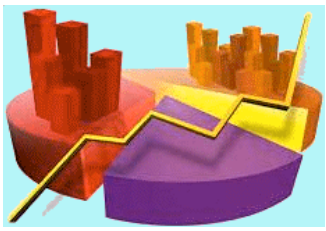
Universidad Autónoma de Madrid

Instrumentos Estadísticos Avanzados
Facultad Ciencias Económicas y Empresariales
Departamento de Economía Aplicada
Profesor: Santiago de la Fuente Fernández

# SERIES TEMPORALES, MÉTODO ALISADO EXPONENCIAL



**ANÁLISIS DE AUTOCORRELACIÓN**

Dada la serie temporal $(X_t) = (X_1, X_2, \cdots, X_T)$ se introducen en el estudio distintos instantes de la observación, para ello se considera la *autocovarianza muestral* de orden *s* y el *coeficiente de correlación muestral* de orden *k*.

- La *autocovarianza muestral de primer orden*: $S_{X_t X_{t-1}} = g_1 = \dfrac{\sum_{k=2}^{T} (X_k - \overline{X})\,(X_{k-1} - \overline{X})}{T-1}$ representando la relación existente entre los datos observados en un instante y los observados en el instante anterior.

  Análogamente, la *autocovarianza muestral de orden s*: $S_{X_t X_{t-s}} = g_s = \dfrac{\sum_{k=s+1}^{T} (X_k - \overline{X})\,(X_{k-s} - \overline{X})}{T-s}$ representa la relación existente entre el valor observado en un instante y el observado hace *s* instantes en el pasado.

  $g_0 = S_X^2$

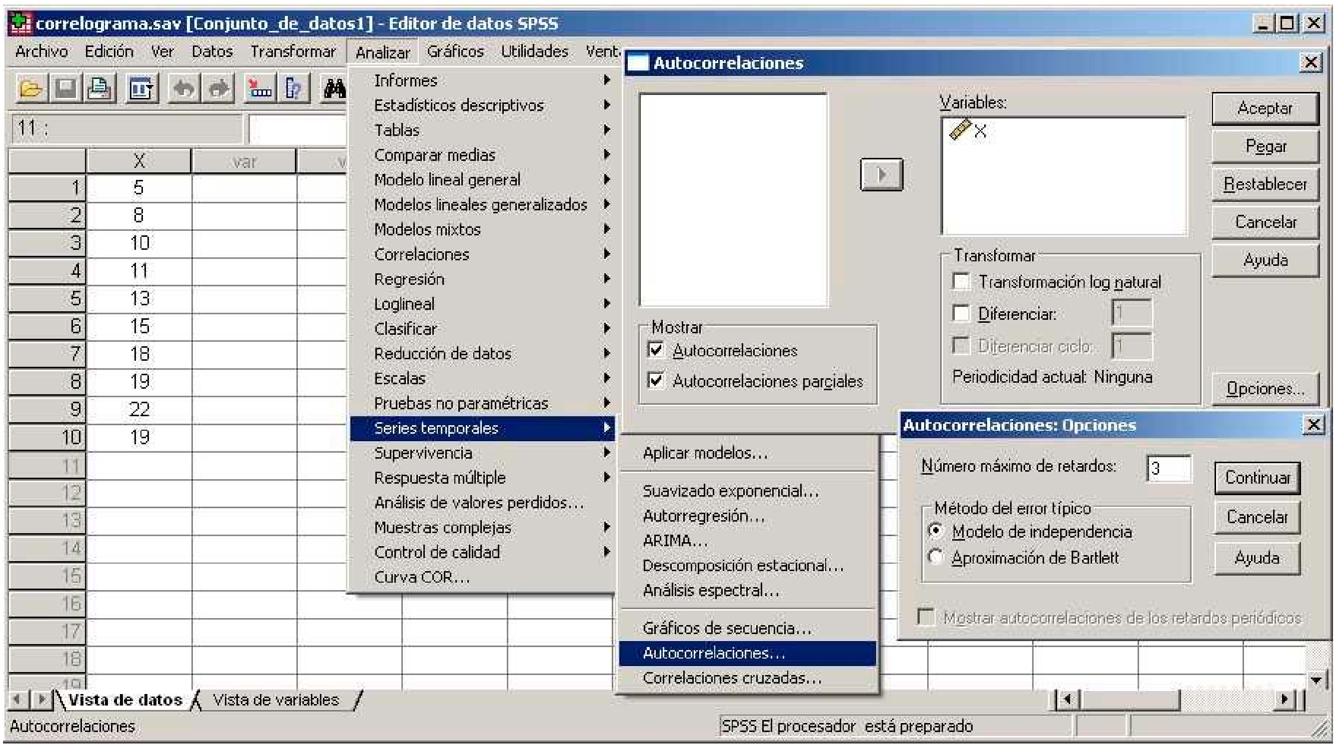
  Para calcular la autocovarianza muestral de orden $(T-1)$, solo se dispone de una pareja de datos, de ahí que las interpretaciones que se pueden hacer de autocovarianzas de orden alto son poco fiables al obtenerse con muy pocas parejas de datos.
  *Se aconseja calcular únicamente las autocovarianzas de orden r con* $r < T/4$

- La *autocorrelación muestral de primer orden*: $r_1 = \dfrac{\sum_{k=2}^{T} (X_k - \overline{X})\,(X_{k-1} - \overline{X})}{\sum_{k=2}^{T} (X_k - \overline{X})^2}$ representa el grado de relación entre los valores de una serie en un instante y los observados en el instante inmediatamente anterior, se interpreta como el coeficiente de correlación de Pearson.

  Análogamente, *autocorrelación muestral de orden s* $\geq$ *1*: $r_s = \dfrac{\sum_{k=s+1}^{T} (X_k - \overline{X})\,(X_{k-s} - \overline{X})}{\sum_{k=2}^{T} (X_k - \overline{X})^2}$ representa el grado de relación entre los valores de una serie en un instante y los observados hace s instantes en el pasado.

  Se denomina *correlograma muestral* o *función de autocorrelación muestral* al gráfico que resulta al dibujar una barra de altura $r_s$ para cada valor $s = 1, 2, 3, \cdots$

Práctica: Sea la serie $X_t = \{5, 8, 10, 11, 13, 15, 18, 19, 22, 19\}$, el correlograma muestral hasta el retardo 4.




**Autocorrelaciones**

Serie: X

| Retardo | Autocorrelación | Error típico[a] | Estadístico de Box-Ljung Valor | gl | Sig.[b] |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ,715 | ,274 | 6,823 | 1 | ,009 |
| 2 | ,412 | ,258 | 9,374 | 2 | ,009 |
| 3 | ,146 | ,242 | 9,739 | 3 | ,021 |

a. El proceso subyacente asumido es la independencia (ruido blanco).

b. Basado en la aproximación chi cuadrado asintótica.

El cálculo a mano se facilita escribiendo la serie original y los retardos hasta el orden requerido:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_t$ | 5 | 8 | 10 | 11 | 13 | 15 | 18 | 19 | 22 | 19 |
| $X_{t-1}$ | | 5 | 8 | 10 | 11 | 13 | 15 | 18 | 19 | 22 |
| $X_{t-2}$ | | | 5 | 8 | 10 | 11 | 13 | 15 | 18 | 19 |
| $X_{t-3}$ | | | | 5 | 8 | 10 | 11 | 13 | 15 | 18 |
| $X_{t-4}$ | | | | | 5 | 8 | 10 | 11 | 13 | 15 |

La autocovarianza y autocorrelación muestral se calculan teniendo en cuenta la primera fila y la serie retardada correspondiente.

- La *autocovarianza poblacional de orden s*: $\gamma_s = E\left[(X_t - \mu_x)\,(X_{t-1} - \mu_x)\right]$ siendo $\gamma_0 = \sigma_X^2$

- El *coeficiente de correlación poblacional de orden s* $\geq 1$: $\rho_s = \dfrac{\gamma_s}{\gamma_0} = \dfrac{E\left[(X_t - \mu_x)\,(X_{t-1} - \mu_x)\right]}{E(X_t - \mu_x)^2}$

- Se denomina *correlograma teórico* o *función de autocorrelación poblacional* al gráfico que resulta de levantar una barra de altura $\rho_s$ para cada retardo de la serie.

*Autocovarianza y autocorrelación de primer orden*

| $X_t$ | $X_{t-1}$ | $X_t - \bar{X}$ | $X_{t-1} - \bar{X}$ | $(X_t - \bar{X})^2$ | $(X_t - \bar{X})(X_{t-1} - \bar{X})$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | | -9 | | 81 | |
| 8 | 5 | -6 | -9 | 36 | 54 |
| 10 | 8 | -4 | -6 | 16 | 24 |
| 11 | 10 | -3 | -4 | 9 | 12 |
| 13 | 11 | -1 | -3 | 1 | 3 |
| 15 | 13 | 1 | -1 | 1 | -1 |
| 18 | 15 | 4 | 1 | 16 | 4 |
| 19 | 18 | 5 | 4 | 25 | 20 |
| 22 | 19 | 8 | 5 | 64 | 40 |
| 19 | 22 | 5 | 8 | 25 | 40 |
| 140 | 121 | 0 | -5 | 274 | 196 |

$$g_1 = S_{X_t X_{t-1}} = \frac{\sum_{k=2}^{T} (X_k - \bar{X})(X_{k-1} - \bar{X})}{T-1} = \frac{196}{9} = 21,178$$

$$r_1 = \frac{\sum_{k=2}^{T} (X_k - \bar{X})(X_{k-1} - \bar{X})}{\sum_{k=2}^{T} (X_k - \bar{X})^2} = \frac{196}{274} = 0,715$$

