimo en el período actual. (*situación con valoración ficticia*)

Los índices complejos ponderados más utilizados son: Laspeyres, Paasche, Edgeworth y Fisher.

### ÍNDICE DE PRECIOS DE LASPEYRES: IMPORTANCIA DE LAS PONDERACIONES

Analizan las variaciones debidas a los cambios en los precios de un conjunto de artículos ponderándolos siempre por las mismas cantidades.

El índice de Laspeyres se define como la media aritmética ponderada de los índices simples de precios. El criterio de ponderación es  $p_{i0} \cdot q_{i0}$ , con lo cual:

$$L_p = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{p_{it}}{p_{i0}} p_{i0} \cdot q_{i0}}{\sum_{i=1}^n p_{i0} \cdot q_{i0}} \cdot 100 = \frac{\sum_{i=1}^n p_{it} \cdot q_{i0}}{\sum_{i=1}^n p_{i0} \cdot q_{i0}} \cdot 100$$

- Los criterios para la elección del período base son variados, fundamentalmente se requiere que sea un año no irregular o normal.
- El inconveniente del índice de Laspeyres es que supone que siempre se adquieren las mismas cantidades que en el período base.

### ÍNDICE DE PRECIOS DE PAASCHE: ALTERNATIVAS AL ÍNDICE DE LASPEYRES

El índice de Laspeyres se cuestiona en ocasiones, ya que parece poco realista suponer que las cantidades compradas o adquiridas en el año de referencia no varían en el tiempo.



Como ejemplo, no parece muy realista la hipótesis de que en años de sequía, y en consecuencia, de subidas importantes de los precios de los productos agrarios, las cantidades demandadas sean iguales.

Se planteó la necesidad de disponer de otros índices que, con la finalidad de medir la variación de precios de un determinado conjunto de artículos, no estuviera sujeto a la restricción de suponer que siempre se adquirirían las mismas cantidades que en el período base.

El índice de Paasche se define como la media aritmética ponderada de los índices simples de precios. El criterio de ponderación es  $p_{i0} \cdot q_{it}$ , con lo cual:

$$P_p = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{p_{it}}{p_{i0}} p_{i0} \cdot q_{it}}{\sum_{i=1}^n p_{i0} \cdot q_{it}} \cdot 100 = \frac{\sum_{i=1}^n p_{it} \cdot q_{it}}{\sum_{i=1}^n p_{i0} \cdot q_{it}} \cdot 100$$

- El cálculo del índice de Paasche es laborioso, exige calcular las ponderaciones  $p_{it} \cdot q_{it}$  para cada período corriente.
- Otro inconveniente adicional, el índice de precios de cada año sólo se puede comparar con el del año base.

Los dos inconvenientes expuestos en el índice de Paasche, hacen que su uso ha decaído considerablemente.

### ÍNDICE DE PRECIOS DE EDGEWORTH

Es una medida agregativa ponderada de precios cuyo coeficiente de ponderación es  $q_{i0} + q_{it}$ :

$$E_p = \frac{\sum_{i=1}^n p_{it} \cdot (q_{i0} + q_{it})}{\sum_{i=1}^n p_{i0} \cdot (q_{i0} + q_{it})} \cdot 100$$

### ÍNDICE DE PRECIOS IDEAL DE FISHER

I. Fisher propuso como número índice de precios la media geométrica de los índices de precios de Laspeyres y Paasche, es decir:

$$F_p = \sqrt{L_p \cdot P_p}$$

### ÍNDICE DE VALOR

El índice de valor es el cociente entre el valor de los bienes considerados en el período actual a precios del período actual y el valor de los bienes en el período base a precios del período base, por consiguiente refleja conjuntamente las variaciones de los precios y las cantidades.

$$IV_0^t = \frac{V_t}{V_0} = \frac{\sum_{i=1}^n p_{it} \cdot q_{it}}{\sum_{i=1}^n p_{i0} \cdot q_{i0}} \quad , \text{ se verifica } IV_0^t = L_{P_0}^t \cdot P_{Q_0}^t = L_{Q_0}^t \cdot P_{P_0}^t = F_{P_0}^t \cdot F_{Q_0}^t$$

## PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS ÍNDICES

- **EXISTENCIA.**- Todo número índice debe estar bien definido y ser distinto de cero.
- **IGUALDAD.**- Cuando coincide el período base y el período actual, el número índice es igual a la unidad. Señalar que los números índices miden variaciones entre dos períodos y, al coincidir estos, no reflejan ninguna variedad.
- **INVERSIÓN.**- Denotando por  $I_0^t$  un índice con base 0 y período actual t, al intercambiar los períodos entre sí  $I_t^0$ , el nuevo índice debe verificar:  $I_t^0 = \frac{1}{I_0^t} \Rightarrow I_0^t \cdot I_t^0 = 1$
- **CIRCULAR.**- Considerando los períodos 0, t, t', t'', se debe verificar: 
$$\begin{cases} I_0^t \cdot I_t^{t'} \cdot I_{t'}^0 = 1 \\ I_0^t \cdot I_t^{t'} \cdot I_{t'}^{t''} \cdot I_{t''}^0 = 1 \end{cases}$$
- **CÍCLICA.**- Consecuencia de la propiedad de inversión y circular: 
$$\begin{cases} I_0^t \cdot I_t^{t'} = \frac{1}{I_{t'}^0} \Rightarrow I_0^t \cdot I_t^{t'} = I_0^{t'} \\ I_0^t \cdot I_t^{t'} \cdot I_{t'}^{t''} = \frac{1}{I_{t''}^0} \Rightarrow I_0^t \cdot I_t^{t'} \cdot I_{t'}^{t''} = I_0^{t''} \end{cases}$$
- **PROPORCIONALIDAD.**- Si en el período actual la magnitud (o todas las magnitudes simples en el caso de un índice complejo) varía en una proporción, el índice cambia en la misma proporción.

Si los valores  $x_{it}$  sufren una variación de orden k, los nuevos valores en el período t' son de la

forma  $x_{it'} = x_{it} + k \cdot x_{it} = (1+k) \cdot x_{it}$ , y los nuevos índices serán:  $I_i^{t'} = \frac{x_{it'}}{x_{i0}} = \frac{(1+k) \cdot x_{it}}{x_{i0}} = (1+k) \cdot I_i^t$

- **HOMOGENEIDAD.**- A un índice no deben afectar los cambios en las unidades de medida.

Señalar que estas propiedades que se verifican para los índices simples, no siempre se verifican para los índices complejos.

**ÍNDICES DE CADENA.**- Se obtienen mediante enlaces relativos, son índices para los que la base es siempre el período precedente, con lo que cada uno de ellos representa una comparación porcentual respecto al período anterior.

**Ejemplo 3.** Supongamos que en el ejemplo 2 disponemos de información adicional sobre la cantidad vendida en cada uno de los períodos, como se detalla en la tabla adjunta. Determinar los índices de Laspeyres, Paasche, Edgeworth y Fisher para 2010, siendo el año base 2008.

Artículos	2008		2009		2010	
	precios	cantidad vendida	precios	cantidad vendida	precios	cantidad vendida
Pan	38	150	44	200	48	240
Huevos	130	400	150	580	215	560
Leche	88	700	100	780	110	925
Pollo	160	400	190	400	205	375

Solución:

Artículos	Laspeyres		Paasche		Edgeworth		
	$p_{i10} \cdot q_{i08}$	$p_{i08} \cdot q_{i08}$	$p_{i10} \cdot q_{i10}$	$p_{i08} \cdot q_{i10}$	$(q_{i08} + q_{i10})$	$p_{i10} \cdot (q_{i08} + q_{i10})$	$p_{i08} \cdot (q_{i08} + q_{i10})$
Pan	7200	5700	11520	9120	390	18720	14820
Huevos	86000	52000	120400	72800	960	206400	124800
Leche	77000	61600	101750	81400	1625	178750	143000
Pollo	82000	64000	76875	60000	775	158875	124000
	252200	183300	310545	223320		562745	406620

$$\text{Índice de Laspeyres: } L_{p_{2008}}^{2010} = \frac{\sum_{i=1}^4 p_{i10} \cdot q_{i08}}{\sum_{i=1}^4 p_{i08} \cdot q_{i08}} \cdot 100 = \frac{252200}{183300} \cdot 100 = 137,59$$

$$\text{Índice de Paasche: } P_{p_{2008}}^{2010} = \frac{\sum_{i=1}^4 p_{i10} \cdot q_{i10}}{\sum_{i=1}^4 p_{i08} \cdot q_{i10}} \cdot 100 = \frac{310545}{223320} \cdot 100 = 139,06$$

$$\text{Índice de Edgeworth: } E_{p_{2008}}^{2010} = \frac{\sum_{i=1}^4 p_{i10} \cdot (q_{i08} + q_{i10})}{\sum_{i=1}^4 p_{i08} \cdot (q_{i08} + q_{i10})} \cdot 100 = \frac{562745}{406620} \cdot 100 = 138,40$$

$$\text{Índice de Fisher: } F_{p_{2008}}^{2010} = \sqrt{L_{p_{2008}}^{2010} \cdot P_{p_{2008}}^{2010}} = \sqrt{137,59 \cdot 139,06} = 138,32$$

**INDICES COMPLEJOS PONDERADOS DE PRODUCCIÓN O CUÁNTICOS.**- Los números índices cuánticos o de producción analizan su evolución en el tiempo, estudiando las variaciones de la producción física de un conjunto de bienes y servicios.

El criterio de ponderación es igual que en los Índices de Precios, aquí se ha de ponderar el **valor neto** o **valor añadido** del bien y no el precio de venta o valor bruto del mismo, puesto que si se hiciera así se contabilizaría una misma cantidad varias veces, tantas como etapas diferentes suponga el proceso de producción.

Los sistemas de ponderaciones propuestos tradicionalmente  $\begin{cases} q_{i0} \cdot p_{i0} & \text{situación real} \\ q_{i0} \cdot p_{it} & \text{situación ficticia} \end{cases}$

Los índices complejos ponderados más utilizados son: Laspeyres, Paasche y Fisher. El índice de Laspeyres es el que más se utiliza, tanto para Índices de Precios como para Índices Cuánticos.

**ÍNDICE CUÁNTICO DE LASPEYRES:** 
$$L_q = \frac{\sum_{i=1}^n q_{it}}{\sum_{i=1}^n q_{i0}} \cdot 100 = \frac{\sum_{i=1}^n q_{i0} \cdot p_{i0}}{\sum_{i=1}^n q_{i0} \cdot p_{i0}} \cdot 100$$

**ÍNDICE CUÁNTICO DE PAASCHE:** 
$$P_q = \frac{\sum_{i=1}^n q_{it} \cdot p_{it}}{\sum_{i=1}^n q_{i0} \cdot p_{it}} \cdot 100 = \frac{\sum_{i=1}^n q_{it} \cdot p_{it}}{\sum_{i=1}^n q_{i0} \cdot p_{i0}} \cdot 100$$

**ÍNDICE CUÁNTICO IDEAL DE FISHER:** 
$$F_q = \sqrt{L_q \cdot P_q}$$

**PROBLEMAS CON LA UTILIZACIÓN DE NÚMEROS ÍNDICES.**- Fundamentalmente son referentes a dos cuestiones:

**PONDERACIONES.**- En la medida de lo posible, el tipo de ponderación debe reflejar la importancia relativa de cada bien en particular. En los índices expuestos las ponderaciones más apropiadas se basan en cantidades o valores para los índices de precios, y en precios o valores para los índices de cantidad.

En la práctica, cada bien incluido en un índice complejo se suele interpretar como representativo de toda la clase de artículos relacionados y no como bien individual. En este sentido, la ponderación asignada a cada artículo individual refleja la importancia de toda la clase que representa.

**PERÍODO BASE.**- Es aquél período con respecto al que se efectúan las comparaciones, por lo que para que muchas comparaciones no pierdan significado, se suele elegir como tal un período no alejado excesivamente del período corriente. En esta línea, se hace necesario renovar periódicamente la información relativa al año base.

**CAMBIOS DE BASE Ó REVISIÓN DE LA BASE EN ÍNDICES SIMPLES.-** Al alejarse del período base el índice sufre una pérdida de representatividad, en especial cuando para ponderar magnitudes actuales se utilizan precios relativos referidos al período base. Este problema se resuelve haciendo un **cambio de base** a período más próximo al actual.

Para relacionar series de índices referidos a distintos períodos base se utilizan **enlaces técnicos** entre ambas series.

Período	Índice (período 0)	Índice (período h)
0	$I_0^0$	$I_h^0$
1	$I_0^1$	$I_h^1$
⋮	⋮	⋮
i	$I_0^i$	$I_h^i$
⋮	⋮	⋮
h	$I_0^h$	$I_h^h$
⋮	⋮	⋮
t	$I_0^t$	$I_h^t$

La nueva serie de índices se obtiene:

$$I_h^i = \frac{I_0^i}{I_0^h} \cdot I_h^h = \frac{I_0^i}{I_0^h}$$

donde  $I_0^h$  es el índice que hace de enlace técnico entre las dos series.

**Ejemplo 4.** Dada la serie adjunta con base año 2000, se desea cambiar la base al año 2005

Años	Precio refresco (euros)	Índices Simples Base 2000	Índices Simples Base 2005
2000	1,2	100,00	68,97
2001	1,3	108,33	74,71
2002	1,42	118,33	81,61
2003	1,54	128,33	88,51
2004	1,65	137,50	94,83
2005	1,74	145,00	100
2006	1,86	155,00	106,90
2007	1,94	161,67	111,49
2008	2,15	179,17	123,56
2009	2,25	187,50	129,31
2010	2,30	191,67	132,18

El interés del cambio reside en tener los datos más actuales, con la transformación podemos observar como el precio de la botella de refrescos en el año 2010 aumento el 32,25% en relación al año 2005.

*Señalar que para realizar un cambio de base en los índices simples basta dividir cada uno de los índices de la base antigua por el valor del índice correspondiente al período seleccionado como nueva base y multiplicarlo por 100.*

Como alternativa a la actualización del período base descrito para los **sistemas de base fija**, se viene utilizando con mayor frecuencia los **sistemas de índices de base variable o encadenada** (sistemas que utilizan como base el período inmediatamente anterior).

Observemos la tabla anterior, utilizando la **BASE VARIABLE** o **ENCADENADA**:

Años	Precio refresco (euros)	Índices Simples Base 2005	Índices Simples Base variable o Encadenada
2005	1,74	100	
2006	1,86	106,90	106,90
2007	1,94	111,49	104,30
2008	2,15	123,56	110,82
2009	2,25	129,31	104,65
2010	2,30	132,18	102,22

En la última columna, se observa que entre 2006 y 2005 el precio de la botella de refrescos varió un 6,90%, entre 2006 y 2007 un 4,30%, etc. En este ejemplo, de índices de base variable o encadenada, cada índice se calcula respecto a un año distinto.

Destacar que a partir de la serie de base variable (cuarta columna) se puede calcular el índice para base fija de cualquier período. De esta manera, el índice de los refrescos de 2010 con base 2005 sería:

$$I_{2005}^{2010} = I_{2005}^{2006} \cdot I_{2006}^{2007} \cdot I_{2007}^{2008} \cdot I_{2008}^{2009} \cdot I_{2009}^{2010} \cdot 100 = 1,069 \times 1,043 \times 1,1082 \times 1,0465 \times 1,0222 \times 100 = 132,18$$

**CAMBIOS DE BASE ó REVISIÓN DE LA BASE EN ÍNDICES COMPLEJOS.-** El concepto de período base en los índices de un conjunto de artículos (como ocurre con los índices de Laspeyres y Paasche) no es el mismo que en un índice simple.

El período base en los índices complejos ponderados, además de ser el tiempo de referencia, es el tiempo en que se deben verificar determinados requisitos respecto a dos características: (a) Artículos o elementos independientes a los que se refiere el índice. (b) Ponderaciones que se van a asignar a cada elemento o artículo.

Los índices complejos, como los índices simples, pueden elaborarse con un sistema de base fija o con un sistema de base variable o de encadenamientos.

Cuando se elige un sistema de base fija, no hay que olvidar que la estructura del gasto está sometida a una constante evolución. En otras palabras, a medida que nos alejamos del período base se van a producir cambios de distinta índole, que responden fundamentalmente a dos características: (a) Cambios en los bienes o servicios que componen el índice. (b) Cambios en los gustos o preferencias de los agentes económicos.

**Ejemplo 5.** En la tabla adjunta se presentan los datos de un conjunto de bienes  $\sum p_{it} \cdot q_{i0}$  y  $\sum p'_{it} \cdot q'_{i0}$ , respectivamente, donde los períodos de ponderación son 2000 y 2005:

Años	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Base=2000	10	11	12	13	15	16					
Base=2005						18	18,6	20	22	23	24

- Hallar los correspondientes índices de precios de Laspeyres.
- Determinar los índices de precios entre los períodos 2000-2004 con base 2005.

**Solución:**

a) Los correspondientes índices de Laspeyres serían:

$$L_{p2000}^{2000} = \frac{10}{10} \cdot 100 = 100\% \quad L_{p2005}^{2005} = \frac{18}{18} \cdot 100 = 100\%$$

$$L_{p2000}^{2001} = \frac{11}{10} \cdot 100 = 110\% \quad L_{p2005}^{2006} = \frac{18,6}{18} \cdot 100 = 103,33\%$$

$$L_{p2000}^{2002} = \frac{12}{10} \cdot 100 = 120\% \quad L_{p2005}^{2007} = \frac{20}{18} \cdot 100 = 111,11\%$$

$$L_{p2000}^{2003} = \frac{13}{10} \cdot 100 = 130\% \quad L_{p2005}^{2008} = \frac{22}{18} \cdot 100 = 122,22\%$$

$$L_{p2000}^{2004} = \frac{15}{10} \cdot 100 = 150\% \quad L_{p2005}^{2009} = \frac{23}{18} \cdot 100 = 127,78\%$$

$$L_{p2000}^{2005} = \frac{16}{10} \cdot 100 = 160\% \quad L_{p2005}^{2010} = \frac{24}{18} \cdot 100 = 133,33\%$$

**Índice de Laspeyres**

Años	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Base=2000	100	110	120	130	150	160					
Base=2005						100	103,33	111,11	122,22	127,78	133,33

b) Determinar los índices de precios entre los períodos 2000-2004 con base 2005=100.

Con la definición de cambio de base  $I_h^i = \frac{I_0^i}{I_0^h}$ , se tiene:

$$L_{p2005}^{2000} = \frac{L_{p2000}^{2000}}{L_{p2000}^{2005}} \cdot 100 = \frac{100}{160} \cdot 100 = 62,5\% \quad \text{Para los otros índices de Laspeyres:}$$

$$L_{p2005}^{2001} = L_{p2000}^{2001} \cdot L_{p2005}^{2000} = 110 \cdot 62,5 = 68,75\%$$

$$L_{p2005}^{2002} = L_{p2000}^{2002} \cdot L_{p2005}^{2000} = 120 \cdot 62,5 = 75\%$$

$$L_{p2005}^{2003} = L_{p2000}^{2003} \cdot L_{p2005}^{2000} = 130 \cdot 62,5 = 81,25\%$$

$$L_{p2005}^{2004} = L_{p2000}^{2004} \cdot L_{p2005}^{2000} = 150 \cdot 62,5 = 93,75\%$$

**Índice de Laspeyres**

Años	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Base=2000	100	110	120	130	150	160					
Base=2005	62,5	68,75	75	81,25	93,75	100	103,33	111,11	122,22	127,78	133,33

**Ejemplo 6.** En la tabla se recogen los Índices de Precios Industriales para España con base 1974 y 1990 para los meses de diciembre de cada año. Se pide obtener una serie única para las dos bases.

Períodos	Base 1974	Base 1990
1987	429,70	$429,70 \times 0,2165 = 93,03$
1998	444,49	$444,49 \times 0,2165 = 96,23$
1989	460,67	$460,67 \times 0,2165 = 99,73$
1990	471,12	102
1991	$102,6 \times 4,6188 = 473,89$	102,6
1992	$104,2 \times 4,6188 = 481,28$	104,2
1993	$107,7 \times 4,6188 = 497,45$	107,7
1994	$113,3 \times 4,6188 = 523,31$	113,3
1995	$118,3 \times 4,6188 = 546,41$	118,3

$$\frac{I_{1974}^{1990}}{I_{1990}^{1990}} = \frac{471,12}{102} = 4,6188$$

$$\frac{I_{1974}^{1990}}{I_{1974}^{1990}} = \frac{102}{471,12} = 0,2165$$

Para cambiar la base de un índice basta con determinar la relación existente entre los valores del mismo para el único período en el que se dispone información en las dos bases.

En este sentido, el período en que se dispone información en las dos bases es diciembre de 1990, la

relación o **coeficiente de enlace** con base 1974 será:  $\frac{I_{1974}^{1990}}{I_{1990}^{1990}} = \frac{471,12}{102} = 4,6188$

Tomando 1990 como base, el **coeficiente de enlace**:  $\frac{I_{1990}^{1990}}{I_{1974}^{1990}} = \frac{102}{471,12} = 0,2165$

Una operación similar al **enlace de series** es el **cambio de base** para una serie concreta. En esta línea, para que la serie con base 1990 tomase el valor 100 en diciembre de 1995, se necesita buscar el coeficiente que haga posible esta transformación. En este caso, el coeficiente sería:

$$\frac{100}{I_{1990}^{1995}} = \frac{100}{1188,3} = 0,8453$$

Períodos	Base 1974	Base 1990	Base 1990 (Diciembre 1995=100)
1987	429,70	$429,70 \times 0,2165 = 93,03$	$93,03 \times 0,8453 = 78,61$
1998	444,49	$444,49 \times 0,2165 = 96,23$	$96,23 \times 0,8453 = 81,34$
1989	460,67	$460,67 \times 0,2165 = 99,73$	$99,73 \times 0,8453 = 84,30$
1990	471,12	102	$102 \times 0,8453 = 86,22$
1991	$102,6 \times 4,6188 = 473,89$	102,6	$102,6 \times 0,8453 = 86,73$
1992	$104,2 \times 4,6188 = 481,28$	104,2	$104,2 \times 0,8453 = 88,08$
1993	$107,7 \times 4,6188 = 497,45$	107,7	$107,7 \times 0,8453 = 91,04$
1994	$113,3 \times 4,6188 = 523,31$	113,3	$113,3 \times 0,8453 = 95,77$
1995	$118,3 \times 4,6188 = 546,41$	118,3	100



**DEFLACTAR SERIES ESTADÍSTICAS.-** Los números índices, y en especial los números índices de precios, tienen aplicaciones muy importantes en el mundo real.

Una función importante del dinero es la de pasar de unidades físicas a una unidad de cuenta común, mediante una valoración de los distintos bienes y servicios, generalmente mediante la utilización de un sistema de precios.

Realizada la homogeneización podemos efectuar comparaciones en base a la unidad de cuenta común, siempre que no se hayan producido cambios en los precios de determinados artículos.

En otras palabras, la comparación es posible cuando la valoración se realiza a **precios constantes** (de un período determinado), no es posible realizarla cuando se efectúa a **precios corrientes** (precios de cada período), puesto que las alteraciones de los precios de un período a otro asignan distinto poder adquisitivo a las unidades monetarias (en cuanto a su poder de compra, un euro de 2001 no es equivalente a un euro de 2010).

Para clarificar lo expuesto, podemos recurrir a un ejemplo sencillo: <<En 2010 el salario de un trabajador aumentó un 3% . Lo realmente importante no es que el trabajador reciba más euros cada mes, sino si con esos euros puede comprar más o menos bienes y servicios. Si la media de los productos que adquiere sube un 3%, es evidente que el salario del trabajador no ha experimentado un incremento real, sólo ha tenido un incremento monetario>>.

El procedimiento que permite transformar una serie expresada en valores corrientes a valores constantes se conoce como **deflactación** de la serie y al índice elegido para dicha transformación se le llama **deflactor**. El deflactor no siempre es el mismo, en cada caso habrá que elegir el óptimo para cada alcanzar el objetivo deseado.

**Ejemplo 7.** En la tabla se recoge el salario anual de un trabajador en el período 2005-2010:

**Índice de evolución del salario monetario**

Años	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Salario anual (euros)	6840	7102	7524	8208	8892	9234
Índice evolución	100	105	110	120	130	135

Como puede observarse, en la tercera fila se incluye un índice simple de evolución del salario del trabajador, tomando como base el año 2005. El índice de 2010 es de 135%, es decir, el salario del trabajador se ha incrementado durante éste período un 35%.

Para saber si realmente los salario han aumentado en término de lo que se puede adquirir con ellos, la forma más elemental sería compararlos con las subidas del IPC (que proporciona un indicador general de las variaciones de los precios de los bienes y servicios que adquieren las familias españolas).

### Índices de evolución salario monetario y salario real

Años	Salario anual (euros)	Índice evolución salario monetario	IPC Base 2005 (deflactor)	Salario anual real (deflactado) = Salario real/IPC	Índice evolución salario real
2005	6840	100	100	6840	100
2006	7102	105	106	6700	97,95
2007	7524	110	109	6902,8	100,92
2008	8208	120	119	6897,5	100,84
2009	8892	130	125	7113,6	104
2010	9234	135	130	7103,1	103,85

El salario anual real (salario deflactado) se obtiene dividiendo el salario anual de cada año o salario monetario por el IPC de cada año.

La deflactación es el proceso que ha permitido transformar los salarios anuales (en euros) a salarios reales, eliminando el efecto de la inflación. El índice elegido como **deflactor** ha sido el IPC. La serie deflactada se denomina serie a **precios constantes**.

En un caso general, en donde la serie estadística sea el resultado de un valor, es decir, el resultado de multiplicar cantidades por precios, se tiene la tabla adjunta:

Períodos	Valor nominal (en euros corrientes)	Valor real (en euros constantes del período 0)
0	$V_0 = \sum_{i=1}^n p_{i0} \cdot q_{i0}$	$V_0^R = \sum_{i=1}^n p_{i0} \cdot q_{i0}$
1	$V_1 = \sum_{i=1}^n p_{i1} \cdot q_{i1}$	$V_1^R = \sum_{i=1}^n p_{i0} \cdot q_{i1}$
2	$V_2 = \sum_{i=1}^n p_{i2} \cdot q_{i2}$	$V_2^R = \sum_{i=1}^n p_{i0} \cdot q_{i2}$
⋮	⋮	⋮
t	$V_t = \sum_{i=1}^n p_{it} \cdot q_{it}$	$V_t^R = \sum_{i=1}^n p_{i0} \cdot q_{it}$
⋮	⋮	⋮
n	$V_n = \sum_{i=1}^n p_{in} \cdot q_{in}$	$V_n^R = \sum_{i=1}^n p_{i0} \cdot q_{in}$

*Los índices de precios más utilizados son los de Laspeyres y Paasche, vamos a observar como actúan estos índices en su aplicación para deflactar una serie estadística.*

Sea  $V_t = \sum_{i=1}^n p_{it} \cdot q_{it}$  el valor de la magnitud compleja en el período t. Utilizando como deflactor el índice

de Laspeyres  $L_p = \frac{\sum_{i=1}^n p_{it} \cdot q_{i0}}{\sum_{i=1}^n p_{i0} \cdot q_{i0}}$ , se tiene:

$$\frac{V_t}{L_p} = \frac{\sum_{i=1}^n p_{it} \cdot q_{it}}{\frac{\sum_{i=1}^n p_{it} \cdot q_{i0}}{\sum_{i=1}^n p_{i0} \cdot q_{i0}}} = \sum_{i=1}^n p_{i0} \cdot q_{i0} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n p_{it} \cdot q_{it}}{\sum_{i=1}^n p_{it} \cdot q_{i0}} = V_0 \cdot P_q \neq V_t^R$$

*No se pasa de valores monetarios corrientes a valores monetarios constantes. A pesar de ello, el índice de Laspeyres se utiliza como deflactor muchas veces, por ser el que se elabora más comúnmente.*

Utilizando como deflactor el **ÍNDICE DE PAASCHE**  $P_p = \frac{\sum_{i=1}^n p_{it} \cdot q_{it}}{\sum_{i=1}^n p_{i0} \cdot q_{it}}$ , se tiene:

$$\frac{V_t}{P_p} = \frac{\sum_{i=1}^n p_{it} \cdot q_{it}}{\sum_{i=1}^n p_{i0} \cdot q_{it}} = \sum_{i=1}^n p_{i0} \cdot q_{it} = V_t^R$$

*Utilizando como deflactor el índice de Paasche, se obtiene una relación entre valores monetarios corrientes y valores monetarios constantes. En consecuencia, el índice de Paasche será el deflactor más adecuado siempre que los valores que aparecen en la serie estadística se puedan descomponer en sumas de precios por cantidades.*

Subrayar que la elección del deflactor, es decir, del índice de precios adecuado es fundamental: Si lo que se deflacta es una serie sobre la producción de la industria habría que utilizar un índice de precios industriales; si se deflacta una serie sobre el PIB nominal habría que utilizar un índice general de precios; si se deflacta una serie sobre los valores nominales o corrientes de la producción agraria sería conveniente disponer de un índice de precios agrarios; etc...