*Autocovarianza y autocorrelación de segundo y tercer orden*

| $X_t$ | $X_{t-2}$ | $X_t - \bar{X}$ | $(X_t - \bar{X})^2$ | $X_{t-2} - \bar{X}$ | $(X_t - \bar{X})(X_{t-2} - \bar{X})$ | $X_{t-3}$ | $X_{t-3} - \bar{X}$ | $(X_t - \bar{X})(X_{t-3} - \bar{X})$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | | -9 | 81 | | | | | |
| 8 | | -6 | 36 | | | | | |
| 10 | 5 | -4 | 16 | -9 | 36 | | | |
| 11 | 8 | -3 | 9 | -6 | 18 | 5 | -9 | 27 |
| 13 | 10 | -1 | 1 | -4 | 4 | 8 | -6 | 6 |
| 15 | 11 | 1 | 1 | -3 | -3 | 10 | -4 | -4 |
| 18 | 13 | 4 | 16 | -1 | -4 | 11 | -3 | -12 |
| 19 | 15 | 5 | 25 | 1 | 5 | 13 | -1 | -5 |
| 22 | 18 | 8 | 64 | 4 | 32 | 15 | 1 | 8 |
| 19 | 19 | 5 | 25 | 5 | 25 | 18 | 4 | 20 |
| 140 | 99 | 0 | 274 | -13 | 113 | 80 | -18 | 40 |

- *Autocovarianza y autocorrelación de segundo orden*

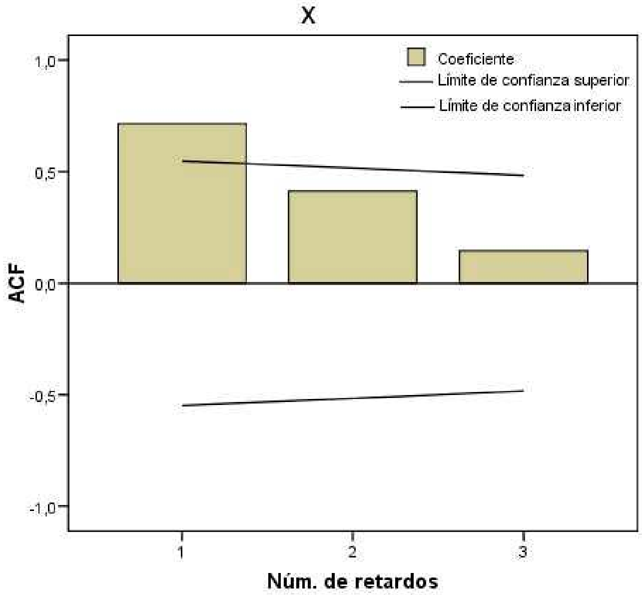
$$g_2 = S_{X_t X_{t-2}} = \frac{\sum_{k=s+1}^{T} (X_k - \bar{X})(X_{k-2} - \bar{X})}{T-2} = \frac{113}{8} = 14,125 \qquad r_2 = \frac{\sum_{k=s+1}^{T} (X_k - \bar{X})(X_{k-2} - \bar{X})}{\sum_{k=2}^{T} (X_k - \bar{X})^2} = \frac{113}{274} = 0,412$$

- *Autocovarianza y autocorrelación de tercer orden*

$$g_3 = S_{X_t X_{t-3}} = \frac{\sum_{k=s+1}^{T} (X_k - \bar{X})(X_{k-3} - \bar{X})}{T-3} = \frac{40}{7} = 5,714 \qquad r_3 = \frac{\sum_{k=s+1}^{T} (X_k - \bar{X})(X_{k-3} - \bar{X})}{\sum_{k=2}^{T} (X_k - \bar{X})^2} = \frac{40}{274} = 0,146$$

Las autocovarianzas indican en que medida están relacionados los valores de la variable con sus propios valores retardados en distintos períodos. El problema que presentan es que, al igual que la varianza, son medidas de carácter absoluto. Por esta razón, es preferible utilizar los coeficientes de autocorrelación

La representación gráfica de los coeficientes de autocorrelación para distintos retardos se le conoce con el nombre de correlograma muestral.




Los coeficientes de correlación muestral se obtienen a partir de una serie temporal, mientras que los coeficientes de correlación teórica se deducen de un *modelo*.

El correlograma es un instrumento que tiene diversas aplicaciones en el análisis de las series temporales, como en el proceso de evaluación de los modelos utilizados en la predicción.
La principal restricción de la aplicación del correlograma muestral de los errores de predicción es que requiere una muestra con 60 o más observaciones, aunque para muestras inferiores se puede utilizar como un indicativo de la autocorrelación existente en los errores de predicción.

**ACF teórico del ruido blanco**

Se denomina ruido blanco gaussiano a una sucesión de variables aleatorias $\varepsilon_t$ incorreladas, con media cero y varianza que se distribuye normalmente. Una sucesión de variables aleatorias que satisfaga las condiciones anteriores se denomina *ruido blanco*, más formalmente: $\{\varepsilon_t\}_{t=1,\dots}$ es un *ruido blanco* cuando:

$$E[\varepsilon_t]=0 \quad \forall t$$
$$E[\varepsilon_t\,\varepsilon_{t'}]=0 \quad \forall t,t'$$
$$E[\varepsilon_t^2]=\sigma^2 \quad \forall t$$
$$\varepsilon_t \approx N(0,\sigma^2) \quad \forall t$$

Las perturbaciones del modelo lineal deben formar un ruido blanco y, para poder hacer inferencias, debe de ser gaussiano. También se denomina *perturbación*. Las cuatro condiciones descritas son, en general, las hipótesis básicas para validar un modelo econométrico.

El *correlograma teórico* de una serie que es *ruido blanco está en blanco*, puesto que las variables que constituyen un ruido blanco son incorreladas entre sí, para cualquier valor de *r* se tiene que $\gamma_r=0$, excepto $\gamma_0=\sigma^2$. En consecuencia, el coeficiente de autocorrelación parcial de cualquier orden $r\geq 1$ es cero. De ahí que el correlograma teórico se quede en blanco (no se levanta ninguna barra), de donde procede el nombre de este tipo especial de series temporales.

En resumen, dada una serie de perturbaciones se decide si forman un *ruido blanco* si el correlograma muestral no tiene barras que destaquen mucho.

### Contraste $Q^*$ de Box-Ljung

Los contrastes individuales de los coeficientes de correlación consisten en examinar si cada coeficiente está o no dentro de la banda de confianza. Por ello, se hace necesario utilizar un contraste global de un número suficiente de coeficientes de correlación que permita tener una visión de conjunto.

Las hipótesis nula y alternativa para el contraste global de autocorrelación:

$$\begin{cases} H_0: \ \rho_1 = \rho_2 = \cdots = \rho_M = 0 \\ H_1: \ \text{alguno no es nulo} \end{cases}$$

El estadístico $Q^*$ de Box-Ljung, formulado en 1978 por estos autores, es el más idóneo para el contraste de hipótesis anterior.

$$Q^* = T(T-2)\sum_{h=1}^{M}\frac{1}{T-h}\, r_h^2$$

El estadístico $Q^*$ se distribuye como una $\chi^2$ con M grados de libertad. No existe una regla fija para determinar el valor de M (número de coeficientes que se contrastan). La regla de decisión:

Se acepta $H_0$ cuando $Q^* = T(T-2)\sum_{h=1}^{M}\frac{1}{T-h}\, r_h^2 \ < \ \chi^2_{\alpha,M}$

Se rechaza $H_0$ si $Q^* = T(T-2)\sum_{h=1}^{M}\frac{1}{T-h}\, r_h^2 \ \geq \ \chi^2_{\alpha,M}$

*En la Práctica:*

Serie: X **Autocorrelaciones**

| Retardo | Autocorrelación | Error típico[a] | Estadístico de Box-Ljung: Valor | gl | Sig.[b] |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ,715 | ,274 | 6,823 | 1 | ,009 |
| 2 | ,412 | ,258 | 9,374 | 2 | ,009 |
| 3 | ,146 | ,242 | 9,739 | 3 | ,021 |

$Q_1^* = 6{,}823$

$Q_2^* = 9{,}374$

$Q_3^* = 9{,}739$

## SUAVIZADO Y PREDICCIONES INCONDICIONALES DE SERIES TEMPORALES

Una predicción es anticiparse al futuro. En el contexto temporal, y tratándose de procedimientos cuantitativos, puede hablarse de clases de predicciones: **Predicciones condicionales** que se realizan mediante modelos causales (una regresión que relaciona dos variables, Y predice X), o **Predicciones incondicionales** que se realizan mediante métodos autoproyectivos.

Los métodos autoproyectivos pueden estar basados en dos enfoques alternativos: el **determinista** (o clásico) y el **estocástico** (o moderno) basado en la metodología de Box-Jenkins. El método determinista es más adecuado cuando se dispone de un número limitado de observaciones, mientras que el enfoque estocástico es más adecuado cuando las series son de mayor tamaño.

Para cada tipo de predicciones (a corto, medio, y largo plazo) existen métodos más adecuados:

- A corto plazo, métodos autoproyectivos
- A corto y medio plazo, modelos econométricos
- A largo plazo, análisis de tendencia

La práctica que se analiza trata de una predicción a corto plazo. En este tipo de predicciones conviene tener presente también las variaciones estacionales, lo mismo que en las previsiones a medio plazo es conveniente tener presente también la componente cíclica.

♣ Los métodos autoproyectivos deterministas se utilizan para suavizar irregularidades y fluctuaciones de una serie temporal a fin de obtener la línea de suavizado como una señal libre de variaciones estacionales y óptima para la predicción. Entre los métodos de suavizado se encuentran:
**Suavizado por medias móviles** (cuando no hay tendencia clara ni estacionalidad en la serie original). **Suavizado lineal de Holt** y **Suavizado exponencial de Brown** (hacen predicciones bajo el supuesto de tendencia lineal) y **Suavizado estacional de Winters** (generalizando el método de Holt para tratar con datos que presenten variaciones estacionales).

## MÉTODO DE ALISADO EXPONENCIAL

Los métodos de alisado exponencial son muy adecuados en muchos de los problemas de predicción a corto plazo que e presentan en las empresas. Estos métodos son muy fáciles de aplicar y, además, por su estructura recursiva permiten revisar las predicciones a medida que se dispone de nueva información. Entre los métodos: alisado *exponencial simple*, *alisado exponencial doble* y el *método de Holt*. El *alisado exponencial simple* es apropiado en el caso de un modelo de media constante, mientras que el *alisado exponencial doble* y el *método de Holt* son apropiados en el caso de tendencia lineal o tendencia exponencial (después de realizar una transformación logarítmica de los datos).

Utilizando la teoría estadística que hay detrás del alisado exponencial, pueden construirse intervalos de confianza para el alisado exponencial simple (AES) y el alisado exponencial doble (AED). Los intervalos de confianza tienen la siguiente estructura:

$$\left[\hat{X}_{(T+m)/T} \pm z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\sum_{t=2}^{T} e^2_{t/(t-1)}}{T-1}} \,.\, g_m\right]$$

donde,

- $\text{RECM}_T = \sqrt{\frac{\sum_{t=2}^{T} e^2_{t/(t-1)}}{T-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{t=2}^{T} (X_t - \hat{X}_{t/(t-1)})^2}{T-1}}$ raíz del error cuadrático medio con T observaciones.

- $g_m \equiv$ constante o función del número de períodos hacia adelante para el que se hace la predicción (m) y del parámetro de alisado.

## ♣ ALISADO EXPONENCIAL SIMPLE (AES)

El método del alisado exponencial simple se aplica a datos con media constante.

Si una variable X es sometida a un proceso de alisado exponencial simple se obtiene como resultado la variable alisada $S_t$, que se obtendría según la expresión:

$$S_t = (1-w)\,X_t + (1-w)\,w\,X_{t-1} + (1-w)\,w^2\,X_{t-2} + (1-w)\,w^3\,X_{t-3} + \cdots$$

donde w es un parámetro que toma valores comprendidos entre (0, 1)

Puede comprobarse que la variable alisada $S_t$ se obtiene a partir de los valores actual y retardados de X. Los puntos suspensivos indican que el número de términos es infinito. Aunque, como es evidente, esta fórmula no es operativa, es útil para comprender la naturaleza de la variable alisada. La expresión anterior de $S_t$ puede contemplarse como una media aritmética ponderada de infinitos valores, según se detalla a continuación.

Para que pueda aceptarse que $S_t$ es una media aritmética ponderada debe verificarse que las ponderaciones sumen 1. La ponderación de cada término puede expresarse genéricamente por $(1-w)\,w^j$ con $0 < j < \infty$.

Teniendo en cuenta la expresión de la suma de infinitos términos de una progresión geométrica convergente se obtiene:

$$\sum_{j=1}^{\infty} (1-w)\,w^j = (1-w) \sum_{j=1}^{\infty} w^j = (1-w)\,\frac{1}{1-w} = 1$$

Cabe preguntarse por qué se denomina a $S_t$ variable alisada exponencial simple.

- *Alisada* porque suaviza o alisa las oscilaciones que tiene la serie, al obtenerse como una medida ponderada de distintos valores.
- *Exponencial* se debe a que la ponderación o peso de las observaciones decrece exponencialmente a medida que se aleja del momento actual t. En otras palabras, las observaciones que están alejadas tienen muy poca incidencia en el valor que toma $S_t$.
- *Simple* se aplica para distinguirla de otros casos en que una variable se somete a una doble operación de alisado.

Para obtener la variable alisada $S_t$ se parte de la expresión:

$$S_t = (1-w)\,X_t + (1-w)\,w\,X_{t-1} + (1-w)\,w^2\,X_{t-2} + (1-w)\,w^3\,X_{t-3} + \cdots \quad (1)$$

restando un período se tiene: $S_{t-1} = (1-w)\,w\,X_{t-1} + (1-w)\,w\,X_{t-2} + (1-w)\,w^2\,X_{t-3} + \cdots$

multiplicando la expresión por w se obtiene:

$$w.S_{t-1} = (1-w).w.\;X_{t-1} + (1-w)\,w^2\,X_{t-2} + (1-w)\,w^3\,X_{t-3} + \cdots \qquad (2)$$

Restando miembro a miembro la expresión (2) de (1): $S_t = (1-w)\,X_t + w\,S_{t-1}$

A la constante w se la denomina *coeficiente de descuento*.

Denotando $\alpha = (1-w)$, la ecuación del alisado exponencial (AES): $S_t = \alpha\, X_t + (1-\alpha)\, S_{t-1}$

La constante $0 < \alpha < 1$ se denomina coeficiente de *alisado*.

Para que le ecuación de alisado exponencial $S_t = \alpha\, X_t + (1-\alpha)\, S_{t-1}$ sea directamente aplicable es necesario aplicar un valor a $\alpha$ y un valor inicial a S. En efecto, conocidos $\alpha$ y $S_0$, para una muestra de X que comience en el período 1, los valores de la variable alisada se van obteniendo de manera recursiva, según se muestra a continuación:

$S_1 = \alpha\, X_1 + (1-\alpha)\, S_0$, $S_2 = \alpha\, X_2 + (1-\alpha)\, S_1$ , $S_3 = \alpha\, X_3 + (1-\alpha)\, S_2$ , ....

Al asignar un valor a $\alpha$ hay que tener en cuenta que un valor pequeño de $\alpha$ significa que, de acuerdo con la ecuación $S_t = \alpha\, X_t + (1-\alpha)\, S_{t-1}$, se esta dando mucho peso a las observaciones pasadas a través del término $S_{t-1}$. Por el contrario, cuando $\alpha$ es grande se da más importancia a la observación actual de la variable X.

- De acuerdo con estudios realizados, parece que $\alpha = 0{,}2$ es un valor apropiado en muchos casos. Alternativamente, se puede seleccionar aquel valor de $\alpha$ para el que se obtenga una RECM (raíz del error cuadrático medio) menor en la predicción del período muestral. Algunos programas de ordenador calcular dicho valor óptimo.

- En la asignación de un valor a $S_0$ se suelen hacer uno de los dos supuestos:
  (a) Si la serie tiene muchas oscilaciones, se toma $S_1 = X_1$.
  (b) Cuando la serie tiene cierta estabilidad se hace $S_1 = \overline{X}$, utilizando una parte de las observaciones disponibles.

- En el modelo AES, al igual que en todos los métodos aplicables al modelo de media constante, el predictor será el mismo cualquiera que sea el número de períodos hacia adelante a predecir. En el caso concreto del AES, la ecuación de predicción será:

$$\text{Ecuación de predicción del AES: } \hat{X}_{(T+m)/T} = S_T \qquad \text{donde, } m = 1, 2, 3, \ldots$$

- Para calcular una predicción por intervalos en el alisado exponencial simple aplicado a un modelo de media constante, $g_m = 1{,}25$, en el intervalo:

$$\left[ \hat{X}_{(T+m)/T} \pm z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\sum_{t=2}^{T} e^2_{t/(t-1)}}{T-1}} \cdot g_m \right]$$

**Práctica AES:** En el cuadro se recogen las capturas anuales de bonito (expresadas en toneladas) durante los años 1974-1993. Se desea obtener la predicción de las capturas de bonito por el método del alisado exponencial simple (AES).

| Año | $X_t$ | Año | $X_t$ |
|---|---|---|---|
| 1974 | 5136 | 1984 | 5981 |
| 1975 | 4604 | 1985 | 5744 |
| 1976 | 5141 | 1986 | 5140 |
| 1977 | 5613 | 1987 | 4798 |
| 1978 | 5539 | 1988 | 4886 |
| 1979 | 5604 | 1989 | 5321 |
| 1980 | 5562 | 1990 | 4198 |
| 1981 | 5578 | 1991 | 4517 |
| 1982 | 4891 | 1992 | 5073 |
| 1983 | 4557 | 1993 | 4821 |

Aplicando las técnicas de AES, iniciando las predicciones en el período 2, tomando utilizando las diez primeras observaciones $S_1 = \overline{X} = \dfrac{1}{10}\sum_{t=1}^{10} X_t = 5222,5$ y asignando el valor inicial $\alpha = 0,2$

A partir de $S_{1974} = 5222,5$ : $\hat{X}_{1975/1974} = S_{1974} = 5222,5$

Obteniendo el error de predicción: $e_{1975/1974} = X_{1975} - \hat{X}_{1975/1974} = 4604 - 5222,5 = -618,5$

Tomando como valor inicial $S_{1974} = 5222,5$ , considerando la ecuación del alisado exponencial simple $S_t = \alpha\, X_t + (1-\alpha)\, S_{t-1}$ , se inicia el cálculo recursivo:

$S_{1975} = 0,2\,(4604) + (1-0,2)\,(5222,5) = 5098,8$

$e_{1976/1975} = X_{1976} - \hat{X}_{1976/1975} = 5141 - 5098,8 = 42,2$

Análogamente, se obtiene las predicciones para el período muestral.

| Año | $X_t$ | $S_t$ | $\hat{X}_{t/(t-1)}$ | $e_{t/(t-1)}$ | $e^2_{t/(t-1)}$ | $\lvert e_{t/(t-1)} \rvert$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1974 | 5136 | 5222,5 | | | | |
| 1975 | 4604 | 5098,8 | 5222,5 | -618,5 | 382542,3 | 618,5 |
| 1976 | 5141 | 5107,2 | 5098,8 | 42,2 | 1780,8 | 42,2 |
| 1977 | 5613 | 5208,4 | 5107,2 | 505,8 | 255793,2 | 505,8 |
| 1978 | 5539 | 5274,5 | 5208,4 | 330,6 | 109301,6 | 330,6 |
| 1979 | 5604 | 5340,4 | 5274,5 | 329,5 | 108561,3 | 329,5 |
| 1980 | 5562 | 5384,7 | 5340,4 | 221,6 | 49101,7 | 221,6 |
| 1981 | 5578 | 5423,4 | 5384,7 | 193,3 | 37353,8 | 193,3 |
| 1982 | 4891 | 5316,9 | 5423,4 | -532,4 | 283431,6 | 532,4 |
| 1983 | 4557 | 5164,9 | 5316,9 | -759,9 | 577457,7 | 759,9 |
| 1984 | 5981 | 5328,1 | 5164,9 | 816,1 | 665978,2 | 816,1 |
| 1985 | 5744 | 5411,3 | 5328,1 | 415,9 | 172939,5 | 415,9 |
| 1986 | 5140 | 5357,0 | 5411,3 | -271,3 | 73610,2 | 271,3 |
| 1987 | 4798 | 5245,2 | 5357,0 | -559,0 | 312536,5 | 559,0 |
| 1988 | 4886 | 5173,4 | 5245,2 | -359,2 | 129053,2 | 359,2 |
| 1989 | 5321 | 5202,9 | 5173,4 | 147,6 | 21788,2 | 147,6 |
| 1990 | 4198 | 5001,9 | 5202,9 | -1004,9 | 1009851,0 | 1004,9 |
| 1991 | 4517 | 4904,9 | 5001,9 | -484,9 | 235157,8 | 484,9 |
| 1992 | 5073 | 4938,6 | 4904,9 | 168,1 | 28242,6 | 168,1 |
| 1993 | 4821 | 4915,0 | 4938,6 | -117,6 | 13819,3 | 117,6 |
| | | | | | 4468300,6 | 7878,3 |

$$RECM=\sqrt{\frac{\sum_{t=2}^{T}e^2_{t/(t-1)}}{T-1}}=\sqrt{\frac{4468300,6}{19}}=484,95 \quad \textit{raíz del error cuadrático medio}$$

$$EAM=\frac{\sum_{t=2}^{T}\left|e_{t/(t-1)}\right|}{T-1}=\frac{7878,3}{19}=414,65 \quad \textit{error absoluto medio}$$

Los valores de la RECM y el EAM se han obtenido para un valor de $\alpha=0,2$, para cada valor de $\alpha$ se obtendrán estadísticos con valores diferentes.