**REPERCUSIÓN Y PARTICIPACIÓN.**- En muchas ocasiones, al trabajar con índices complejos ponderados, tiene un interés especial conocer en qué medida intervienen o son responsables los distintos artículos o grupos de artículos de la variación que experimenta el índice general.

El conocimiento de su influencia es básico para planificar medidas de política económica por parte de los responsables, y también para el ciudadano interesado en atenuar los perjuicios que causa la inflación.

Para plantear el análisis de la repercusión de distintos grupos, supongamos que en el IPC se diferencian tres categorías de artículos: vivienda, alimentos y otros bienes y servicios; siendo un índice de base fija de tipo de Laspeyres.

Categorías	Ponderación	IPC		Tasas de variación $= (I_{t+1}/I_t) - 1$	Repercusión (tasa x ponderación)
		2009	2010		
Vivienda	20%	111	118	6,3	1,26
Alimentos	50%	105	109	3,8	1,9
Otros bienes servicios	30%	110	112	1,8	0,54
General		107,7	111,7	$TMV_{09}^{10} = 3,7$	3,7

Para los años 2009 y 2010 se tienen índices simples para cada una de los tres categorías, a partir de ellos, considerando las ponderaciones respectivas, se calculan los índices generales (107,7 y 111,7), media aritmética ponderada de los distintos índices simples:

$$I_{2009} = 111 \cdot 0,20 + 105 \cdot 0,50 + 110 \cdot 0,30 = 107,7$$

$$I_{2010} = 118 \cdot 0,20 + 109 \cdot 0,50 + 112 \cdot 0,30 = 111,7$$

La tasa de variación de cada categoría

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Vivienda } (118/111) - 1 = 6,3 \\ \text{Alimentos } (109/105) - 1 = 3,8 \\ \text{Otros bienes... } (112/110) - 1 = 1,8 \end{array} \right.$$

La tasa de variación media ( $t_m$ ) es la media aritmética ponderada de las distintas tasas de variación en el período analizado:  $t_{m09}^{10} = 6,3 \cdot 0,20 + 3,8 \cdot 0,50 + 1,8 \cdot 0,30 = 3,7$

Se observa que la suma de las repercusiones de las distintas categorías coincide con el índice general de la tasa de variación.

En términos de tasas, el índice crece un 3,7%, correspondiendo la mayor subida a la vivienda con un 6,3%, seguida de los alimentos con un 3,8%, y siendo otros bienes y servicios el grupo que menos aumenta con un 1,8%.

Un simple análisis al comparar las tasas de variación deja ver donde se producen las mayores subidas de precios, diciendo que la vivienda es el grupo más inflacionista. No obstante, no olvidemos que nuestro objetivo no es identificar en qué categoría suben más los precios, sino identificar que categoría contribuye más al proceso de inflación.

Con un razonamiento simple, se llega a que la categoría que tiene mayor repercusión sobre la inflación son los alimentos: La subida de precios de la vivienda supone 1,26 puntos porcentuales de los 3,7 puntos porcentuales que ha subido el IPC, mientras que los alimentos suponen un 1,9 puntos porcentuales de los 3,7 puntos porcentuales del IPC.

Generalizando, con una expresión matemática con más rigor, definimos la **REPERCUSIÓN** ó

**APORTACIÓN**, de la variación del artículo i-ésimo en el índice general: 
$$R_i = \frac{\Delta p_{it} \cdot q_{i0}}{\sum_{i=1}^n p_{i0} \cdot q_{i0}}$$

donde  $R_i$  es la repercusión de una variación en el precio del artículo i sobre el índice general de precios.

De otra parte,  $\sum_{i=1}^n R_i = \Delta L_p$ , la suma de las repercusiones de los n artículos que componen el índice general es igual a la variación total de dicho índice general.

En nuestro caso, el índice general es un índice de Laspeyres.

Finalmente, la **PARTICIPACIÓN** en porcentaje de la componente i-ésima en la variación del índice general es el cociente entre  $R_i$  en porcentaje y la suma de las repercusiones en porcentaje de todos los artículos, expresada en tantos por ciento:

$$P_i = \frac{R_i}{\sum_{i=1}^n \Delta p_{it} \cdot q_{i0}} \cdot 100$$

**Ejemplo 8.** Del índice de precios de consumo (I.P.C.) con base 2001=100, se sabe que:

Grupos	Índice mensual medio de 2005	Ponderaciones	Índice mensual medio de 2006
1. Alimentos, bebidas y tabaco	140,5	330	145,3
2. Vestido y calzado	132,4	85,6	138,1
3. Vivienda	121,6	187,3	123,2
4. Menaje	129,7	76,4	131,2
5. Servicios médicos y sanitarios	122,4	21,8	123,7
6. Transportes y comunicaciones	118,7	144,2	120,6
7. Esparcimiento, enseñanza y cultura	126,1	68,3	128,4
8. Otros bienes y servicios	134,2	86,4	137,8
		1000	

- Determinar las repercusiones y participaciones de cada uno de los grupos del I.P.C. en la variación sufrida por el índice general en 2006.
- ¿Cuáles son los grupos más y menos afectados por la subida de precios?

**Solución:**

**NOTA.-** El I.P.C. es un índice de Laspeyres  $L_p = \frac{\sum_{i=1}^n I_i \cdot w_i}{\sum_{i=1}^n w_i}$ , siendo  $I_i$  los índices de cada grupo y  $w_i$  las ponderaciones de cada bien o servicio.

Cuando las magnitudes simples que forman cada grupo sufren una variación, que denotamos por

$\Delta p_1, \Delta p_2, \dots, \Delta p_n$ , tenemos un nuevo índice de Laspeyres:  $L_p + \Delta L_p = \frac{\sum_{i=1}^n (I_i + \Delta I_i) \cdot w_i}{\sum_{i=1}^n w_i}$ .

La variación del Índice General, restando las dos igualdades anteriores, resulta:

$$\Delta L_p = (L_p + \Delta L_p) - L_p = \frac{\sum_{i=1}^n (I_i + \Delta I_i) \cdot w_i}{\sum_{i=1}^n w_i} - \frac{\sum_{i=1}^n I_i \cdot w_i}{\sum_{i=1}^n w_i} = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta I_i \cdot w_i}{\sum_{i=1}^n w_i} \equiv \Delta L_p = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta I_i \cdot w_i}{\sum_{i=1}^n w_i}$$

**La variación del porcentaje del Índice General:**

$$\frac{\Delta L_p}{L_p} \cdot 100 = \frac{\frac{\sum_{i=1}^n \Delta I_i \cdot w_i}{\sum_{i=1}^n w_i}}{\frac{\sum_{i=1}^n I_i \cdot w_i}{\sum_{i=1}^n w_i}} \cdot 100 = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta I_i \cdot w_i}{\sum_{i=1}^n I_i \cdot w_i} \cdot 100$$

La **REPERCUSIÓN** de variación de la componente i en el **ÍNDICE GENERAL**:

$$R_i = \frac{\Delta I_i \cdot w_i}{\sum_{i=1}^n w_i}$$

En porcentaje:  $R_i(\%) = \frac{R_i}{L_p} = \frac{\Delta I_i \cdot w_i}{\sum_{i=1}^n I_i \cdot w_i} \cdot 100$

La **PARTICIPACIÓN** en porcentaje de la componente i-ésima será el cociente entre la repercusión y la suma de las repercusiones de todas las componentes:

$$P_i = \frac{R_i}{\sum_{i=1}^n \Delta I_i \cdot w_i} \cdot 100$$

**a) Repercusión de cada grupo i-ésimo (i=1,2, ..., 8) en la variación global del I.P.C. desde 2005 a 2006:**

$$R_1 = \frac{\Delta I_1 \cdot w_1}{\sum_{i=1}^n w_i} = \frac{(145,3 - 140,5) \cdot 330}{1000} = 1,584\%$$

$$R_2 = \frac{\Delta I_2 \cdot w_2}{\sum_{i=1}^n w_i} = \frac{(138,1 - 132,4) \cdot 85,6}{1000} = 0,488\%$$

$$R_3 = \frac{\Delta I_3 \cdot w_3}{\sum_{i=1}^n w_i} = \frac{(123,2 - 121,6) \cdot 187,3}{1000} = 0,300\%$$

$$R_4 = \frac{\Delta I_4 \cdot w_4}{\sum_{i=1}^n w_i} = \frac{(131,2 - 129,7) \cdot 76,4}{1000} = 0,115\%$$

$$R_5 = \frac{\Delta I_5 \cdot w_5}{\sum_{i=1}^n w_i} = \frac{(123,7 - 122,4) \cdot 21,8}{1000} = 0,028\%$$

$$R_6 = \frac{\Delta I_6 \cdot w_6}{\sum_{i=1}^n w_i} = \frac{(120,6 - 118,7) \cdot 144,2}{1000} = 0,274\%$$

$$R_7 = \frac{\Delta I_7 \cdot w_7}{\sum_{i=1}^n w_i} = \frac{(128,4 - 126,1) \cdot 68,3}{1000} = 0,157\%$$

$$R_8 = \frac{\Delta I_8 \cdot w_8}{\sum_{i=1}^n w_i} = \frac{(137,8 - 134,2) \cdot 86,4}{1000} = 0,311\%$$

Grupos	Índice mensual medio de 2005 ( $I_i$ )	Ponderaciones ( $w_i$ )	Índice mensual medio de 2006 ( $I_i + \Delta I_i$ )	Repercusión $R_i = \Delta I_i \cdot w_i / \sum_{i=1}^8 w_i$
1. Alimentos, bebidas...	140,5	330	145,3	1,584
2. Vestido y calzado	132,4	85,6	138,1	0,488
3. Vivienda	121,6	187,3	123,2	0,300
4. Menaje	129,7	76,4	131,2	0,115
5. Servicios médicos...	122,4	21,8	123,7	0,028
6. Transportes...	118,7	144,2	120,6	0,274
7. Esparcimiento...	126,1	68,3	128,4	0,157
8. Otros bienes y servicios	134,2	86,4	137,8	0,311
	130,375	1000	133,62	$\sum_{i=1}^8 R_i = 3,257$

La suma de las Repercusiones  $\sum_{i=1}^8 R_i = 3,257\%$  es igual a la Variación Índice General ( $\Delta L_p$ ), donde:

$$\Delta L_p = \frac{\sum_{i=1}^8 (I_i + \Delta I_i) \cdot w_i}{\sum_{i=1}^8 w_i} - \frac{\sum_{i=1}^8 I_i \cdot w_i}{\sum_{i=1}^8 w_i} = 133,632 - 130,375 = 3,257\% \text{ (Variación Índice General)}$$

La **REPERCUSIÓN porcentual** de cada uno de los grupos  $R_i(\%) = \frac{R_i}{L_p} = \frac{\Delta I_i \cdot w_i}{\sum_{i=1}^n I_i \cdot w_i} \cdot 100$  en la variación

porcentual del Índice General, donde  $L_p = \sum_{i=1}^8 I_i \cdot w_i / \sum_{i=1}^8 w_i = 130,527$ , será:

Grupos	Repercusión $R_i = \Delta I_i \cdot w_i / \sum_{i=1}^n w_i$	Repercusión en porcentaje $R_1(\%) = \frac{R_1}{L_p} \cdot 100$	Participación $P_i = \frac{R_i}{\sum_{i=1}^8 R_i} \cdot 100$
1. Alimentos, bebidas y tabaco	1,584	1,214	48,639
2. Vestido y calzado	0,488	0,374	14,982
3. Vivienda	0,300	0,230	9,202
4. Menaje	0,115	0,088	3,519
5. Servicios médicos y sanitarios	0,028	0,022	0,870
6. Transportes y comunicaciones	0,274	0,210	8,413
7. Esparcimiento, enseñanza...	0,157	0,120	4,824
8. Otros bienes y servicios	0,311	0,238	9,551
	$\sum_{i=1}^8 R_i = 3,257$	$\sum_{i=1}^8 R_i(\%) = 2,495$	100

$$R_1(\%) = \frac{R_1}{L_p} \cdot 100 = \frac{1,584}{130,527} \cdot 100 = 1,214\% \quad , \quad R_2(\%) = \frac{R_2}{L_p} \cdot 100 = \frac{0,488}{130,527} \cdot 100 = 0,374\% \quad , \text{ sucesivamente.}$$

La **VARIACIÓN (en porcentaje) del ÍNDICE GENERAL** es la suma de las repercusiones (en porcentaje)

$$\sum_{i=1}^8 R_i(\%) = 2,495 \quad , \text{ o también, } \frac{\Delta L_p}{L_p} \cdot 100 = \frac{133,632 - 130,375}{130,527} \cdot 100 = 2,495$$

La **PARTICIPACIÓN** de cada grupo en la variación del I.P.C. viene dada por la relación:

$$P_i = \frac{R_i}{\sum_{i=1}^8 \Delta I_i \cdot w_i} \cdot 100 = \frac{R_i}{\sum_{i=1}^8 R_i} \cdot 100 \quad , \text{ así, por ejemplo, } P_2 = \frac{R_2}{\sum_{i=1}^8 R_i} \cdot 100 = \frac{0,488}{3,257} \cdot 100 = 14,982\%$$

**b) ¿Cuáles son los grupos más y menos afectados por la subida de precios?**

El grupo que más ha afectado a la subida del I.P.C. es el primero (alimentos, bebidas y tabaco), que de la subida del Índice de 2,495%, ha repercutido en un 1,214%, suponiendo un 48,639% de la variación total.

Por el contrario, el quinto grupo (servicios médicos y sanitarios) fue el que menos repercusión tuvo, con 0,022%, suponiendo un 0,87% de la variación total.

**Ejemplo 9.** Dada la información del I.P.C. , se solicitan las repercusiones y participaciones de cada uno de los grupos. ¿Cuál es el grupo más afectado por la subida de los precios?

Grupos	Índices 2007	Ponderaciones	Índices 31/12/2008
1. Alimentos, bebidas y tabaco	100	367,2	125,9
2. Vestido y calzado	100	100,12	132,8
3. Vivienda	100	157,3	133,4
4. Menaje	100	76,1	122
5. Servicios médicos y sanitarios	100	42,65	123
6. Transportes y comunicaciones	100	92,35	126,5
7. Esparcimiento, enseñanza y cultura	100	78,15	128,4
8. Otros bienes y servicios	100	86,13	134,4
	<b>100</b>	<b>1000</b>	<b>128,33</b>

**Solución:**

El I.P.C. es un índice de Laspeyres 
$$L_p = \frac{\sum_{i=1}^n I_i \cdot w_i}{\sum_{i=1}^n w_i}$$
, siendo  $I_i$  los índices de cada grupo y  $w_i$  las

ponderaciones de cada bien o servicio.