- Predicción puntual y predicción por intervalos

De acuerdo con la ecuación de predicción del AES, la predicción puntual será:

$$\hat{X}_{(T+m)/T}=S_T \mapsto \hat{X}_{1994/1993}=S_{1993}=4915$$

será la misma para los años posteriores a 1994

Con una fiabilidad del 90%, el intervalo de predicción para $X_{1994}$:

$$\left[\hat{X}_{(T+m)/T}\pm z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\sum_{t=2}^{T}e^2_{t/(t-1)}}{T-1}}\cdot g_m\right] \equiv \left[4915 \pm \overbrace{1,645}^{z_{0,05}} \,.\, 484,95 \,.\, \overbrace{1,25}^{g_m}\right] \equiv \left[3917,82;\ 5912,18\right]$$

## ♣ ALISADO EXPONENCIAL DOBLE (AED)

El método del alisado exponencial doble (AED), conocido también como el **método de Brown**, por ser el que lo propuso, somete a la variable a una doble operación de alisado: En un principio se alisa directamente a la variable objeto de estudio; mientras que en la segunda operación se procede a alisar a la variable alisada previamente obtenida. Así pues, las fórmulas del AED son las siguientes:

- Primer alisado: $S'_t=\alpha\, X_t+(1-\alpha)\, S'_{t-1}$
- Segundo alisado: $S''_t=\alpha\, S'_t+(1-\alpha)\, S''_{t-1}$

Señalar que en los dos alisados $S'_t$ y $S''_t$ se utiliza el mismo coeficiente $\alpha$

El modelo teórico al que se aplica el AED es el modelo de tendencia lineal $X_t=b_0+b_1\, t+\varepsilon_t$

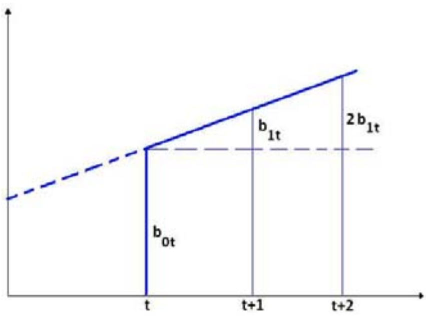
A partir de las dos ecuaciones de alisado se estiman los coeficientes de la recta para utilizarlo en la predicción, con un pequeño matiz que se expresa a continuación.

Cuando se utilizan métodos recursivos conviene ir desplazando el origen de forma que, en la estimación obtenida con t observaciones, el término independiente $b_0$ sea la ordenada de la recta en el punto t.

En el método del alisado doble, así como en el método de Holt, se cambia de origen cada vez que se añade una observación a la muestra. Es decir, cuando se tienen $t$ observaciones resulta que $\hat{X}_t = b_{0t}$.

Nota.- En el ajuste de la recta por mínimos cuadrados se toma como origen inicial el año anterior a la primera observación, después se hace un cambio de origen, aunque solo a efectos de facilitar los cálculos del ajuste.

- Si con la información disponible en t se desea realizar una predicción de la variable para el momento (t+m), con la interpretación $\hat{X}_t = b_{0t}$, se aplica la fórmula: $\hat{X}_{(t+m)/t} = b_{0t} + b_{1t}\, m$




Si $b_{0t}$ es la ordenada en el momento t, se suma a dicho valor *una vez* la pendiente con el objeto de obtener una estimación para el momento (t+1), *dos veces* la pendiente para una predicción del período (t+2), etc.

Esta forma de proceder es aplicable al *método de Holt* y, en general, en los métodos que están preparados para ser aplicados de forma recursiva.

Las fórmulas que permiten pasar de los coeficientes de alisado a los coeficientes de la recta son:

*Relación entre los parámetros de la ecuación de predicción y las ecuaciones de alisado en el AED*
$$\begin{cases} b_{0t} = 2\,S'_t - S''_t \\ b_{1t} = \dfrac{\alpha}{1-\alpha}\,(S'_t - S''_t) \end{cases}$$

Las equivalencias expuestas no son fáciles de ver de manera intuitiva, pero pueden demostrarse que son ciertas mediante procedimientos estadísticos de cierta laboriosidad.

- En el momento t, para predecir con el método AED se procede de la forma siguiente:

(a) Se calculan $S'_t$ y $S''_t$ de acuerdo con las fórmulas $\begin{cases} S'_t = \alpha\, X_t + (1-\alpha)\, S'_{t-1} \\ S''_t = \alpha\, S'_t + (1-\alpha)\, S''_{t-1} \end{cases}$

(b) Se calculan $b_{0t}$ y $b_{1t}$ de acuerdo con las fórmulas $\begin{cases} b_{0t} = 2\,S'_t - S''_t \\ b_{1t} = \dfrac{\alpha}{1-\alpha}\,(S'_t - S''_t) \end{cases}$

(c) Se calculan las predicciones, dando a m el valor requerido, según $\hat{X}_{(t+m)/t} = b_{0t} + b_{1t}\, m$

Cuando se conozca $X_{t+1}$ y, en general cuando se conozca una nueva observación, se repetirá el proceso anteriormente descrito. Naturalmente, de igual forma que en el AES, para aplicar $S'_t = \alpha\, X_t + (1-\alpha)\, S'_{t-1}$ y $S''_t = \alpha\, S'_t + (1-\alpha)\, S''_{t-1}$ será necesario conocer los valores iniciales, que en este caso serán: $S'_0$ y $S''_0$

Respecto al valor de $\alpha$ es aconsejable tomar el valor $\alpha = 0{,}2$, o alternativamente seleccionar aquel valor de $\alpha$ que haga mínima la RECM.

$$RECM_T = \sqrt{\frac{\sum_{t=2}^{T} e^2_{t/(t-1)}}{T-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{t=2}^{T} (X_t - \hat{X}_{t/(t-1)})^2}{T-1}}$$

Para determinar $S_0^{'}$ y $S_0^{''}$ se realiza un ajuste de la recta por mínimos cuadrados con toda la información disponible se obtienen las estimaciones $\hat{b}_0$ y $\hat{b}_1$, haciendo que: $b_{00} = \hat{b}_0$ y $b_{10} = \hat{b}_1$ y las ecuaciones:

$$\begin{cases} b_{0t} = 2\,S_t^{'} - S_t^{''} \\ b_{1t} = \dfrac{\alpha}{1-\alpha}\,(S_t^{'} - S_t^{''}) \end{cases} \xrightarrow{t=0} \boxed{\begin{array}{l} S_0^{'} = b_{00} - b_{10}\,\dfrac{1-\alpha}{\alpha} \\ S_0^{''} = b_{00} - 2\,b_{10}\,\dfrac{1-\alpha}{\alpha} \end{array}}$$

A partir de estos valores se inicia la recursión antes señalada.

- Para calcular una predicción por intervalos se utiliza la expresión:

$$\boxed{\left[\hat{X}_{(T+m)/T} \pm z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\sum_{t=2}^{T} e^2_{t/(t-1)}}{T-1}} \cdot g_m\right]}$$

donde el valor de $g_m$ viene dado por la expresión:

$$g_m = 1{,}25\sqrt{\frac{1 + \dfrac{\alpha}{(2-\alpha)^3}\left[1 + 4(1-\alpha) + 5(1-\alpha)^2 + 2\alpha(4-3\alpha)\,m + 2\alpha^2 m^2\right]}{1 + \dfrac{\alpha}{(2-\alpha)^3}\left[1 + 4(1-\alpha) + 5(1-\alpha)^2 + 2\alpha(4-3\alpha) + 2\alpha^2\right]}}$$

**Práctica AED:** En la tabla adjunta se presentan la venta de tarros de potitos (expresadas en cientos de miles de unidades) durante los años 1976-1992. Se trata de obtener:

a) Calcular la recta de regresión ajustada para predicciones puntuales
b) Intervalo de predicción del 90% para el año 1993, por el método de mínimos cuadrados
c) Predicción de ventas de tarros por el método del alisado exponencial doble (AED)

| Año | $X_t$ | Año | $X_t$ |
|---|---|---|---|
| 1976 | 174 | 1985 | 293 |
| 1977 | 154 | 1986 | 270 |
| 1978 | 175 | 1987 | 291 |
| 1979 | 221 | 1988 | 299 |
| 1980 | 200 | 1989 | 327 |
| 1981 | 234 | 1990 | 317 |
| 1982 | 230 | 1991 | 337 |
| 1983 | 249 | 1992 | 336 |
| 1984 | 262 | | |

**a)** El modelo de tendencia lineal $X_t = b_0 + b_1 t + \varepsilon_t$ le corresponde el modelo estimado $\hat{X}_t = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 t$ donde $\hat{b}_0$ y $\hat{b}_1$ son los estimadores de $b_0$ y $b_1$, al residuo que se obtiene en el ajuste para el período t se le denomina $\hat{\varepsilon}_t$

El intervalo de predicción, con nivel de significación $\alpha$, es: $\left(\hat{X}_{(T+m)/T} \pm t_{\alpha/2,\,T-h} \,.\, \hat{\sigma}_\varepsilon \,.\, f_{(T+m)/T}\right)$, $(m = 1, 2, 3, ...)$ y h es el número de parámetros del modelo, en el caso lineal $h = 2$