La repercusión de cada grupo  $i$ -ésimo ( $i=1,2, \dots, 8$ ) en la variación global del I.P.C. desde 2007 a 2008:

$$R_1 = \frac{\Delta I_1 \cdot w_1}{\sum_{i=1}^n w_i} = \frac{(125,9 - 100) \cdot 367,2}{1000} = 9,51\%$$

$$R_2 = \frac{\Delta I_2 \cdot w_2}{\sum_{i=1}^n w_i} = \frac{(132,8 - 100) \cdot 100,12}{1000} = 3,284\%$$

$$R_3 = \frac{\Delta I_3 \cdot w_3}{\sum_{i=1}^n w_i} = \frac{(133,4 - 100) \cdot 157,3}{1000} = 5,254\%$$

$$R_4 = \frac{\Delta I_4 \cdot w_4}{\sum_{i=1}^n w_i} = \frac{(122 - 100) \cdot 76,1}{1000} = 1,674\%$$

$$R_5 = \frac{\Delta I_5 \cdot w_5}{\sum_{i=1}^n w_i} = \frac{(123 - 100) \cdot 42,65}{1000} = 0,981\%$$

$$R_6 = \frac{\Delta I_6 \cdot w_6}{\sum_{i=1}^n w_i} = \frac{(126,5 - 100) \cdot 92,35}{1000} = 2,447\%$$

$$R_7 = \frac{\Delta I_7 \cdot w_7}{\sum_{i=1}^n w_i} = \frac{(128,4 - 100) \cdot 78,15}{1000} = 2,219\%$$

$$R_8 = \frac{\Delta I_8 \cdot w_8}{\sum_{i=1}^n w_i} = \frac{(134,4 - 100) \cdot 86,13}{1000} = 2,963\%$$



Grupos	Índice 2007 ( $I_i$ )	Ponderaciones ( $w_i$ )	Índice 2008 ( $I_i + \Delta I_i$ )	Repercusión $R_i = \Delta I_i \cdot w_i / \sum_{i=1}^8 w_i$
1. Alimentos, bebidas...	100	367,2	125,9	9,510
2. Vestido y calzado	100	100,12	132,8	3,284
3. Vivienda	100	157,3	133,4	5,254
4. Menaje	100	76,1	122	1,674
5. Servicios médicos...	100	42,65	123	0,981
6. Transportes...	100	92,35	126,5	2,447
7. Esparcimiento, enseñanza...	100	78,15	128,4	2,219
8. Otros bienes y servicios	100	86,13	134,4	2,963
	<b>100</b>	<b>1000</b>	<b>128,33</b>	<b>28,33</b>

La suma de las Repercusiones  $\sum_{i=1}^8 R_i = 28,33\%$  es igual a la Variación Índice General ( $\Delta L_p$ ):

$$\Delta L_p = \frac{\sum_{i=1}^8 (I_i + \Delta I_i) \cdot w_i}{\sum_{i=1}^8 w_i} - \frac{\sum_{i=1}^8 I_i \cdot w_i}{\sum_{i=1}^8 w_i} = 128,33 - 100 = 28,33\%, \text{ ya sabíamos que } \sum_{i=1}^8 R_i = \Delta L_p$$

La **PARTICIPACIÓN** de cada grupo en la variación del I.P.C. viene dada por la relación:

$$P_i = \frac{R_i}{\sum_{i=1}^8 \Delta I_i \cdot w_i} \cdot 100 = \frac{R_i}{\sum_{i=1}^8 R_i} \cdot 100, \text{ así, por ejemplo, } P_2 = \frac{R_2}{\sum_{i=1}^8 R_i} \cdot 100 = \frac{3,284}{28,33} \cdot 100 = 11,59\%$$

La **REPERCUSIÓN porcentual** de cada uno de los grupos viene dado por la expresión:

$$R_i(\%) = \frac{R_i}{L_p} = \frac{\Delta I_i \cdot w_i}{\sum_{i=1}^n I_i \cdot w_i} \cdot 100, \text{ donde } L_p = \frac{\sum_{i=1}^8 I_i \cdot w_i}{\sum_{i=1}^8 w_i} = 100.$$

**LA VARIACIÓN (en porcentaje) DEL ÍNDICE GENERAL** es la suma de las repercusiones (en porcentaje)

$$\sum_{i=1}^8 R_i(\%) = 28,33, \text{ o también, } \frac{\Delta L_p}{L_p} \cdot 100 = \frac{128,33 - 100}{100} \cdot 100 = 28,33$$

Grupos	Repercusión $R_i = \Delta I_i \cdot w_i / \sum_{i=1}^n w_i$	Participación $P_i = \frac{R_i}{\sum_{i=1}^8 R_i} \cdot 100$	Repercusión en porcentaje $R_1(\%) = \frac{R_1}{L_p} \cdot 100$
1. Alimentos, bebidas y tabaco	9,510	33,57	9,510
2. Vestido y calzado	3,284	11,59	3,284
3. Vivienda	5,254	18,54	5,254
4. Menaje	1,674	5,91	1,674
5. Servicios médicos y sanitarios	0,981	3,46	0,981
6. Transportes y comunicaciones	2,447	8,64	2,447
7. Esparcimiento, enseñanza y cultura	2,219	7,83	2,219
8. Otros bienes y servicios	2,963	10,46	2,963
	$\sum_{i=1}^8 R_i = 28,33\%$	100	$\sum_{i=1}^8 R_i(\%) = 28,33$

El primer grupo (alimentos, bebidas y tabaco) es el que más ha influido en la subida del I.P.C., suponiendo un 33,57% de la variación total. Es decir, en la subida del índice en un 28,33% ha tenido un peso del 9,51%.

De otra parte, el quinto grupo (servicios médicos y sanitarios) es el que menos ha influido en la subida del IPC, representando un 3,46% de la variación total; esto es, en la subida del índice en un 28,33% ha repercutido en 0,981%.

**Ejemplo 10.** Dados los datos de índice de precios de la tabla adjunta, obtener la serie homogénea del índice en base 1990.

Año	I. base 1990	I. base 1995	I. base 2010
1990	100		
1991	115		
1992	121		
1993	130		
1994	132		
1995	135	100	
1996	151,2	112	
1997	159,3	118	
1998	164,7	122	
1999	172,8	128	
2000	175,5	130	100
2001	191,295	141,7	109
2002	196,56	145,6	112
2003	201,825	149,5	115
2004	210,6	156	120
2005	217,62	161,2	124

#### Etapas

- Se convierten los números índices en base 2010 a base 1995. Para ello, se multiplica cada índice en base 2010 por 130, dividiendo por 100.
- Se convierten los números índices en base 1995 a base 1990, multiplicando cada índice en base 1995 por 135 y dividiéndolo por 100.

**Ejemplo 11.** La tabla muestra información relativa a precios y cantidades de bienes entre 2008 y 2009:

Bienes	2008		2009	
	Precio 2008	Cantidad 2008	Precio 2009	Cantidad 2009
A	5	5	5	10
B	10	8	15	5
C	12	1	8	3

- a) Determinar el índice de Laspeyres y de Paasche, los índices simples de cantidad para el año 2009 con base 2008, y el índice de valor de 2009 con base 2008.
- b) Si  $L_{p_{08}}^{09} = 111$  y  $P_{q_{08}}^{09} = 105$ , hallar el índice de valor de 2009 con base 2007.

**Solución:**

a) Índice de Laspeyres:  $L_{p_{08}}^{09} = \frac{\sum_{i=1}^3 p_{i09} \cdot q_{i08}}{\sum_{i=1}^3 p_{i08} \cdot q_{i08}} \cdot 100$       Índice de Paasche:  $P_{p_{08}}^{09} = \frac{\sum_{i=1}^3 p_{i09} \cdot q_{i09}}{\sum_{i=1}^3 p_{i08} \cdot q_{i09}} \cdot 100$

Bienes	Laspeyres		Paasche	
	$p_{i08} \cdot q_{i08}$	$p_{i09} \cdot q_{i08}$	$p_{i09} \cdot q_{i09}$	$p_{i08} \cdot q_{i09}$
A	25	25	50	50
B	80	120	75	50
C	12	8	24	36
	117	153	149	136

$$L_{p_{08}}^{09} = \frac{\sum_{i=1}^3 p_{i09} \cdot q_{i08}}{\sum_{i=1}^3 p_{i08} \cdot q_{i08}} \cdot 100 = \frac{153}{117} \cdot 100 = 130,77\%$$

$$P_{p_{08}}^{09} = \frac{\sum_{i=1}^3 p_{i09} \cdot q_{i09}}{\sum_{i=1}^3 p_{i08} \cdot q_{i09}} \cdot 100 = \frac{149}{136} \cdot 100 = 109,56\%$$

El índice de valor para el período (2008-2009) sería:  $IV_{08}^{09} = L_{p_{08}}^{09} \cdot P_{q_{08}}^{09}$ . Tendríamos que calcular  $P_{q_{08}}^{09}$

$$P_{q_{08}}^{09} = \frac{\sum_{i=1}^3 q_{i09} \cdot p_{i09}}{\sum_{i=1}^3 q_{i08} \cdot p_{i09}} \cdot 100 = \frac{149}{153} \cdot 100 = 97,39\%$$

en consecuencia,  $IV_{08}^{09} = L_{p_{08}}^{09} \cdot P_{q_{08}}^{09} = 1,3077 \cdot 0,9739 \cdot 100 = 127,36\%$

Los índices simples de cantidad vienen dados por la expresión:

$$I_0^t = \frac{q_{it}}{q_{i0}} \cdot 100 \quad \left\{ \begin{array}{l} A: I_{08}^{09} = \frac{10}{5} \cdot 100 = 200\% \quad \text{variación del 100\%} \\ B: I_{08}^{09} = \frac{5}{8} \cdot 100 = 62,5\% \quad \text{variación decreciente del 37,5\%} \\ C: I_{08}^{09} = \frac{3}{1} \cdot 100 = 300\% \quad \text{variación del 200\%} \end{array} \right.$$

b) Si  $L_{p_{07}^{08}} = 111$  y  $P_{q_{07}^{08}} = 105$ , hallar el índice de valor de 2009 con base 2007 recurrimos al enlace en cadena:

$$IV_{07}^{09} = IV_{07}^{08} \cdot IV_{08}^{09} = \left[ L_{p_{07}^{08}} \cdot P_{p_{07}^{08}} \right] \cdot IV_{08}^{09} = [1,11 \cdot 1,05] \cdot (127,36) = 148,43\%$$

o también:

$$IV_{07}^{09} = IV_{07}^{08} \cdot IV_{08}^{09} = \left[ L_{p_{07}^{08}} \cdot P_{p_{07}^{08}} \right] \cdot IV_{08}^{09} = [1,11 \cdot 1,05] \cdot \frac{\sum_{i=1}^3 p_{i09} \cdot q_{i09}}{\sum_{i=1}^3 p_{i08} \cdot q_{i08}} = 1,1655 \cdot \frac{149}{117} = 148,43\%$$

Otra forma de proceder hubiera sido:

$$IV_{07}^{08} = \frac{\sum_{i=1}^3 p_{i08} \cdot q_{i08}}{\sum_{i=1}^3 p_{i07} \cdot q_{i07}} = L_{p_{07}^{08}} \cdot P_{q_{07}^{08}} \Rightarrow \frac{117}{\sum_{i=1}^3 p_{i07} \cdot q_{i07}} = 1,11 \cdot 1,05 \mapsto \sum_{i=1}^3 p_{i07} \cdot q_{i07} = 100,386$$

$$\text{con lo cual, } IV_{07}^{09} = \frac{\sum_{i=1}^3 p_{i09} \cdot q_{i09}}{\sum_{i=1}^3 p_{i07} \cdot q_{i07}} = \frac{149}{100,386} = 148,43\%$$

**Ejemplo 12.** Relacionar las tasas de variación de los índices cuánticos de Laspeyres y Paasche entre dos períodos con la tasa de variación del índice cuántico de Fisher entre esos períodos.

**Solución:**

Denotando por  $T_L$  y  $T_P$ , respectivamente, las tasas de variación de los índices cuánticos de Laspeyres y Paasche entre los dos períodos, y siendo  $T_F$  la tasa de variación del índice cuántico de Fisher entre esos períodos.

Sabemos que el índice cuántico de Fisher:  $F_q^2 = L_q \cdot P_q$

Multiplicando, respectivamente, los índices cuánticos de Laspeyres y Paasche por  $(1 + T_L)$  y  $(1 + T_P)$ , los nuevos índices de Laspeyres y Paasche son  $L_q^* = (1 + T_L) \cdot L_q$  y  $P_q^* = (1 + T_P) \cdot P_q$ , y para el nuevo índice de Fisher resulta:

$$[(1 + T_F) \cdot F_q]^2 = [(1 + T_L) \cdot L_q] \cdot [(1 + T_P) \cdot P_q] \Rightarrow (1 + T_F)^2 = (1 + T_L) \cdot (1 + T_P)$$

**Ejemplo 13.** Una empresa que produce tres variedades de aceite, sabe que en 2007 el valor añadido bruto de cada variedad fue 100, 120 y 60, respectivamente. Las producciones en el período 2007-2010 fueron:

	2007	2008	2009	2010
A	40	30	60	65
B	50	100	110	120
C	60	130	150	190

Se pide:

- $L_{Q_{07}^{08}}$ ,  $L_{Q_{07}^{09}}$  y  $L_{Q_{07}^{10}}$
- Las variaciones relativas anuales de la producción
- La tasa media anual de variación de la producción para el período 2007-2010

**Solución:**

El índice cuántico de Laspeyres  $L_{Q_{i0}^{it}} = \frac{\sum_{i=1}^n q_{it} \cdot p_{i0}}{\sum_{i=1}^n q_{i0} \cdot p_{i0}} \cdot 100$ . Por otra parte, conocemos el valor añadido

bruto para el 2007:  $\sum_{i=1}^3 q_{i07} \cdot p_{i07} = 100 + 120 + 60 = 280$ .

Como nos dan las producciones anuales para cada variedad, solo nos falta conocer los precios de cada variedad en el 2007, tarea que resulta sencilla al saber el valor añadido:

$$V_{A07} = p_{A07} \cdot q_{A07} \quad \mapsto \quad 100 = p_{A07} \cdot 40 \quad \Rightarrow \quad p_{A07} = 2,5$$

$$V_{B07} = p_{B07} \cdot q_{B07} \quad \mapsto \quad 120 = p_{B07} \cdot 50 \quad \Rightarrow \quad p_{B07} = 2,4$$

$$V_{C07} = p_{C07} \cdot q_{C07} \quad \mapsto \quad 60 = p_{C07} \cdot 60 \quad \Rightarrow \quad p_{C07} = 1$$

Por tanto,

	2007		2008	2009	2010
	$q_{07}$	$p_{07}$	$q_{08}$	$q_{09}$	$q_{10}$
A	40	2,5	30	60	65
B	50	2,4	100	110	120
C	60	1	130	150	190

$$\sum_{i=1}^3 q_{i07} \cdot p_{i07} = 100 + 120 + 60 = 280$$

$$L_{Q_{07}^{08}} = \frac{\sum_{i=1}^3 q_{i08} \cdot p_{i07}}{\sum_{i=1}^3 q_{i07} \cdot p_{i07}} \cdot 100 = \frac{30 \cdot 2,5 + 100 \cdot 2,4 + 130 \cdot 1}{280} \cdot 100 = 158,93$$

$$L_{Q_{07}^{09}} = \frac{\sum_{i=1}^3 q_{09} \cdot p_{07}}{\sum_{i=1}^3 q_{07} \cdot p_{07}} \cdot 100 = \frac{60 \cdot 2,5 + 110 \cdot 2,4 + 150 \cdot 1}{280} \cdot 100 = 201,43$$

$$L_{Q_{07}^{10}} = \frac{\sum_{i=1}^3 q_{10} \cdot p_{07}}{\sum_{i=1}^3 q_{07} \cdot p_{07}} \cdot 100 = \frac{65 \cdot 2,5 + 120 \cdot 2,4 + 190 \cdot 1}{280} \cdot 100 = 228,75$$

a) Las variaciones relativas anuales de la producción

Años	Índice Laspeyres	Tasa de variación
2007	100	
2008	158,93	0,5893
2009	201,43	0,2674
2010	228,75	0,1356

La tasa de variación de la producción (tanto por uno) en 2007-2010, con el índice de Laspeyres como índice deflactor, viene dada por la relación:

$$t_{Q_{07}^{08}} = \frac{L_{Q_{07}^{08}}}{L_{Q_{07}^{07}}} - 1 = \frac{158,93}{100} - 1 = 0,5893$$

$$t_{Q_{08}^{09}} = \frac{L_{Q_{07}^{09}}}{L_{Q_{07}^{08}}} - 1 = \frac{201,43}{158,93} - 1 = 0,2674$$

$$t_{Q_{09}^{10}} = \frac{L_{Q_{07}^{10}}}{L_{Q_{07}^{09}}} - 1 = \frac{228,75}{201,43} - 1 = 0,1356$$

b) La tasa media anual de variación de la producción para el período 2007-2010

$$(1 + t_{m_{07}^{10}})^3 = L_{Q_{07}^{10}} \quad \mapsto \quad t_{m_{07}^{10}} = \sqrt[3]{2,2875} - 1 = 0,3176$$

## ÍNDICE DE PRECIOS DE CONSUMO (I.P.C.)

El Índice de Precios de Consumo (antes Índice del Coste de la Vida), es el más popular de todos los índices por la influencia que ejercen sus resultados en los agentes económicos y en la opinión pública.

La anterior denominación **Índice del Coste de la Vida (I.C.V.)** proviene de la definición dada por el economista ruso A. Konüs (1924): «*La relación de gastos en metálico que un individuo debe hacer para asegurarse un mismo nivel de vida en dos situaciones que difieren solamente en precios*».

La aplicación práctica de esta definición presentaba algunos inconvenientes, como la subjetividad del nivel de vida y su mantenimiento durante un largo período de tiempo, además de la referencia a un solo individuo.

Actualmente, y siguiendo las corrientes internacionales, el indicador utilizado en España es el IPC, elaborado por el INE. Como ya se ha indicado, es un indicador muy importante y de trascendencia extraordinaria en numerosos aspectos de la vida económica.

La finalidad del IPC es cuantificar la evolución del nivel de precios de los bienes y servicios de consumo adquiridos por los hogares residentes en España. El primer sistema de números índices de precios de bienes y servicios de consumo se elaboró por el INE con base en julio de 1939. Posteriormente, se fue cambiando de base (1958, 1968, 1976, 1983, 1992).

Técnicamente, el IPC hasta el 2001 se calculaba como un índice de precios de Laspeyres, que utilizaba como ponderaciones los gastos realizados en la cesta de la compra de la familia media española. Este sistema revisaba, cada vez que se realizaba un cambio de base, la selección de bienes y servicios y su importancia en el consumo de los hogares a partir de la información que proporcionaba la Encuesta de Presupuestos Familiares, que también realizaba el INE.

Desde la implantación del IPC, base 2001, se ha iniciado un nuevo sistema de elaboración incorporando como novedad más importante su dinamismo, puesto que se ha convertido en un índice de Laspeyres encadenado anualmente. El origen del nuevo método está en revisar, en el menor plazo posible, los cambios en la estructura de consumo de los hogares, para lo que se cuenta con la Encuesta de Presupuestos Familiares de tipo continuo.

En casi todos los países, el índice de precios utilizado es el de Laspeyres,  $L_p = \frac{\sum_{i=1}^n p_{it} \cdot q_{i0}}{\sum_{i=1}^n p_{i0} \cdot q_{i0}}$ , ya que su

cálculo no requiere información sobre las cantidades actuales.

En los países de la UE se elabora además el Índice de Precios de Consumo Armonizado (**IPCA**) de los **IPC** de cada país, de forma que se obtengan indicadores de inflación comparables.

## **ETAPAS DE ELABORACIÓN DEL IPC:**

1. Realización de una Encuesta de Presupuestos Familiares a través de una muestra que comprenda a un número significativo de familias de España.
2. Estimación, para el período base, de los bienes y servicios consumidos a partir de la información muestral.
3. Seleccionar, entre todos los bienes y servicios, aquéllos que por su importancia en el gasto total deban incluirse en la cesta de la compra.
4. Especificación de cada uno de los artículos de la cesta; es decir determinación de las características de todos los artículos (calidades, variedades, unidad de medida, etc.).
5. Selección de municipios y, dentro de éstos, de los establecimientos en los que se va a efectuar la recogida de datos.
6. Organización del trabajo de campo.
7. Procesamiento de la información recogida, depurando y realizando los cálculos respectivos para obtener los índices establecidos.

Dentro de cada conjunto espacial se calculan ocho índices independientes, para los otros tantos grupos de bienes y servicios de consumo en que se estructura la cesta de la compra:

- Alimentos, bebidas y tabaco.
- Vestido y calzado.
- Vivienda.
- Menaje y servicios para el hogar.
- Servicios médicos y conservación de la salud.
- Transportes y comunicaciones.
- Esparcimiento, cultura y enseñanza.
- Otros gastos de consumo.

Aparte de éstos, se calculan índices más detallados para estudios especiales, al igual que índices mensuales y medios anuales, etc.

## **ÍNDICE DE PRODUCCIÓN INDUSTRIAL (IPI)**

Normalmente se elaboran dos series de índices de producción industrial de periodicidad mensual, una serie recoge las variaciones de la oferta industrial dentro de la mayoría de las ramas de la actividad industrial (excluida la construcción), y otra especificando las variaciones en la producción de bienes de equipo.

Los índices de producción industrial que se calculan en España son índices de Laspeyres. Para su elaboración se realiza una encuesta continua de periodicidad mensual que analiza todos los meses más de nueve mil establecimientos.

## **ÍNDICE DE PRECIOS INDUSTRIALES (IPRI)**

Miden la evolución mensual de los precios de los productos industriales fabricados y vendidos en el mercado interior, constituye el deflactor idóneo para determinar el valor real de la Formación Bruta de Capital.



Los índices de precios industriales que se calculan en España son del tipo de Laspeyres. Para su elaboración se realiza una encuesta continua de periodicidad mensual que analiza todos los meses más de seis mil establecimientos industriales.

## ÍNDICES DE COMERCIO EXTERIOR

En estos índices tiene un papel relevante la ponderación, puesto que al analizar la evolución de la balanza comercial puede haber productos con un gran volumen de transacciones pero de poco valor monetario que pueden encubrir la influencia de otros productos que, a pesar de su menor frecuencia en el intercambio, sean de un importe monetario relevante.

Los índices tradicionalmente utilizados son los de Laspeyres y Paasche de precios y cantidades. Además se elaboran otros índices, como el Índice de Relaciones de Cambio, o relación real de intercambio, que viene expresado en la relación:

$$R = \frac{P_p(X)}{P_p(M)}$$

donde, X es el volumen de las exportaciones, M el de las importaciones y  $P_p$  un índice de precios de Paasche.

**Ejemplo 14.** Las relaciones comerciales entre España y otro país B vienen reflejadas en la tabla adjunta, se desea conocer el índice de relación de cambio para España en 2005.

España exporta a B	2000		2005	
	Precio	Cantidad	Precio	Cantidad
x	10	1500	15	1500
y	20	2000	25	2400

España importa de B	2000		2005	
	Precio	Cantidad	Precio	Cantidad
u	5	800	8	840
v	10	400	15	520
z	15	600	18	680

**Solución:**

El índice de relación de cambio en el comercio exterior viene dado por  $R_{io}^{it} = \frac{P_p(Ex)}{P_p(Im)}$

Calculando los índices de precios de Paasche para las exportaciones e importaciones del año 2005, con base el año 2000.

$$P_p(Ex)_{00}^{05} = \frac{\sum_{i=1}^2 p_{it} \cdot q_{it}}{\sum_{i=1}^2 p_{i0} \cdot q_{it}} = \frac{15 \cdot 1500 + 25 \cdot 2400}{10 \cdot 1500 + 20 \cdot 2400} = 1,31$$

$$P_p(\text{Im})_{00}^{05} = \frac{\sum_{i=1}^2 p_{it} \cdot q_{it}}{\sum_{i=1}^3 p_{i0} \cdot q_{it}} = \frac{8.840 + 15.520 + 18.680}{5.840 + 10.520 + 15.680} = 1,37$$

En consecuencia,  $R_{00}^{05} = \frac{P_p(\text{Ex})}{P_p(\text{Im})} = \frac{1,31}{1,37} = 0,96$

Como  $R_{00}^{05} < 1$ , el precio de los productos exportados es menor que el de importados, sitúa a España en una posición desventajosa frente al país B.

1. El índice de precios de un producto en 2005, con base 2003, es igual a 125%, y en 2003 con base 2000, es del 130%, entonces la tasa de variación del precio del producto en el período 2000-2005 es:

- a) 62,5%                      b) 60%                      c) 25%

**Solución:** La solución es (a).

Para calcular la tasa de variación del precio del producto en el período 2000-2005 se necesita tener el índice de 2005 con base 2000, que se obtiene aplicando la propiedad circular:

$I_{00}^{05} = I_{00}^{03} \cdot I_{03}^{05} = 1,3 \cdot 1,25 = 1,625$  (162,5%). En consecuencia, en el período 2000-2005, el precio del producto ha aumentado un 62,5%.

2. Si el índice de ventas de una empresa en 2005, con base 2003, es igual a 125%, entonces la tasa media de variación anual de las ventas de la empresa en el período 2003-2005 es igual a:

- a) 50%                      b) 13,5%                      c) 11,8%

**Solución:** La solución es (c).

La tasa media de variación anual en el período 2003-2005 se calcula mediante la expresión:

$$t_{m \ 03}^{05} = \sqrt{(1 + t_{03}^{05})} - 1 = \sqrt{1,25} - 1 = 0,118 \text{ (11,8\%)}$$

3. El índice de valor se puede calcular como:

- El cociente entre el valor de las cantidades del año corriente a precios del año base y el valor de las cantidades del año base a precios del año corriente.
- El producto del índice de precios de Laspeyres y el índice de cantidades de Paasche.
- El cociente entre el valor de las cantidades del año corriente a precios del año corriente y el valor de las cantidades del año base a precios del año corriente.

**Solución:** La solución es (b).

El índice de valor, cociente del valor de las cantidades del período corriente a precios del período corriente y el valor de las cantidades del período base a precios del período base, se puede calcular como el producto de índices de precios y cantidades. Es decir:

$$IV_0^t = \frac{\sum_{i=1}^n p_{it} \cdot q_{it}}{\sum_{i=1}^n p_{i0} \cdot q_{i0}} = L_{p0}^t \cdot P_{Q0}^t = L_{Q0}^t \cdot P_{p0}^t = F_{p0}^t \cdot F_{Q0}^t$$

4. Un producto valía 30 unidades monetarias (u.m.) en 2005, en 2007 su precio ha aumentado un 6% con respecto a 2005, y en 2008 su precio aumentó en 6 u.m. con respecto al año anterior. El índice de precios del producto en 2008, con base 2005, es igual a:

- a) 106%                                      b) 113,85%                                      c) 126%

**Solución:** La solución es (c).

El índice de precios del producto en 2007 es  $p_{07} = p_{05}(1 + t_{05}^{07}) = 30 \cdot (1 + 0,06) = 31,8$  u.m.

En 2008 es  $p_{08} = p_{07} + \Delta p_{07}^{08} = 31,8 + 6 = 37,8$  u.m.

En consecuencia,  $I_{05}^{08} = \frac{p_{08}}{p_{05}} = \frac{37,8}{30} = 1,26$  (126%)

5. Señalar la afirmación incorrecta en relación con la colección de índices:

Años	Índice base 2001	Índice base 2005
2003	112,1	
2004	119,2	
2005	122	
2006		121
2007		134,5

- a)  $I_{07}^{03} = 68,32\%$                                       b)  $I_{06}^{05} = 82,52\%$                                       c)  $I_{01}^{07} = 164,09\%$

**Solución:** La solución es (b).

Considerando la propiedad circular:  $I_{01}^{07} = I_{01}^{05} \cdot I_{05}^{07} = 1,22 \cdot 1,345 = 1,6409$

$$1,121 = I_{01}^{03} = I_{01}^{07} \cdot I_{07}^{03} = 1,6409 \cdot I_{07}^{03} \Rightarrow I_{07}^{03} = \frac{1,121}{1,6409} = 0,6832$$

Por la propiedad de inversión, caso particular de la propiedad circular:  $I_{06}^{05} = \frac{1}{I_{05}^{06}} = \frac{1}{1,21} = 0,8264$

6. Señalar la afirmación incorrecta:

- a) El índice de Laspeyres es el índice de precios simple más utilizado.
- b) El índice de Laspeyres no verifica la propiedad circular.
- c) El índice valor se puede obtener como el producto del índice de precios de Laspeyres y el índice de cantidades de Paasche.