$\hat{\sigma}_\varepsilon$ es la estimación de $\sigma_\varepsilon$, dada por la expresión: $\hat{\sigma}_\varepsilon = \sqrt{\dfrac{\sum_{t=1}^{T} \hat{\varepsilon}_t^2}{T-h}} = \sqrt{\dfrac{\sum_{t=1}^{T} (X_t - \hat{X}_t)^2}{T-h}}$. En el caso de tendencia lineal: $\hat{\sigma}_\varepsilon = \sqrt{\dfrac{\sum_{t=1}^{T} \hat{\varepsilon}_t^2}{T-2}} = \sqrt{\dfrac{\sum_{t=1}^{T} (X_t - \hat{b}_0 - \hat{b}_1 t)^2}{T-2}}$

Para una tendencia constante, la función $f_{(T+m)/T}$: $f_{(T+m)/T} = \sqrt{1 + \dfrac{1}{T} + \dfrac{(T+m-\bar{t})^2}{\sum_{t=1}^{T} (T-\bar{t})^2}}$

Tabla para calcular la recta de regresión ajustada:

| Año | $X_t$ | t | $X_t.t$ | $t^2$ | $\hat{X}_t = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 t$ | $\hat{\varepsilon}_t = X_t - \hat{X}_t$ | $\hat{\varepsilon}_t^2$ | $(T-\bar{t})^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1976 | 174 | 1 | 174 | 1 | 165,83 | 8,2 | 66,7 | 64 |
| 1977 | 154 | 2 | 308 | 4 | 177,23 | -23,2 | 539,6 | 49 |
| 1978 | 175 | 3 | 525 | 9 | 188,63 | -13,6 | 185,8 | 36 |
| 1979 | 221 | 4 | 884 | 16 | 200,03 | 21,0 | 439,7 | 25 |
| 1980 | 200 | 5 | 1000 | 25 | 211,43 | -11,4 | 130,6 | 16 |
| 1981 | 234 | 6 | 1404 | 36 | 222,83 | 11,2 | 124,8 | 9 |
| 1982 | 230 | 7 | 1610 | 49 | 234,23 | -4,2 | 17,9 | 4 |
| 1983 | 249 | 8 | 1992 | 64 | 245,63 | 3,4 | 11,4 | 1 |
| 1984 | 262 | 9 | 2358 | 81 | 257,03 | 5,0 | 24,7 | 0 |
| 1985 | 293 | 10 | 2930 | 100 | 268,43 | 24,6 | 603,7 | 1 |
| 1986 | 270 | 11 | 2970 | 121 | 279,83 | -9,8 | 96,6 | 4 |
| 1987 | 291 | 12 | 3492 | 144 | 291,23 | -0,2 | 0,1 | 9 |
| 1988 | 299 | 13 | 3887 | 169 | 302,63 | -3,6 | 13,2 | 16 |
| 1989 | 327 | 14 | 4578 | 196 | 314,03 | 13,0 | 168,2 | 25 |
| 1990 | 317 | 15 | 4755 | 225 | 325,43 | -8,4 | 71,1 | 36 |
| 1991 | 337 | 16 | 5392 | 256 | 336,83 | 0,2 | 0,0 | 49 |
| 1992 | 336 | 17 | 5712 | 289 | 348,23 | -12,2 | 149,6 | 64 |
| $\sum$ | 4369 | 153 | 43971 | 1785 | 1898,63 | -0,5 | 2643,7 | 408 |

$$\hat{b}_1 = \frac{Cov(X_t, t)}{\sigma_t^2} = \frac{(43971/17) - (4369/17)\,.\,(153/17)}{(1785/17) - (153/17)^2} = 11{,}40$$

$\hat{b}_0 = (4369/17) - 11,40\,.\,(153/17) = 154,43$

La ecuación de la recta de regresión por mínimos cuadrados: $X_t = \overbrace{154,43}^{\hat{b}_0} + \overbrace{11,40}^{\hat{b}_1}\, t$

La predicción para el año 1993 (período 18) será: $\hat{X}_{18} = 154,43 + 11,40\,.\,18 = 359,63$

**b)** Intervalo de predicción: $\left( \hat{X}_{(T+m)/T} \pm t_{\alpha/2,\,T-h}\ .\ \hat{\sigma}_\varepsilon\ .\ \sqrt{1 + \dfrac{1}{T} + \dfrac{(T+m-\bar{t})^2}{\sum_{t=1}^{T} (T-\bar{t})^2}} \right)$

Para realizar un intervalo de predicción para el año 1993 (período 18):

$$\hat{X}_{18} = 359,63\,,\quad T = 17\,,\quad m = 1\,,\ \bar{t} = \frac{\sum_{t=1}^{17} t}{T} = \frac{153}{17} = 9$$

$$t_{0,05\,;\,17-2} = 1,753\,,\qquad \hat{\sigma}_\varepsilon = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{T} \hat{\varepsilon}_t^2}{T-2}} = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{17} \hat{\varepsilon}_t^2}{17-2}} = \sqrt{\frac{2643,7}{15}} = 13,275$$

La función $f_{(T+m)/T} = \sqrt{1 + \dfrac{1}{T} + \dfrac{(T+m-\bar{t})^2}{\sum_{t=1}^{T} (T-\bar{t})^2}} \equiv \sqrt{1 + \dfrac{1}{17} + \dfrac{(17+1-9)^2}{408}} = 1,08088$

El intervalo de predicción para 1993, con un nivel de confianza del 90%:

$$\left(359,63\ \pm\ 1,753\ .\ 13,275\,.\ 1,08088\right) = \left[334,49\ ;\ 384,77\right]$$

**c)** Predicción de ventas de tarros por el método del alisado exponencial doble (AED)

Tomando como punto inicial $\alpha = 0,2$ y las estimaciones realizadas en al ajuste de la recta de regresión: $\hat{X}_t = \overbrace{154,43}^{\hat{b}_0} + \overbrace{11,40}^{\hat{b}_1}\, t$

haciendo que: $b_{00} = \hat{b}_0 = 154,43$ y $b_{10} = \hat{b}_1 = 11,40$ $\quad \left(\hat{X}_t = b_{00} + b_{10}\ .\ t\right)$

Aplicando: $\begin{array}{l} S'_0 = b_{00} - b_{10}\,\dfrac{1-\alpha}{\alpha} \\ S''_0 = b_{00} - 2b_{10}\,\dfrac{1-\alpha}{\alpha} \end{array}$ se tiene: $\begin{array}{l} S'_0 = 154,43 - 11,40\,\dfrac{1-0,2}{0,2} = 108,84 \\ S''_0 = 154,43 - 2\,.\ 11,40\,\dfrac{1-0,2}{0,2} = 63,25 \end{array}$

Conociendo $S'_0 = 108,84$ y $S''_0 = 63,25$ se puede iniciar el proceso recursivo.

**I.** De acuerdo con las fórmulas $\begin{cases} S'_t = \alpha\, X_t + (1-\alpha)\, S'_{t-1} \\ S''_t = \alpha\, S'_t + (1-\alpha)\, S''_{t-1} \end{cases}$ se calculan:

$S_0^{'} = 108{,}84$

$S_1^{'} = \alpha\, X_1 + (1-\alpha)\, S_0^{'} \;\mapsto\; S_1^{'} = 0{,}2\,.\,174 + (1-0{,}2)\,.\,108{,}84 = 121{,}87$

$S_2^{'} = \alpha\, X_2 + (1-\alpha)\, S_1^{'} \;\mapsto\; S_2^{'} = 0{,}2\,.\,154 + (1-0{,}2)\,.\,121{,}87 = 128{,}30$

..........................................................................................................

$S_0^{''} = 63{,}25$

$S_1^{''} = \alpha\, S_1^{'} + (1-\alpha)\, S_0^{''} \;\mapsto\; S_1^{''} = 0{,}2\,.\,121{,}87 + (1-0{,}2)\,.\; 63{,}25 = 74{,}97$

$S_2^{''} = \alpha\, S_2^{'} + (1-\alpha)\, S_1^{''} \;\mapsto\; S_1^{''} = 0{,}2\,.\,128{,}30 + (1-0{,}2)\,.\; 74{,}97 = 85{,}64$

............................................................................................................

**II.** De acuerdo con las fórmulas $\begin{cases} b_{0t} = 2\, S_t^{'} - S_t^{''} \\ b_{1t} = \dfrac{\alpha}{1-\alpha}\, (S_t^{'} - S_t^{''}) \end{cases}$ se calculan:

$b_{00} = \hat{b}_0 = 154{,}43$

$b_{01} = 2\, S_1^{'} - S_1^{''} \;\mapsto\; b_{01} = 2\,.\,121{,}87 - 74{,}97 = 168{,}77$

$b_{02} = 2\, S_2^{'} - S_2^{''} \;\mapsto\; b_{02} = 2\,.\,128{,}30 - 85{,}64 = 170{,}95$

...................................................................................

$b_{10} = \hat{b}_1 = 11{,}40$

$$b_{11} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\, (S_1^{'} - S_1^{''}) \;\mapsto\; b_{11} = \frac{0{,}2}{1-0{,}2}\, (121{,}87 - 74{,}97) = 11{,}72$$

$$b_{12} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\, (S_2^{'} - S_2^{''}) \;\mapsto\; b_{12} = \frac{0{,}2}{1-0{,}2}\, (128{,}30 - 85{,}64) = 10{,}66$$

.......................................................................................................

**III.** Considerando la ecuación de predicción en el AED, haciendo predicción un período hace adelante:

$$\hat{X}_{(t+m)/t} = b_{0t} + b_{1t}\, m \qquad (m = 1 \text{ período hacia adelante})$$

$\hat{X}_{2/1} = b_{01} + b_{11}\,.\,1 = 168{,}77 + 11{,}72\,.\,1 = 180{,}49$

$\hat{X}_{3/2} = b_{02} + b_{12}\,.\,1 = 170{,}95 + 10{,}66\,.\,1 = 181{,}62$

.........................................................................

El proceso recursivo continuaría indefinidamente, en la tabla adjunta se recogen los cálculos para la información muestral disponible, realizando siempre predicciones de un período hacia adelante.