**Solución:** La solución es (a).

El índice de Laspeyres no es un índice simple, es un índice compuesto.

El índice de Laspeyres no verifica la propiedad circular, aunque suele utilizarse con esta clase de índice. Se comprueba fácilmente, sean:

$$L_{P0}^1 = \frac{\sum_{i=1}^k p_{i1} \cdot q_{i0}}{\sum_{i=1}^k p_{i0} \cdot q_{i0}}, \quad L_{P1}^2 = \frac{\sum_{i=1}^k p_{i2} \cdot q_{i1}}{\sum_{i=1}^k p_{i1} \cdot q_{i1}} \quad \mapsto \quad L_{P0}^1 \cdot L_{P1}^2 = \frac{\sum_{i=1}^k p_{i1} \cdot q_{i0} \cdot \sum_{i=1}^k p_{i2} \cdot q_{i1}}{\sum_{i=1}^k p_{i0} \cdot q_{i0} \cdot \sum_{i=1}^k p_{i1} \cdot q_{i1}} \neq L_{P0}^2 = \frac{\sum_{i=1}^k p_{i2} \cdot q_{i0}}{\sum_{i=1}^k p_{i0} \cdot q_{i0}}$$

7. La relación entre la tasa de variación del IPC,  $t_{IPC00}^{02}$ , la de los salarios en términos nominales  $t_{N00}^{02}$ , y la de los salarios en términos reales,  $t_{R00}^{02}$ , en el período 2000-2002 es:

- a)  $(1 + t_{N00}^{02}) \cdot (1 + t_{IPC00}^{02}) = (1 + t_{R00}^{02})$
- b)  $(1 + t_{R00}^{02}) \cdot (1 + t_{N00}^{02}) = (1 + t_{IPC00}^{02})$
- c)  $(1 + t_{R00}^{02}) \cdot (1 + t_{IPC00}^{02}) = (1 + t_{N00}^{02})$

**Solución:** La solución es (c).

$$(1 + t_{R00}^{02}) = I_{R00}^{02} = \frac{S_{02}^R}{S_{00}^R} = \frac{S_{02}^N}{S_{00}^N} \cdot \frac{IPC_{base}^{02}}{IPC_{base}^{00}} = \frac{S_{02}^N}{S_{00}^N} \cdot \frac{IPC_{base}^{00}}{IPC_{base}^{02}} = \frac{I_{N00}^{02}}{IPC_{00}^{02}} \Rightarrow \begin{cases} I_{N00}^{02} = (1 + t_{R00}^{02}) \cdot IPC_{00}^{02} \\ (1 + t_{N00}^{02}) = (1 + t_{R00}^{02}) \cdot (1 + t_{IPC00}^{02}) \end{cases}$$

8. Un conjunto de bienes industriales, durante el período 2008-2010, respectivamente, toman los valores 136% y 97%. Si el valor de la producción del año 2008 a precios de ese mismo año es de 250.000 euros, entonces el valor de la producción del año 2010 a precios de ese mismo año será:

- a) 342.000 euros
- b) No se puede calcular
- c) 329.800 euros

**Solución:** La solución es (c).

$$IV_{08}^{10} = F_{P08}^{10} \cdot F_{Q08}^{10} = \frac{\sum_{i=1}^n p_{i10} \cdot q_{i10}}{\sum_{i=1}^n p_{i08} \cdot q_{i08}} \Rightarrow \sum_{i=1}^n p_{i10} \cdot q_{i10} = \sum_{i=1}^n p_{i08} \cdot q_{i08} \cdot F_{P08}^{10} \cdot F_{Q08}^{10} = (250.000) \cdot 1,36 \cdot 0,97 = 329.800 \text{ €}$$

9. Para efectuar un cambio de base hay que aplicar la propiedad:

- a) Circular
- b) Homogeneidad
- c) Proporcionalidad

**Solución:** La solución, por definición, es (a).

10. El valor de una magnitud compleja en 2007 era de 1200 u.m., en 2010 fue de 2100 u.m. De otra parte, el valor de dicha magnitud en 2009 a precios constantes de 2007 era de 1500 u.m. Señalar la opción falsa:

- a)  $P_{P07}^{10} = 140\%$
- b)  $L_{Q07}^{10} = 1,35$
- c)  $L_{Q07}^{10} < P_{P07}^{10} < IV_{07}^{10}$

Solución: La solución es (b).

Basta considerar las definiciones de los índices  $P_{P07}^{10}$ ,  $L_{Q07}^{10}$ ,  $IV_{07}^{10}$ , y los valores a precios corrientes y constantes de la magnitud compleja.

$$IV_{07}^{10} = \frac{\sum_{i=1}^n p_{i10} \cdot q_{i10}}{\sum_{i=1}^n p_{i07} \cdot q_{i07}} = \frac{2100}{1200} = 1,75 \quad P_{P07}^{10} = \frac{\sum_{i=1}^n p_{i10} \cdot q_{i10}}{\sum_{i=1}^n p_{i07} \cdot q_{i10}} = \frac{2100}{1500} = 1,4 \quad L_{Q07}^{10} = \frac{\sum_{i=1}^n q_{i10} \cdot p_{i07}}{\sum_{i=1}^n p_{i07} \cdot q_{i07}} = \frac{1500}{1200} = 1,25$$

11. Dados los índices  $I_{07}^{08} = 103\%$ ,  $I_{08}^{09} = 117\%$ ,  $I_{09}^{10} = 114\%$ . Indicar la opción falsa:

- a) La tasa de variación del precio en 2007-2010 es de 37,38%
- b) La tasa media de variación anual del precio en 2007-2010 es de 11,17%
- c) La variación relativa de los precios, respecto al año anterior, ha sido mayor en 2007 que en 2008

Solución: La solución es (c).

Basta considerar la relación entre índices y tasas.

- $t_{07}^{10} = I_{07}^{08} \cdot I_{08}^{09} \cdot I_{09}^{10} - 1 = 1,03 \cdot 1,17 \cdot 1,14 - 1 = 0,3738$
- $t_{m07}^{10} = \sqrt[3]{I_{07}^{08} \cdot I_{08}^{09} \cdot I_{09}^{10}} - 1 = \sqrt[3]{1,03 \cdot 1,17 \cdot 1,14} - 1 = 0,1117$
- $\left. \begin{array}{l} t_{07}^{08} = I_{07}^{08} - 1 = 1,03 - 1 = 0,03 \\ t_{08}^{09} = I_{08}^{09} - 1 = 1,17 - 1 = 0,17 \end{array} \right\} t_{08}^{09} > t_{07}^{08}. \text{ El aumento relativo del precio, en relación al año anterior, ha sido mayor en 2008 que en 2007}$

12. Señalar la afirmación correcta:

- a) Deflactar consiste en enlazar dos o más series de índices, lo que se consigue escribiendo en la misma base índices que originalmente vienen expresados en bases distintas.
- b) El IPC con base 2002, es un índice de precios de Paasche.
- c) Los índices simples como los complejos ponderados son adimensionales.

Solución: La solución, por definición, es (c).

13. Las tasas de variación anuales de cantidades exportadas por una empresa durante el período 2002-2005 son 1,7% , 2,2% y -1,7%, respectivamente. Señalar la opción incorrecta.

- a) La tasa media de variación anual en este período es de 0,723%
- b) La tasa de variación de la cantidad exportada en 2005 es de 2,17% en relación con la exportada en 2002.
- c) Si en 2002 se exportaron 120.000 unidades, en 2005 se exportaron 122604 unidades.

**Solución:** La solución es **(a)**.

Las tasas de variación anuales de las cantidades exportadas:  $t_{02}^{03} = 0,017$  ,  $t_{03}^{04} = 0,022$  ,  $t_{04}^{05} = -0,017$  .

La tasa de variación global  $t_{02}^{05}$  y la tasa media de variación anual  $t_{m02}^{05}$  , expresadas en tantos por uno:

$$(1 + t_{02}^{05}) = (1 + t_{02}^{03}) \cdot (1 + t_{03}^{04}) \cdot (1 + t_{04}^{05}) = (1 + t_{m02}^{05})^3 \quad \mapsto \quad \begin{cases} t_{02}^{05} = (1 + t_{02}^{03}) \cdot (1 + t_{03}^{04}) \cdot (1 + t_{04}^{05}) - 1 \\ t_{m02}^{05} = \sqrt[3]{(1 + t_{02}^{03}) \cdot (1 + t_{03}^{04}) \cdot (1 + t_{04}^{05})} - 1 \end{cases}$$

$$t_{02}^{05} = (1,017) \cdot (1,022) \cdot (0,983) - 1 = 0,0217 \text{ (2,17\%)}$$

$$t_{m02}^{05} = \sqrt[3]{(1 + t_{02}^{05})} - 1 = \sqrt[3]{(1 + t_{02}^{03}) \cdot (1 + t_{03}^{04}) \cdot (1 + t_{04}^{05})} - 1 = \sqrt[3]{(1,017) \cdot (1,022) \cdot (0,983)} - 1 = 0,00718 \text{ (0,718\%)}$$

- La cantidad exportada en 2005 viene dada por la expresión:

$$t_{02}^{05} = \frac{q_{05} - q_{02}}{q_{02}} = \frac{q_{05}}{q_{02}} - 1 \quad \mapsto \quad q_{05} = (1 + t_{02}^{05}) \cdot q_{02}$$

$$q_{05} = (1 + t_{02}^{05}) \cdot q_{02} = 1,0217 \cdot (120.000) = 122604 \text{ unidades.}$$

14. El procedimiento por el cual una serie de valores nominales se pasa a valores reales, se denomina:

- a) Deflación.
- b) Devaluación.
- c) Inflación.

**Solución:** La solución, por definición, es **(a)**.

15. Selecciona el mejor deflactor de una serie de valores:

- a) Índice de cantidad de Paasche.
- b) Índice de precios de Laspeyres.
- c) Ninguna de las anteriores.

**Solución:** La solución es **(c)**.

El deflactor es un índice de precios, por lo que la opción (a) no puede ser cierta.

De todos los índices de precios el mejor deflactor es el de Paasche, dado que el valor real  $V_t^R$  se obtiene dividiendo el valor nominal  $V_t^N$  por el índice de precios de Paasche  $P_{p0}^t$  , es decir:

$$V_t^R = \frac{V_t^N}{P_{P0}^t} = \frac{\sum_{i=1}^n p_{it} \cdot q_{it}}{\sum_{i=1}^n p_{i0} \cdot q_{it}} = \sum_{i=1}^n p_{i0} \cdot q_{it}$$

16. Señalar la afirmación incorrecta, en relación con la información del salario de un trabajador y de los índices de precios base 2001 (en %) durante el período 2005-2010.

Años	Salario	IPC
2005	1503	119,21
2006	1528	121,56
2007	1603	123,79
2008	1631	126,65
2009	1754	131

- a) La tasa de variación de los salarios reales en el período 2007-2009 es 6,17%
- b) La tasa media de variación anual de los salarios nominales en 2005-2009 es 3,94%
- c) El poder adquisitivo del trabajador en 2008 es inferior al de 2007.

**Solución:** La solución es (a).

Para obtener la tasa de variación de los salarios reales en el período 2007-2009, primero se calculan los salarios reales durante este período (base 2001), dividiendo cada salario nominal por el correspondiente IPC:

Años	Salario nominal	IPC	Salario real
2007	1603	123,79	1294,9
2008	1631	126,65	1287,8
2009	1754	131	1338,9

La tasa de variación del salario real:

$$t_{07}^{09} = \frac{1338,9}{1294,9} - 1 = 0,034 \text{ (tantos por uno)}$$

La tasa media de variación anual de los salarios nominales 2005-2009:  $t_{m05}^{09} = \sqrt[4]{1 + t_{05}^{09}} - 1 = \sqrt[4]{1,167} - 1$

$$l_{05}^{09} = \frac{1754}{1503} = 1,167 \Rightarrow t_{m05}^{09} = \sqrt[4]{1,167} - 1 = 0,0394 \text{ (3,94\%)}$$

El poder adquisitivo del salario real del trabajador en el período 2007-2008, se mide por su salario real, y como se ha visto en la tabla adjunta, en 2007 fue de 1294,9 euros, mientras que en 2008 fue de 1287,8 euros, por lo que el trabajador pierde poder adquisitivo en 2008 respecto a 2007.

17. Seleccionar la opción correcta, sobre el índice cuántico de Paasche:

- a) Verifica las propiedades de identidad, inversión y circular.
- b) No cumple las propiedades circular ni de inversión.
- c) Verifica la propiedad de inversión pero no la circular.

**Solución:** La solución es (b).



El índice de cuántico de Paasche cumple la propiedad de identidad, pero no verifica la propiedad de inversión y, en consecuencia, tampoco verifica la circular (generalización de la de inversión).

En efecto, sabemos que  $P_{Q_0}^t = \frac{\sum_{i=1}^n q_{it} \cdot p_{it}}{\sum_{i=1}^n q_{i0} \cdot p_{it}}$

$$P_{Q_t}^0 = \frac{\sum_{i=1}^n q_{i0} \cdot p_{i0}}{\sum_{i=1}^n q_{it} \cdot p_{i0}} = \frac{1}{\frac{\sum_{i=1}^n q_{it} \cdot p_{i0}}{\sum_{i=1}^n q_{i0} \cdot p_{i0}}} = \frac{1}{L_{Q_0}^t}$$

18. En una empresa se lleva a cabo una negociación de salarios para el próximo año, acordando subir éstos de acuerdo con el IPC (103,2%). En el año actual, antes de la subida, se adjunta la distribución de los salarios. Seleccionar la afirmación correcta.

Categoría	Salarios nominal	Número trabajadores
A	1.845	20
B	2.368	50
C	2.570	10

- a) Aunque varíe el número de trabajadores, el índice de Laspeyres será de 103,2%
- b) Si no varía el número de trabajadores, el índice de Laspeyres será de 103,2%
- c) Antes de la subida, el índice simple de salarios de la empresa es de 142,65%

**Solución:** La solución es (a).

El índice de salarios de Laspeyres del año 1, base 0:  $L_{S_0}^1 = \frac{\sum_{i=1}^n S_{i1} \cdot n_{i0}}{\sum_{i=1}^n S_{i0} \cdot n_{i0}}$  donde  $S_{i1} = S_{i0} \cdot IPC_0^1$

con lo cual,  $L_{S_0}^1 = \frac{\sum_{i=1}^n S_{i0} \cdot IPC_0^1 \cdot n_{i0}}{\sum_{i=1}^n S_{i0} \cdot n_{i0}} = IPC_0^1 = 1,032 \Rightarrow L_{S_0}^1 = 103,2\%$

En consecuencia, el número de trabajadores no influye para nada.

De otra parte, para calcular un índice simple de salarios antes de la subida, se necesitan dos períodos de tiempo (se necesita comparar el conjunto de salarios de la empresa entre ambos períodos). Como solo hay un período, la opción © no tiene sentido.

Antes de la subida de precios, con los datos del ejercicio, se puede calcular un índice simple de una categoría con respecto a otra ( $I_A^B, I_B^C, I_A^C, I_B^A, I_C^B, I_C^A$ ).

19. El salario mensual de un trabajador durante 2008 fue 1700 €. Cuando se aplicó el convenio laboral para el año siguiente, el trabajador incrementó su poder adquisitivo un 5%. Si la inflación prevista para el año 2009 es del 3%, ¿cuál fue la situación del trabajador?

- a) El salario mensual del 2009 es de 1838,55 €
- b) El salario mensual del 2009 es de 1751 €
- c) El salario mensual del 2009 es 1845 €

**Solución:** La solución es **(a)**.

El trabajador mantendrá su poder adquisitivo en el año 2009, si al salario mensual del año 2008 aplicamos la subida del coste de la vida, es decir, la inflación:  $1700 \cdot 1,03 = 1751$ .

La realidad es que el poder adquisitivo del trabajador no se mantiene, sino que aumenta un 5%. Por tanto, sobre la subida del coste de la vida habrá que aplicar la subida del 5%, es decir:

$$S_{2009} = S_{2008} \cdot 1,03 \cdot 1,05 = 1700 \cdot 1,03 \cdot 1,05 = 1838,55 \text{ €}$$

**20.** El salario de un empleado en 2006 fue de 1250 euros, en el año 2008 de 1380 euros, y el IPC se incrementó un 7,2% de 2006 al 2008, entonces se puede afirmar:

- a) La tasa media de variación anual del salario en el ejercicio 2006-2008 es 4,23%
- b) La tasa de variación del salario en el período 2006-2008 es 3,98%
- c) La tasa media de variación anual del salario real en el período 2006-2008 es 1,5%

**Solución:** La solución es **(c)**.

La tasa media de variación anual del salario:  $t_{m06}^{08} = \sqrt[10]{\frac{1380}{1250}} - 1 = 0,051 \text{ (5,07\%)}$

La tasa de variación del salario:  $t_{06}^{08} = \frac{1380}{1250} - 1 = 0,104 \text{ (10,4\%)}$

La tasa media de variación anual del salario real:  $t_{m06}^{R08} = \sqrt[10]{\frac{S_{08}^R}{S_{06}^R}} - 1 = \sqrt[10]{\frac{1380}{1250 \cdot 1,072}} - 1 = 0,015 \text{ (1,5\%)}$

**21.** Una magnitud ha tomado distintos valores durante cuatro años. En término medio, se desea conocer el incremento o disminución que se ha producido en la citada magnitud en cada uno de los años analizados, indica la forma de proceder más idónea:

- a) Calcular un índice complejo.
- b) Calcular una tasa simple para el conjunto de los cuatro años.
- c) Calcular una tasa media por período para el conjunto de los cuatro años.

**Solución:** La solución es **(c)**.

El índice complejo representa cuantas unidades de una magnitud compleja se tienen en un año por cada unidad que se tenía el año anterior.

Una tasa simple para el conjunto de los cuatro años proporciona el incremento o disminución del período final del año, al cabo de los cuatro años, con respecto al período inicial, pero no facilita información de lo que ha sucedido entre períodos.

La tasa media por período para el conjunto de los cuatro años indica el incremento o disminución que, por término medio, se ha producido en cada período, considerando los valores tomados en el conjunto de los cuatro años (inicial y final).

## EJERCICIOS RESUELTOS DE NÚMEROS ÍNDICE

1. Una empresa estudia la evolución de los precios en euros de tres componentes (A, B, C) para una pieza en los últimos 5 años.

Año	A	B	C
1	3	4	1
2	4	6	1,5
3	5	6,5	2
4	4,5	7	2,5
5	7	4	3

- Calcular un índice simple para estudiar la evolución de los precios del componente A tomando como periodo de referencia el año 1.
- Calcular un índice conjunto de la evolución de los precios utilizando una media aritmética de índices simples y tomando como referencia el año 1.
- Analizar cómo varían los resultados si escoge otros promedios como la media geométrica.
- Suponiendo que en cada pieza van 5 unidades del componente A, 10 del B y 15 del C, calcule índices de precios conjuntos para los tres componentes tomando como referencia el periodo 1 y usando una media aritmética ponderada de los índices simples. Analice cómo varían los resultados, y cuál es el incremento medio anual de precios a partir del índice compuesto media aritmética ponderada.

**Solución:**

- Índice simple de la evolución de los precios tomando como periodo de referencia el año 1:**

Año	A	B	C	Índice Simple Precios					
				A		B		C	
1	3	4	1	100	$(3/3) \cdot 100$	100	$(4/4) \cdot 100$	100	$(1/1) \cdot 100$
2	4	6	1,5	133,33	$(4/3) \cdot 100$	150	$(6/4) \cdot 100$	150	$1,5 \cdot 100$
3	5	6,5	2	166,67	$(5/3) \cdot 100$	162,50	$(6,5/4) \cdot 100$	200	$2 \cdot 100$
4	4,5	7	2,5	150	$(4,5/3) \cdot 100$	175	$(7/4) \cdot 100$	250	$2,5 \cdot 100$
5	7	4	3	233,33	$(7/3) \cdot 100$	100	$(4/4) \cdot 100$	300	$3 \cdot 100$

- Índice conjunto de la evolución de los precios utilizando la media aritmética:**

Año	A	B	C		Media aritmética
1	100	100	100	$300/3 = 100$	100
2	133,33	150	150	$433,33/3 = 144,44$	144,44
3	166,67	162,50	200	$529,17/3 = 176,39$	176,39
4	150	175	250	$575/3 = 191,67$	191,67
5	233,33	100	300	$633,33/3 = 211,11$	211,11

- Índice conjunto de la evolución de los precios utilizando la media geométrica:**

Año	A	B	C	$\prod_{i=1}^3 I_i$	$\sqrt[3]{\prod_{i=1}^3 I_i}$
1	100	100	100	1000000	100
2	133,33	150	150	3000000	144,22496
3	166,67	162,50	200	5416666,67	175,62137
4	150	175	250	6562500	187,22181
5	233,33	100	300	7000000	191,29312

d) Índice conjunto de la evolución de los precios utilizando la media ponderada:

Año	A (5 unidades)	B (10 unidades)	C (15 unidades)		Media ponderada
1	100	100	100	$5 \cdot 100 + 10 \cdot 100 + 15 \cdot 100 / (5 + 10 + 15) = 100$	100
2	133,33	150	150	$5 \cdot 133,33 + 10 \cdot 150 + 15 \cdot 150 / (5 + 10 + 15) = 147,22$	147,22
3	166,67	162,50	200	$5 \cdot 166,67 + 10 \cdot 162,50 + 15 \cdot 200 / (5 + 10 + 15) = 181,94$	181,94
4	150	175	250	$5 \cdot 150 + 10 \cdot 175 + 15 \cdot 250 / (5 + 10 + 15) = 208,33$	208,33
5	233,33	100	300	$5 \cdot 233,33 + 10 \cdot 100 + 15 \cdot 300 / (5 + 10 + 15) = 222,22$	222,22

El incremento (tasa) medio anual de precios a partir del índice compuesto:

Año	A (5 unidades)	B (10 unidades)	C (15 unidades)	Media ponderada	Incremento	% Incremento (Tasa)
1	100	100	100	100		
2	133,33	150	150	147,22	$(147,22/100) - 1 = 0,47222$	47,22
3	166,67	162,50	200	181,94	$(181,94/147,22) - 1 = 0,23584$	23,58
4	150	175	250	208,33	$(208,33/181,94) - 1 = 0,14503$	14,50
5	233,33	100	300	222,22	$(222,22/208,33) - 1 = 0,06667$	6,67

2. El consumo en combustible en una empresa (en miles de litros) en una empresa y los índices de precios del combustible en seis años han sido:

Año	Consumo	Índice (base 2009=100%)
2006	60	91
2007	70	93
2008	75	95
2009	78	100
2010	80	114
2011	85	120

Sabiendo que el precio del combustible fue de 1,5 €/litro en el año 2011, calcular el gasto en combustible de la empresa en cada año.

Solución:

Año	Consumo	Índice (base 2009=100%)	Índice (base 2011=100%)	Precio €/litro	Gasto
-----	---------	----------------------------	----------------------------	----------------	-------

2006	60	91	$(91/120) \cdot 100 = 75,83$	75,83	$1,5 \times 0,7583 = 1,137$	68,22
2007	70	93	$(93/120) \cdot 100 = 77,5$	77,5	$1,5 \times 0,775 = 1,162$	81,34
2008	75	95	$(95/120) \cdot 100 = 79,17$	79,17	$1,5 \times 0,7917 = 1,187$	89,025
2009	78	100	$(100/120) \cdot 100 = 83,33$	83,33	$1,5 \times 0,8333 = 1,249$	97,422
2010	80	114	$(114/120) \cdot 100 = 95$	95	$1,5 \times 0,95 = 1,425$	114
2011	85	120	$(120/120) \cdot 100 = 100$	100	1,5	127,5

3. A continuación tenemos los precios y cantidades vendidas de tres productos por una determinada empresa durante tres períodos:

t	P <sub>A</sub>	P <sub>B</sub>	P <sub>C</sub>	Q <sub>A</sub>	Q <sub>B</sub>	Q <sub>C</sub>
0	4	10	15	2	2	3
1	6	11	20	5	1	3
2	5	12	25	4	1	2

- Obtener los índices de precios y de cantidades de Paasche, de Laspeyres y de Fisher para estos tres períodos considerando como referencia el periodo 0.
- Obtener los índices de valor.

Solución:

▪ **Índices ponderados de PRECIOS:**

$$\text{Laspeyres: } L_p = \frac{\sum_{i=1}^n p_{it} \cdot q_{i0}}{\sum_{i=1}^n p_{i0} \cdot q_{i0}} \cdot 100$$

$$\text{Paasche: } P_p = \frac{\sum_{i=1}^n p_{it} \cdot q_{it}}{\sum_{i=1}^n p_{i0} \cdot q_{it}} \cdot 100$$

$$\text{Fisher: } F_p = \sqrt{L_p \cdot P_p}$$

$$L_{p0}^1 = \frac{6 \cdot 2 + 11 \cdot 2 + 20 \cdot 3}{4 \cdot 2 + 10 \cdot 2 + 15 \cdot 3} \cdot 100 = \frac{94}{73} \cdot 100 = 128,77$$

$$L_{p0}^2 = \frac{5 \cdot 2 + 12 \cdot 2 + 25 \cdot 3}{4 \cdot 2 + 10 \cdot 2 + 15 \cdot 3} \cdot 100 = \frac{109}{73} \cdot 100 = 149,32$$

$$P_{p0}^1 = \frac{6 \cdot 5 + 11 \cdot 1 + 20 \cdot 3}{4 \cdot 5 + 10 \cdot 1 + 15 \cdot 3} \cdot 100 = \frac{101}{75} \cdot 100 = 134,67$$

$$P_{p0}^2 = \frac{5 \cdot 4 + 12 \cdot 1 + 25 \cdot 2}{4 \cdot 4 + 10 \cdot 1 + 15 \cdot 2} \cdot 100 = \frac{82}{56} \cdot 100 = 146,43$$

$$F_{p0}^1 = \sqrt{L_{p0}^1 \cdot P_{p0}^1} = \sqrt{128,77 \cdot 134,67} = 131,69$$

$$F_{p0}^2 = \sqrt{L_{p0}^2 \cdot P_{p0}^2} = \sqrt{149,32 \cdot 146,43} = 147,87$$

▪ **Índices ponderados de CANTIDADES:**

$$\text{Laspeyres: } L_q = \frac{\sum_{i=1}^n q_{it} \cdot p_{i0}}{\sum_{i=1}^n q_{i0} \cdot p_{i0}} \cdot 100$$

$$\text{Paasche: } P_q = \frac{\sum_{i=1}^n q_{it} \cdot p_{it}}{\sum_{i=1}^n q_{i0} \cdot p_{it}} \cdot 100$$

$$\text{Fisher: } F_q = \sqrt{L_q \cdot P_q}$$

$$L_{q0}^1 = \frac{5 \cdot 4 + 1 \cdot 10 + 3 \cdot 15}{2 \cdot 4 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 15} \cdot 100 = \frac{75}{73} \cdot 100 = 102,74$$

$$L_{q0}^2 = \frac{4 \cdot 4 + 1 \cdot 10 + 2 \cdot 15}{2 \cdot 4 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 15} \cdot 100 = \frac{56}{73} \cdot 100 = 76,71$$

$$P_{q0}^1 = \frac{5 \cdot 6 + 1 \cdot 11 + 3 \cdot 20}{2 \cdot 6 + 2 \cdot 11 + 3 \cdot 20} \cdot 100 = \frac{101}{94} \cdot 100 = 107,45$$

$$P_{q0}^2 = \frac{4 \cdot 5 + 1 \cdot 12 + 2 \cdot 25}{2 \cdot 5 + 2 \cdot 12 + 3 \cdot 25} \cdot 100 = \frac{82}{109} \cdot 100 = 75,23$$

$$F_{p0}^1 = \sqrt{L_{p0}^1 \cdot P_{p0}^1} = \sqrt{102,74 \cdot 107,45} = 105,07$$

$$F_{p0}^2 = \sqrt{L_{p0}^2 \cdot P_{p0}^2} = \sqrt{76,71 \cdot 75,23} = 75,97$$

- **Índice de Valor:** Evolución del valor de la serie a precios constantes (se deflactan los valores en precios corrientes)

$$IV_0^t = \frac{V_t}{V_0} \cdot 100 = \frac{\sum_{i=1}^n p_{it} \cdot q_{it}}{\sum_{i=1}^n p_{i0} \cdot q_{i0}} \cdot 100$$

$$IV_0^1 = \frac{6 \cdot 5 + 11 \cdot 1 + 20 \cdot 3}{4 \cdot 2 + 10 \cdot 2 + 15 \cdot 3} \cdot 100 = \frac{101}{73} \cdot 100 = 138,36$$

$$IV_0^2 = \frac{5 \cdot 4 + 12 \cdot 1 + 25 \cdot 2}{4 \cdot 2 + 10 \cdot 2 + 15 \cdot 3} \cdot 100 = \frac{82}{73} \cdot 100 = 112,33$$

Año	Índices Precios			Índices Cantidades			Índices Valor
	$L_p$	$P_p$	$F_p$	$L_q$	$P_q$	$F_q$	IV
0	100	100	100	100	100	100	100
1	128,77	134,67	131,69	102,74	107,45	105,07	138,36
2	149,32	146,43	147,87	76,71	75,23	75,97	112,33

4. Un grupo de estudiantes decide estudiar la evolución de los precios de tres artículos que consumen en sus tiempos de ocio: discoteca, cine, conciertos. Para ello estudian a lo largo de dos años el precio

de las entradas ( $P_i$ ) en euros y el número de veces que asisten a lo largo de un año ( $Q_i$ ). Los resultados se recogen en la tabla:

	discoteca		cine		conciertos	
Año	$P_i$	$Q_i$	$P_i$	$Q_i$	$P_i$	$Q_i$
2010	12	25	5	70	30	10
2011	15	30	6	80	40	25

Obtenga los índices de precios y cantidades de Laspeyres, Paasche y Fisher tomando como base el periodo 2010.