Con apoyo de las dos últimas columnas de la tabla se puede calcular la RECM (raíz del error cuadrático medio) y el EAM (error absoluto medio):

$$\text{RECM} = \sqrt{\frac{\sum_{t=2}^{T} e^2_{t/(t-1)}}{T-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{t=2}^{T} (X_t - \hat{X}_{t/(t-1)})^2}{T-1}} = \sqrt{\frac{3677{,}11}{16}} = 15{,}16 \qquad \text{EAM} = \frac{\sum_{t=2}^{17} \left| e^2_{t/(t-1)} \right|}{17-1} = \frac{198{,}69}{16} = 12{,}42$$

| Año | t | $X_t$ | $S'_t$ | $S''_t$ | $b_{0t}$ | $b_{1t}$ | $\hat{X}_{t/(t-1)}$ | $e_{t/(t-1)}$ | $e^2_{t/(t-1)}$ | $\lvert e_{t/(t-1)} \rvert$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1975 | 0 | | 108,84 | 63,25 | | | | | | |
| 1976 | 1 | 174 | 121,87 | 74,97 | 168,77 | 11,72 | | | | |
| 1977 | 2 | 154 | 128,30 | 85,64 | 170,96 | 10,66 | 180,49 | -26,49 | 701,93 | 26,49 |
| 1978 | 3 | 175 | 137,64 | 96,04 | 179,24 | 10,40 | 181,62 | -6,62 | 43,83 | 6,62 |
| 1979 | 4 | 221 | 154,31 | 107,69 | 200,93 | 11,65 | 189,64 | 31,36 | 983,63 | 31,36 |
| 1980 | 5 | 200 | 163,45 | 118,84 | 208,05 | 11,15 | 212,58 | -12,58 | 158,31 | 12,58 |
| 1981 | 6 | 234 | 177,56 | 130,59 | 224,53 | 11,74 | 219,20 | 14,80 | 218,93 | 14,80 |
| 1982 | 7 | 230 | 188,05 | 142,08 | 234,01 | 11,49 | 236,27 | -6,27 | 39,35 | 6,27 |
| 1983 | 8 | 249 | 200,24 | 153,71 | 246,76 | 11,63 | 245,51 | 3,49 | 12,20 | 3,49 |
| 1984 | 9 | 262 | 212,59 | 165,49 | 259,69 | 11,78 | 258,40 | 3,60 | 12,99 | 3,60 |
| 1985 | 10 | 293 | 228,67 | 178,12 | 279,22 | 12,64 | 271,47 | 21,53 | 463,57 | 21,53 |
| 1986 | 11 | 270 | 236,94 | 189,89 | 283,99 | 11,76 | 291,86 | -21,86 | 477,75 | 21,86 |
| 1987 | 12 | 291 | 247,75 | 201,46 | 294,04 | 11,57 | 295,75 | -4,75 | 22,58 | 4,75 |
| 1988 | 13 | 299 | 258,00 | 212,77 | 303,23 | 11,31 | 305,61 | -6,61 | 43,74 | 6,61 |
| 1989 | 14 | 327 | 271,80 | 224,57 | 319,03 | 11,81 | 314,54 | 12,46 | 155,23 | 12,46 |
| 1990 | 15 | 317 | 280,84 | 235,83 | 325,85 | 11,25 | 330,83 | -13,83 | 191,34 | 13,83 |
| 1991 | 16 | 337 | 292,07 | 247,08 | 337,07 | 11,25 | 337,11 | -0,11 | 0,01 | 0,11 |
| 1992 | 17 | 336 | 300,86 | 257,83 | 343,88 | 10,76 | 348,32 | -12,32 | 151,71 | 12,32 |
| | | | | | | | | $\sum$ | 3677,11 | 198,69 |

## ♣ ALISADO POR EL MÉTODO DE HOLT

El método propuesto por Holt es un método de alisado exponencial que utiliza dos parámetros de alisado en lugar de uno solo, como ocurre con el método de AED. Es aplicable también a series que tengan una tendencia aproximadamente lineal, y ha dado muy buenos resultados en la previsión de distintas áreas de la economía empresarial: gestión de stocks, financiación, ventas, etc.

Las dos variables alisadas que se calculan en este método tienen una relación directa e inmediata con los parámetros del modelo lineal $X_t = b_0 + b_1 t + \varepsilon_t$, con la salvedad de que la estimación del término independiente utilizando t observaciones da, como en el AED, la ordenada o *nivel de la tendencia* para ese punto.

- En el método de Holt se calculan directamente dos variables de alisado para cada momento del tiempo:

  $S_t$ : estimación del *nivel* de la serie en t

  $b_{1t}$ : estimación de la *pendiente* de la serie en t

- Si el modelo $X_t = b_0 + b_1 t + \varepsilon_t$ no tuviera componente aleatorio, es decir, si el modelo tuviera una tendencia determinista representada por una recta, entonces S tomaría el siguiente valor en el período t:

$$S_t = b_0 + b_1 t \qquad (1)$$

donde $b_0$ y $b_1$ son los parámetros del modelo lineal que representan la ordenada en el período 0 y la pendiente, respectivamente.

- En el período $(t-1)$, S tomará el valor: $S_{t-1} = b_0 + b_1 (t-1)$ (2)

Restando (2) de (1) resulta: $S_t = S_{t-1} + b_1$

➢ A la vista del resultado $[S_t = S_{t-1} + b_1]$ en el *método de Holt* se propone obtener $S_t$ mediante:

*primera ecuación o ecuación de nivel:* $S_t = \alpha X_t + (1-\alpha)(S_{t-1} + b_{1t-1})$ (3)

Se observa que esta ecuación es una media ponderada entre $X_t$ y $(S_{t-1} + b_{1t-1})$, siendo $(S_{t-1} + b_{1t-1})$ una estimación de $[S_{t-1} = b_0 + b_1 (t-1)]$ donde se ha sustituido el parámetro de la pendiente $b_1$ por $b_{1t-1}$.

Así pues, la *primera ecuación o ecuación de nivel* proporciona directamente el valor del nivel de la tendencia en el momento t, teniendo el mismo papel que $b_{0t}$ en el método del AED.

➢ La segunda ecuación del método de Holt permite, a su vez, calcular la pendiente $b_{1t}$ de forma recursiva, mediante la ecuación de alisado:

*segunda ecuación o ecuación de nivel:* $b_{1t} = \beta (S_t - S_{t-1}) + (1-\beta) b_{1t-1}$ (4)

Como estimación de la *pendiente* se toma la diferencia entre el nivel de la tendencia en t y en $(t-1)$: $(S_t - S_{t-1})$. En el segundo término, como ocurre en todas las ecuaciones de alisado exponencial, aparece la variable alisada con un retardo.

Con objeto de determinar el valor de la pendiente $b_{1t}$ sobre el eje de ordenadas, se toma como referencia la paralela al eje de abscisas que pasa por $S_{t-1}$.

En el corte realizado en t se observa que $b_{1t}$ está situado entre $(S_t - S_{t-1})$ y $b_{1t-1}$, siendo este último término la *pendiente* que ya se había obtenido en $(t-1)$.

➢ La ecuación de *predicción en el método de Holt:* $\hat{X}_{(t+m)/t} = S_t + b_{1t}\, m$ (5)

📖 Para la aplicación de las ecuaciones $\begin{cases} b_{1t} = \beta (S_t - S_{t-1}) + (1-\beta) b_{1t-1} \\ \hat{X}_{(t+m)/t} = S_t + b_{1t}\, m \end{cases}$ es necesario conocer los valores iniciales de $S_0$ y $b_{10}$, así como los coeficientes de alisado de $\alpha$ y $\beta$

Los valores iniciales para comenzar la recursión se puede obtener directamente a partir de los coeficientes $(\hat{b}_0$ y $\hat{b}_1)$ obtenidos en el ajuste de una recta de regresión por mínimos cuadrados utilizando toda la información disponible, haciendo: $\begin{cases} S_0 = \hat{b}_0 \\ b_{10} = \hat{b}_1 \end{cases}$

El método de Holt tiene, a diferencia del método del AED, dos coeficientes de alisado $(\alpha, \beta)$, razón por la que a veces se denomina AED con dos parámetros. El hecho de trabajar con dos parámetros confiere mayor fiabilidad, aunque como es lógico, la búsqueda de los valores que hacen mínima la RECM (raíz error cuadrático medio) es más laboriosa que cuando se tiene un solo coeficiente de alisado.

En cualquier caso, según se desprende de varios experimentos realizados, se obtienen los mejores resultados en la predicción cuando se toman los valores $\alpha = 0{,}05$ y $\beta = 0{,}2$

**Práctica método de Holt:** En la tabla adjunta se presentan la venta de tarros de potitos (expresadas en cientos de miles de unidades) durante los años 1976-1992. Se trata de obtener la predicción de ventas de tarros por el método de Holt

| Año | $X_t$ | Año | $X_t$ |
|---|---|---|---|
| 1976 | 174 | 1985 | 293 |
| 1977 | 154 | 1986 | 270 |
| 1978 | 175 | 1987 | 291 |
| 1979 | 221 | 1988 | 299 |
| 1980 | 200 | 1989 | 327 |
| 1981 | 234 | 1990 | 317 |
| 1982 | 230 | 1991 | 337 |
| 1983 | 249 | 1992 | 336 |
| 1984 | 262 | | |

Se aplica el *método de Holt* tomando $\alpha = 0{,}1$ y $\beta = 0{,}1$

- Como punto de partida inicial se toma las estimaciones realizadas anteriormente cuando se ajustaba una recta con toda la información disponible en el momento t. Con lo cual,

$$S_0 = \hat{b}_0 = 154{,}43 \qquad\qquad b_{10} = \hat{b}_1 = 11{,}40$$

- Tomando la *primera ecuación o ecuación de nivel:* $S_t = \alpha X_t + (1-\alpha)(S_{t-1} + b_{1t-1})$

$$S_1 = \alpha X_1 + (1-\alpha)(S_0 + b_{10}) = 0{,}1\ .\ 174 + (1-0{,}1)(154{,}43 + 11{,}40) = 166{,}65$$

- A partir de $S_1$ se puede actualizar la pendiente aplicando: $b_{1t} = \beta(S_t - S_{t-1}) + (1-\beta)\, b_{1t-1}$

$$b_{11} = \beta(S_1 - S_0) + (1-\beta)\, b_{10} = 0{,}1\,(166{,}64 - 154{,}43) + (1-0{,}1)\, 11{,}40 = 11{,}48$$

- Para realizar la predicción $\hat{X}_{(t+m)/t} = S_t + b_{1t}\, m$ con un período hacia adelante $(m=1)$

$$\hat{X}_{2/1} = S_1 + b_{11}\ .\ 1 = 166{,}65 + 11{,}48\ .\ 1 = 178{,}13$$

Este proceso recursivo se continúa indefinidamente. En la tabla adjunta se recogen los cálculos para el período muestral, realizando siempre predicciones de un período hacia adelante $(m=1)$, calculando RECM y EAM, utilizando como criterio RECM es mejor la predicción por el método de Holt.