**Solución:**

▪ **Índices ponderados de PRECIOS:**

$$\text{Laspeyres: } L_p = \frac{\sum_{i=1}^n p_{it} \cdot q_{i0}}{\sum_{i=1}^n p_{i0} \cdot q_{i0}} \cdot 100 \quad \text{Paasche: } P_p = \frac{\sum_{i=1}^n p_{it} \cdot q_{it}}{\sum_{i=1}^n p_{i0} \cdot q_{it}} \cdot 100 \quad \text{Fisher: } F_p = \sqrt{L_p \cdot P_p}$$

$$L_{p10}^{11} = \frac{15 \cdot 25 + 6 \cdot 70 + 40 \cdot 10}{12 \cdot 25 + 5 \cdot 70 + 30 \cdot 10} \cdot 100 = \frac{1195}{950} \cdot 100 = 125,79$$

$$P_{p10}^{11} = \frac{15 \cdot 30 + 6 \cdot 80 + 40 \cdot 25}{12 \cdot 30 + 5 \cdot 80 + 30 \cdot 25} \cdot 100 = \frac{1930}{1510} \cdot 100 = 127,81$$

$$F_{p10}^{11} = \sqrt{L_{p10}^{11} \cdot P_{p10}^{11}} = \sqrt{125,79 \cdot 127,81} = 126,80$$

▪ **Índices ponderados de CANTIDADES:**

$$\text{Laspeyres: } L_q = \frac{\sum_{i=1}^n q_{it} \cdot p_{i0}}{\sum_{i=1}^n q_{i0} \cdot p_{i0}} \cdot 100 \quad \text{Paasche: } P_q = \frac{\sum_{i=1}^n q_{it} \cdot p_{it}}{\sum_{i=1}^n q_{i0} \cdot p_{it}} \cdot 100 \quad \text{Fisher: } F_q = \sqrt{L_q \cdot P_q}$$

$$L_{q10}^{11} = \frac{30 \cdot 12 + 80 \cdot 5 + 25 \cdot 30}{25 \cdot 12 + 70 \cdot 5 + 10 \cdot 30} \cdot 100 = \frac{1510}{950} \cdot 100 = 158,95$$

$$P_{q10}^{11} = \frac{30 \cdot 15 + 80 \cdot 6 + 25 \cdot 40}{25 \cdot 15 + 70 \cdot 6 + 10 \cdot 40} \cdot 100 = \frac{1930}{1195} \cdot 100 = 161,51$$

$$F_{q10}^{11} = \sqrt{L_{q10}^{11} \cdot P_{q10}^{11}} = \sqrt{158,95 \cdot 161,51} = 160,22$$

	Índices Precios			Índices Cantidades		
Año	$L_p$	$P_p$	$F_p$	$L_q$	$P_q$	$F_q$



2010	100	100	100	100	100	100
2011	125,79	127,81	126,80	158,95	161,51	160,22

5. Antonio alquiló un local el 1 de enero de 2010 por 3000 euros mensuales, impuestos no incluidos. La revisión del alquiler se efectúa según los valores del IPC. Dispone de dos tablas con información sobre el IPC de cada año. (Base 2005=100).

Mes de enero	2010	2011	2012
IPC %	128,712	133,413	138,34

Antonio quiere saber cuál será la renta que tendrá que pagar en 2013 si la previsión del IPC para enero de 2013 está en 1,8% de incremento sobre el año el mes de enero del año 2012.

**Solución:**

$$IPC_{2013} = IPC_{2012} \cdot (1,018) = 138,34 \cdot (1,018) = 140,83$$

Mes de enero	2010	2011	2012	2013
IPC %	128,712	133,413	138,34	140,83
Incremento IPC %		$[(133,413/128,712) - 1] \cdot 100 = 3,652$	$[(138,34/133,413) - 1] \cdot 100 = 3,693$	1,8
Alquiler	3000 €	$3000 \cdot 1,03652 = 3109,56 \text{ €}$	$3109,56 \cdot 1,03693 = 3224,40 \text{ €}$	3282,44 €

Antonio tiene que pagar en el 2013 una renta de 3282,44 euros.

6. Se conoce la información sobre la evolución de precios de los bienes y servicios consumidos por un estudiante. Rellene el siguiente cuadro con las cantidades correspondientes

AÑO	Índice General	Índice cafetería	Índice transporte	Índice ocio	Índice otros
2010		149 %	157 %	133 %	142 %
2011		160 %	165 %	143 %	
Ponderación	100 %	15 %	35 %		20 %
Variación porcentaje					4,225 %

**Solución:**

AÑO	Índice General	Índice cafetería	Índice transporte	Índice ocio	Índice otros
2010	145,6 %	149 %	157 %	133 %	142 %
2011	154,25 %	160 %	165 %	143 %	$142 \times 1,04225 = 148 \text{ %}$
Ponderación	100 %	15 %	35 %	$100 \% - 70 \% = 30 \text{ %}$	20 %
Variación porcentaje	5,941	7,383	5,096	$[(143/133) - 1] \cdot 100 = 7,519$	4,225 %

$$\% \text{ Tasa de variación: } TV_t^{t+1} = \left[ \frac{I_{t+1}}{I_t} - 1 \right] \cdot 100$$

$$\text{Repercusión: } R_i = (\text{Tasa variación}) \times (\text{Ponderación})$$

El Índice General es como un IPC para el estudiante, un Índice de Laspeyres, denotando por  $I_i$  los índices de cada grupo y  $w_i$  las ponderaciones de cada bien o servicio:

$$L_p^{2010} = \frac{\sum_{i=1}^4 I_i \cdot w_i}{\sum_{i=1}^4 w_i} = \frac{149 \cdot 15 + 157 \cdot 35 + 133 \cdot 30 + 142 \cdot 20}{15 + 35 + 30 + 20} = 145,6$$

$$L_p^{2011} = \frac{\sum_{i=1}^4 I_i \cdot w_i}{\sum_{i=1}^4 w_i} = \frac{160 \cdot 15 + 165 \cdot 35 + 143 \cdot 30 + 148 \cdot 20}{15 + 35 + 30 + 20} = 154,25$$

7. En la elaboración de un índice de precios, en un determinado período, se decide cambiar la base cortándose la serie en dicho período. Enlace las dos series de manera que se obtenga una serie completa en base 100% en 2008.

Año	Índice base 2005=100	Índice base 2008=100
2005	100 %	
2006	120 %	
2007	150 %	
2008	180 %	100 %
2009		110 %
2010		133 %
2011		150 %

**Solución:**

Año	Índice base 2005=100	Índice base 2008=100
2005	100 %	55,56 %
2006	120 %	66,67 %
2007	150 %	83,33 %
2008	180 % ← →	100 %
2009	198 %	110 %
2010	239,4 %	133 %
2011	270 %	150 %

$$\text{Coeficiente enlace 2008: } \frac{100}{180} = 0,5556$$

$$\text{Coeficiente enlace 2005: } \frac{180}{100} = 1,8$$

8. En cierto país el salario medio por hora, en unidades monetarias corrientes, de los trabajadores de un determinado sector productivo y los índices de precio de consumo a lo largo de los seis últimos años fueron:

Años	Salario/hora €	Índice de precios (2000 = 100)
2006	5,2	144
2007	5,8	166
2008	6	179
2009	6,3	194
2010	6,4	204
2011	8,4	209

- Calcule los índices de precios con base 2006.
- Expresa el salario en unidades monetarias constantes de 2007.
- ¿Cuáles fueron las variaciones anuales del salario en términos corrientes durante estos años?
- ¿Cuáles fueron las variaciones anuales del salario en términos reales durante estos años?
- Calcule la tasa media anual acumulativa de los salarios en términos nominales y reales.

**Solución:**

a)

Años	Salario/hora €	Índice de precios (2000 = 100)	Índice de precios (2006=100) (0,69445) x base 2000
2006	5,2	144	100
2007	5,8	166	115,28
2008	6	179	124,31
2009	6,3	194	134,72
2010	6,4	204	141,67
2011	8,4	209	145,14

Coeficiente de enlace base 2006:  $k = 100/144 = 0,69445$

b y c) Tasas de variación interanual del salario en términos constantes y reales:

$$TV_{i-1}^i = \frac{\text{salario}_i}{\text{salario}_{i-1}} - 1 = [I_{i-1}^i - 1]$$

Años	Salario	Índice de precios (2006 = 100)	Salarios constantes (Salario / IPC <sub>2006</sub> ).100	Tasa variación relativa (Incremento nominal) $TV_{i-1}^i$	Tasa variación relativa real (Incremento real) - Deflactada $[TV_{i-1}^i]_{\text{constantes}}$
2006	5,2	100	5,2		
2007	5,8	115,28	5,03	$(5,8/5,2) - 1 = 0,11538$	$(5,03/5,2) - 1 = -0,03269$
2008	6	124,31	4,83	$(6/5,8) - 1 = 0,03448$	$(4,83/5,03) - 1 = -0,03976$
2009	6,3	134,72	4,68	$(6,3/6) - 1 = 0,00500$	$(4,68/4,83) - 1 = -0,03106$
2010	6,4	141,67	4,52	$(6,4/6,3) - 1 = 0,01587$	$(4,52/4,68) - 1 = -0,03419$
2011	8,4	145,14	5,79	$(8,4/6,4) - 1 = 0,31250$	$(5,79/4,52) - 1 = 0,28097$

d) Tasa de variación media anual (TVM) de los salarios en términos nominales y reales:

$$\text{Tasa variación media anual: } \text{TVM}_0^t = \sqrt[t]{\prod_{i=1}^t (\text{TV}_{i-1}^i + 1)} - 1$$

Años	Salario	Tasa variación nominal $\text{TV}_{i-1}^i$	Tasa variación real $[\text{TV}_{i-1}^i]_{\text{constantes}}$	$\text{TV}_{i-1}^i + 1$	$[\text{TV}_{i-1}^i]_{\text{constantes}} + 1$
2006	5,2				
2007	5,8	0,11538	-0,03269	1,11538	0,96731
2008	6,0	0,03448	-0,03976	1,03448	0,96024
2009	6,3	0,05000	-0,03106	1,05000	0,96894
2010	6,4	0,01587	-0,03419	1,01587	0,96581
2011	8,4	0,31250	0,28097	1,31250	1,28097
$\prod_{i=1}^5 (\text{TV}_{i-1}^i + 1)$				1,61537	1,11346
$\sqrt[5]{\prod_{i=1}^5 (\text{TV}_{i-1}^i + 1)}$				1,10066	1,02173
$\text{TVM}_{2006}^{2011} = \sqrt[5]{\prod_{i=1}^5 (\text{TV}_{i-1}^i + 1)} - 1$				0,10066	0,02173

- tasa variación media anual de salarios nominales: 10,07 %
- tasa variación media anual de salarios reales: 2,173 %

9. El conjunto de bienes de consumo se ha clasificado en tres grupos. Los precios y cantidades de cada grupo, para cuatro años son las siguientes:

Año	Grupo 1		Grupo 2		Grupo 3	
	P <sub>1</sub>	Q <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	Q <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>	Q <sub>3</sub>
2008	3	5	7	3	8	4
2009	4	7	9	8	10	10
2010	5	8	6	4	8	8
2011	6	5	7	7	10	10

Calcular:

- Los índices de precios de Paasche, con base en el año 2008.
- Dados los salarios monetarios:  
 Año 2008: 120 u.m.  
 Año 2009: 140 u.m.  
 Año 2010: 180 u.m.  
 Año 2011: 200 u.m.  
 Exprese dichos salarios en unidades monetarias del año 2008.

Solución:

a) Índices ponderados de PRECIOS de PAASCHE: 
$$P_p = \frac{\sum_{i=1}^n p_{it} \cdot q_{it}}{\sum_{i=1}^n p_{i0} \cdot q_{it}} \cdot 100$$

$$P_{p08}^{09} = \frac{4 \cdot 7 + 9 \cdot 8 + 10 \cdot 10}{3 \cdot 7 + 7 \cdot 8 + 8 \cdot 10} \cdot 100 = \frac{200}{157} \cdot 100 = 127,39$$

$$P_{P08}^{10} = \frac{5 \cdot 8 + 6 \cdot 4 + 8 \cdot 8}{3 \cdot 8 + 7 \cdot 4 + 8 \cdot 8} \cdot 100 = \frac{128}{116} \cdot 100 = 110,34$$

$$P_{P08}^{11} = \frac{6 \cdot 5 + 7 \cdot 7 + 10 \cdot 10}{3 \cdot 5 + 7 \cdot 7 + 8 \cdot 10} \cdot 100 = \frac{179}{144} \cdot 100 = 124,31$$

b) Salarios en unidades monetarias de 2008:

Año	Índice Precios Paasche (2008 = 100)	Salarios	Salarios constantes (Salarios/P <sub>p</sub> ) x 100
2008	100	120	[120 / 100] . 100 = 120
2009	127,39	140	[140 / 127,39] . 100 = 109,91
2010	110,34	180	[180 / 110,34] . 100 = 163,13
2011	124,31	200	[200 / 124,31] . 100 = 160,90





**Estadística Descriptiva: Números Índices**  
**Facultad Ciencias Económicas y Empresariales**  
**Departamento de Economía Aplicada**  
**Profesor: Santiago de la Fuente Fernández**