| Año | t | $X_t$ | $S_t$ | $b_{1t}$ | $\hat{X}_{t/(t-1)}$ | $e_{t/(t-1)}$ | $e^2_{t/(t-1)}$ | $\lvert e_{t/(t-1)} \rvert$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1975 | 0 | | 154,43 | 11,40 | | | | |
| 1976 | 1 | 174 | 166,65 | 11,48 | | | | |
| 1977 | 2 | 154 | 175,72 | 11,24 | 178,13 | -24,13 | 582,19 | 24,13 |
| 1978 | 3 | 175 | 185,76 | 11,12 | 186,96 | -11,96 | 142,95 | 11,96 |
| 1979 | 4 | 221 | 199,29 | 11,36 | 196,88 | 24,12 | 581,70 | 24,12 |
| 1980 | 5 | 200 | 209,59 | 11,26 | 210,66 | -10,66 | 113,54 | 10,66 |
| 1981 | 6 | 234 | 222,16 | 11,39 | 220,85 | 13,15 | 173,05 | 13,15 |
| 1982 | 7 | 230 | 233,19 | 11,35 | 233,55 | -3,55 | 12,59 | 3,55 |
| 1983 | 8 | 249 | 244,99 | 11,40 | 244,54 | 4,46 | 19,85 | 4,46 |
| 1984 | 9 | 262 | 256,95 | 11,45 | 256,39 | 5,61 | 31,51 | 5,61 |
| 1985 | 10 | 293 | 270,86 | 11,70 | 268,40 | 24,60 | 605,17 | 24,60 |
| 1986 | 11 | 270 | 281,30 | 11,57 | 282,56 | -12,56 | 157,71 | 12,56 |
| 1987 | 12 | 291 | 292,69 | 11,55 | 292,87 | -1,87 | 3,52 | 1,87 |
| 1988 | 13 | 299 | 303,72 | 11,50 | 304,24 | -5,24 | 27,47 | 5,24 |
| 1989 | 14 | 327 | 316,40 | 11,62 | 315,22 | 11,78 | 138,80 | 11,78 |
| 1990 | 15 | 317 | 326,91 | 11,51 | 328,02 | -11,02 | 121,36 | 11,02 |
| 1991 | 16 | 337 | 338,28 | 11,49 | 338,42 | -1,42 | 2,03 | 1,42 |
| 1992 | 17 | 336 | 348,40 | 11,36 | 349,78 | -13,78 | 189,79 | 13,78 |
| | | | | | | $\sum$ | 2903,21 | 179,90 |

$$\text{RECM} = \sqrt{\frac{\sum_{t=2}^{T} e^2_{t/(t-1)}}{T-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{t=2}^{T} (X_t - \hat{X}_{t/(t-1)})^2}{T-1}} = \sqrt{\frac{2903,21}{16}} = 13,47 \qquad \text{EAM} = \frac{\sum_{t=2}^{17} \left| e^2_{t/(t-1)} \right|}{17-1} = \frac{179,90}{16} = 11,24$$

## ♣ MÉTODO DE HOLT-WINTERS: ESQUEMA MULTIPLICATIVO

Es un método diseñado para realizar predicciones de series que siguen una tendencia aproximadamente lineal, sometidas a la *influencia del factor estacional*.

Entre las distintas modalidades que se pueden considerar dentro del *método de Holt-Winters*, se plantea el caso en que la tendencia y la estacionalidad siguen un esquema multiplicativo, mientras que el componente irregular (representado por una perturbación aleatoria) se introduce de forma aditiva. Así pues, se trata de un sistema de integración mixto, con expresión:

$$X_t = T_t \,.\, E_t + \varepsilon_t \qquad \text{donde} \quad T_t = b_0 + b_1 t$$

El modelo teórico que va a utilizarse de base para la predicción se expresa:

$$X_t = (b_0 + b_1 t)\,.\,E_t + \varepsilon_t$$

donde
- $b_0 \equiv$ nivel o componente permanente
- $b_1 \equiv$ pendiente de la recta
- $E_t \equiv$ factor estacional multiplicativo

En el modelo de *Holt-Winters* se proponen tres ecuaciones de alisado para estimar estos componentes. El coeficiente de alisado puede ser diferente en cada una de estas ecuaciones.

Se analizan las ecuaciones que integran el método de *Holt-Winters*, estimándose, respectivamente, los componentes $b_0$, $b_1$ y $E_t$ mediante las variables de alisado $S_t$, $b_{1,t}$ y $C_t$.

- El nivel $b_0$ se estima mediante la variable de alisado $S_t$

$$S_t = \alpha\,\frac{X_t}{C_{t-L}} + (1-\alpha)\,(S_{t-1} + b_{1,(t-1)}) \qquad 0 < \alpha < 1$$

$\dfrac{X_t}{C_{t-L}}$ serie desestacionalizada al ser $C_{t-L}$ una estimación del factor de estacionalidad para la misma estación que t pero un año anterior. En caso de aplicar $C_t$ (factor de estacionalidad correspondiente al momento actual) obliga a resolver ecuaciones de forma simultanea, lo que complicaría de forma considerable los cálculos.

En cualquier caso, es conveniente utilizar una serie desestacionalizada en el cálculo de la tendencia con objeto de evitar sesgos que pueden producirse por la influencia del factor estacional.

- La pendiente $b_1$ se estima por la variable de alisado $b_{1t}$ que viene dada por la *ecuación de la pendiente*:

$$b_{1,t} = \beta\,(S_t - S_{t-1}) + (1-\beta)\,b_{1,(t-1)} \qquad 0 < \beta < 1$$

- El factor estacional $E_t$ se estima por la variable de alisado $C_t$, la ecuación del factor estacional:

$$C_t = \gamma\,\frac{X_t}{S_t} + (1-\gamma)\,C_{t-L} \qquad 0 < \gamma < 1$$

La variable X, está dividida por el nivel de tendencia en ese punto $S_t$, con lo que el cociente $X_t / S_t$ es una variable sin tendencia. Así pues, el factor estacional se obtiene mediante el alisado de una serie en la que se eliminado previamente la tendencia. A su vez, el procedimiento de alisado elimina, en mayor o menor grado, el comportamiento irregular.

Señalar que, en el proceso del cálculo de estas tres ecuaciones de actualización de las estimaciones, la primera ecuación que se debe calcular necesariamente es:

$$S_t = \alpha \, \frac{X_t}{C_{t-L}} + (1-\alpha)\,(S_{t-1} + b_{1,(t-1)})$$

ya que el resultado obtenido interviene en el cálculo de las otras dos ecuaciones para ese mismo período de tiempo.

Para hacer operativo el *método de Holt-Winters* se requiere conocer los valores iniciales y los valores de las constantes $\alpha$, $\beta$ y $\gamma$.

Los valores iniciales necesarios para iniciar los cálculos recursivos son $(L+2)$, correspondientes a los L factores estacionales del año anterior, a la primera observación y al nivel y pendiente de período 0.

Los valores iniciales requeridos para $L=4$ se recogen en la tabla adjunta:

| Período | F. estacional | Nivel | Pendiente |
|---|---|---|---|
| -3 | $C_{-3}$ | | |
| -2 | $C_{-2}$ | | |
| -1 | $C_{-1}$ | | |
| 0 | $C_0$ | $S_0$ | $b_{1,0}$ |

Generalmente, los índices de variación estacional calculados en el método de la razón de la media móvil se toman como valores iniciales de los coeficientes estacionales.

Por otra parte, la pendiente y la ordenada en el origen obtenidas al ajustar una recta a la serie desestacionalizada se pueden utilizar como estimaciones de $b_{1,0}$ y $S_0$.
Alternativamente, para obtener los valores iniciales de estos dos últimos coeficientes se pueden

aplicar las siguientes fórmulas: $\begin{cases} b_{1,0} = \dfrac{\overline{X}_k - \overline{X}_1}{(k-1)\,L} \\[2ex] S_0 = \overline{X}_1 - \dfrac{L}{2}\, b_{1,0} \end{cases}$

En la primera fórmula $b_{1,0} = \dfrac{\overline{X}_k - \overline{X}_1}{(k-1)\,L}$ se divide la diferencia de la media anual de X entre el primero y el último año (año k-ésimo) por el número de períodos transcurridos, indicando el promedio de incremento de cada año y se toma como valor inicial de la pendiente.

En la segunda fórmula $S_0 = \overline{X}_1 - \dfrac{L}{2}\, b_{1,0}$ al restar de la media del primer año la mitad del crecimiento correspondiente a un año, se obtiene el valor inicial de la variable correspondiente al período 0.

Respecto a los coeficientes de alisado, por los estudios de simulación realizados, los valores óptimos están situados entre 0,05 y 0,40, aunque determinadas series requieren un valor de $\alpha$ muy superior. Por otra parte, en los programas de ordenador para la aplicación de este método existe la posibilidad de que el programa realice la búsqueda de los valores de los coeficientes que hagan mínima la RECM.

Con la información disponible en t se pueden realizar predicciones de 1 o más períodos en adelante. La fórmula genérica del predictor de m períodos viene dada por:

*ecuación de predicción:* $\hat{X}_{(t+m)/t} = (S_t + b_{1,t}\, m)\, C_{t+m-L} \qquad 1 \leq m \leq L$

La fórmula es válida hasta L períodos en adelante, ya que utiliza el factor estacional de la misma estación correspondiente al año anterior.
Si se quiere hacer predicciones a más de 1 año, se tendría que modificar ligeramente la fórmula para utilizar el factor estacional de la misma estación, pero correspondiente a dos o más años antes.
De todas formas, este método está diseñado especialmente para la previsión a corto plazo, esto es, inferior al año.

**Práctica método de Holt-Winters:** En la tabla adjunta se presentan los índices trimestrales de obras realizadas en ingeniería civil entre 1988-1993. Se trata de obtener:

(a) Predicciones para los cuatro trimestres de 1994
(b) Predicción para los cuatro trimestres de 1994 por el método de Holt-Winters

**(a)** Para realizar las predicciones de los cuatro trimestres de 1994, se comienza desestacionalizando la serie original

| Trimestres | 1988 | 1989 | 1990 | 1991 | 1992 | 1993 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Primero | 77,1 | 105,1 | 124,8 | 144 | 150,1 | 119 |
| Segundo | 92,8 | 125,5 | 155,2 | 169,3 | 156,5 | 135,1 |
| Tercero | 103,2 | 138,2 | 160,3 | 163,2 | 145,7 | 143,2 |
| Cuarto | 126,9 | 146,4 | 171,5 | 170,5 | 144,5 | 151,8 |

**Cálculo de los Índices de variación estacional:**

**SERIE NO CENTRADA DE MEDIAS MÓVILES**

| Trimestres | 1988 | 1989 | 1990 | 1991 | 1992 | 1993 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1º - 2º | --------- | 123,9 | 146,7 | 162,0 | 155,7 | 135,5 |
| 2º - 3º | 100,0 | 128,8 | 153,0 | 161,8 | 149,2 | 137,3 |
| 3º - 4º | 107,0 | 133,7 | 157,8 | 163,3 | 141,4 | --------- |
| 4º - 1º | 115,2 | 141,2 | 161,3 | 160,1 | 136,1 | --------- |

**SERIE CENTRADA DE MEDIAS MÓVILES**

| Trimestres | 1988 | 1989 | 1990 | 1991 | 1992 | 1993 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Primero | --------- | 119,6 | 143,9 | 161,6 | 157,9 | 135,8 |
| Segundo | --------- | 126,4 | 149,8 | 161,9 | 152,5 | 136,4 |
| Tercero | 103,5 | 131,3 | 155,4 | 162,5 | 145,3 | --------- |
| Cuarto | 111,1 | 137,4 | 159,5 | 161,7 | 138,8 | --------- |

**SERIE COMPONENTES ESTACIONAL Y ACCIDENTAL**

| | 1988 | 1989 | 1990 | 1991 | 1992 | 1993 | **IBVE** | **IVE** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Primero | --------- | 0,8791 | 0,8672 | 0,8909 | 0,9507 | 0,8765 | 0,8929 | 0,8918 |
| Segundo | --------- | 0,9932 | 1,0360 | 1,0459 | 1,0266 | 0,9907 | 1,0185 | 1,0172 |
| Tercero | 0,9971 | 1,0529 | 1,0319 | 1,0042 | 1,0027 | --------- | 1,0177 | 1,0165 |
| Cuarto | 1,1423 | 1,0652 | 1,0752 | 1,0546 | 1,0414 | --------- | 1,0757 | 1,0744 |
| | | | | | | | 4,0048 | 4 |

| Trimestre | $X_t = T.E.C.A$ | Medias móviles descentrada T. C | Medias móviles centrada T. C | $E.A = \frac{X_t}{T.C}$ | IBVE | IVE | SERIE DESESTABILIZADA $X_t / IVE = T.E.C.A / IVE$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Q1 1988 | 77,1 | --------- | --------- | --------- | 0,8929 | 0,8918 | 86,5 |
| Q2 1988 | 92,8 | 100,0 | --------- | --------- | 1,0185 | 1,0172 | 91,2 |
| Q3 1988 | 103,2 | 107,0 | 103,5 | 0,9971 | 1,0177 | 1,0165 | 101,5 |
| Q4 1988 | 126,9 | 115,2 | 111,1 | 1,1423 | 1,0757 | 1,0744 | 118,1 |
| Q1 1989 | 105,1 | 123,9 | 119,6 | 0,8791 | 0,8929 | 0,8918 | 117,9 |
| Q2 1989 | 125,5 | 128,8 | 126,4 | 0,9932 | 1,0185 | 1,0172 | 123,4 |
| Q3 1989 | 138,2 | 133,7 | 131,3 | 1,0529 | 1,0177 | 1,0165 | 136,0 |
| Q4 1989 | 146,4 | 141,2 | 137,4 | 1,0652 | 1,0757 | 1,0744 | 136,3 |
| Q1 1990 | 124,8 | 146,7 | 143,9 | 0,8672 | 0,8929 | 0,8918 | 139,9 |
| Q2 1990 | 155,2 | 153,0 | 149,8 | 1,0360 | 1,0185 | 1,0172 | 152,6 |
| Q3 1990 | 160,3 | 157,8 | 155,4 | 1,0319 | 1,0177 | 1,0165 | 157,7 |
| Q4 1990 | 171,5 | 161,3 | 159,5 | 1,0752 | 1,0757 | 1,0744 | 159,6 |
| Q1 1991 | 144 | 162,0 | 161,6 | 0,8909 | 0,8929 | 0,8918 | 161,5 |
| Q2 1991 | 169,3 | 161,8 | 161,9 | 1,0459 | 1,0185 | 1,0172 | 166,4 |
| Q3 1991 | 163,2 | 163,3 | 162,5 | 1,0042 | 1,0177 | 1,0165 | 160,5 |
| Q4 1991 | 170,5 | 160,1 | 161,7 | 1,0546 | 1,0757 | 1,0744 | 158,7 |
| Q1 1992 | 150,1 | 155,7 | 157,9 | 0,9507 | 0,8929 | 0,8918 | 168,3 |
| Q2 1992 | 156,5 | 149,2 | 152,5 | 1,0266 | 1,0185 | 1,0172 | 153,8 |
| Q3 1992 | 145,7 | 141,4 | 145,3 | 1,0027 | 1,0177 | 1,0165 | 143,3 |
| Q4 1992 | 144,5 | 136,1 | 138,8 | 1,0414 | 1,0757 | 1,0744 | 134,5 |
| Q1 1993 | 119 | 135,5 | 135,8 | 0,8765 | 0,8929 | 0,8918 | 133,4 |
| Q2 1993 | 135,1 | 137,3 | 136,4 | 0,9907 | 1,0185 | 1,0172 | 132,8 |
| Q3 1993 | 143,2 | --------- | --------- | --------- | 1,0177 | 1,0165 | 140,9 |
| Q4 1993 | 151,8 | --------- | --------- | --------- | 1,0757 | 1,0744 | 141,3 |

**SERIE DESESTACIONALIZADA:** $X_t / IVE = T.E.C.A / IVE$

| Trimestres | 1988 | 1989 | 1990 | 1991 | 1992 | 1993 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Primero | 86,5 | 117,9 | 139,9 | 161,5 | 168,3 | 133,4 |
| Segundo | 91,2 | 123,4 | 152,6 | 166,4 | 153,8 | 132,8 |
| Tercero | 101,5 | 136,0 | 157,7 | 160,5 | 143,3 | 140,9 |
| Cuarto | 118,1 | 136,3 | 159,6 | 158,7 | 134,5 | 141,3 |

Para realizar predicciones de las obras de ingeniería civil bajo el supuesto de estacionalidad estable en el año 1994 (Q1 1994, Q2 1994, Q3 1994, Q4 1994) se requiere ajustar una recta de regresión con la serie desestacionalizada $Y_t$

| Trimestre | $Y_t$ | t | $Y_t \, . t$ | $t^2$ | $\hat{Y}_t = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 \, t$ | $\hat{\varepsilon}_t = Y_t - \hat{Y}_t$ | $\hat{\varepsilon}_t^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Q1 1988 | 86,5 | 1 | 86,5 | 1 | 116,42 | -29,92 | 895,41 |
| Q2 1988 | 91,2 | 2 | 182,4 | 4 | 118,31 | -27,11 | 735,19 |
| Q3 1988 | 101,5 | 3 | 304,5 | 9 | 120,21 | -18,71 | 349,90 |
| Q4 1988 | 118,1 | 4 | 472,4 | 16 | 122,10 | -4,00 | 15,97 |
| Q1 1989 | 117,9 | 5 | 589,5 | 25 | 123,99 | -6,09 | 37,06 |
| Q2 1989 | 123,4 | 6 | 740,4 | 36 | 125,88 | -2,48 | 6,14 |
| Q3 1989 | 136 | 7 | 952 | 49 | 127,77 | 8,23 | 67,74 |
| Q4 1989 | 136,3 | 8 | 1090,4 | 64 | 129,66 | 6,64 | 44,08 |
| Q1 1990 | 139,9 | 9 | 1259,1 | 81 | 131,55 | 8,35 | 69,69 |
| Q2 1990 | 152,6 | 10 | 1526 | 100 | 133,44 | 19,16 | 366,99 |
| Q3 1990 | 157,7 | 11 | 1734,7 | 121 | 135,33 | 22,37 | 500,23 |
| Q4 1990 | 159,6 | 12 | 1915,2 | 144 | 137,23 | 22,37 | 500,63 |
| Q1 1991 | 161,5 | 13 | 2099,5 | 169 | 139,12 | 22,38 | 501,03 |
| Q2 1991 | 166,4 | 14 | 2329,6 | 196 | 141,01 | 25,39 | 644,78 |
| Q3 1991 | 160,5 | 15 | 2407,5 | 225 | 142,90 | 17,60 | 309,81 |
| Q4 1991 | 158,7 | 16 | 2539,2 | 256 | 144,79 | 13,91 | 193,50 |
| Q1 1992 | 168,3 | 17 | 2861,1 | 289 | 146,68 | 21,62 | 467,39 |
| Q2 1992 | 153,8 | 18 | 2768,4 | 324 | 148,57 | 5,23 | 27,33 |
| Q3 1992 | 143,3 | 19 | 2722,7 | 361 | 150,46 | -7,16 | 51,31 |
| Q4 1992 | 134,5 | 20 | 2690 | 400 | 152,35 | -17,85 | 318,76 |
| Q1 1993 | 133,4 | 21 | 2801,4 | 441 | 154,25 | -20,85 | 434,52 |
| Q2 1993 | 132,8 | 22 | 2921,6 | 484 | 156,14 | -23,34 | 544,58 |
| Q3 1993 | 140,9 | 23 | 3240,7 | 529 | 158,03 | -17,13 | 293,34 |
| Q4 1993 | 141,3 | 24 | 3391,2 | 576 | 159,92 | -18,62 | 346,64 |
| $\sum$ | 3316,1 | 300 | 43626 | 4900 | | | 7722,01 |

$$\hat{b}_1 = \frac{Cov(Y_t\,,t)}{\sigma_t^2} = \frac{(43626/24) - (3316{,}1/24)\,.\,(300/24)}{(4900/24) - (300/24)^2} = \frac{90{,}615}{47{,}917} = 1{,}892$$

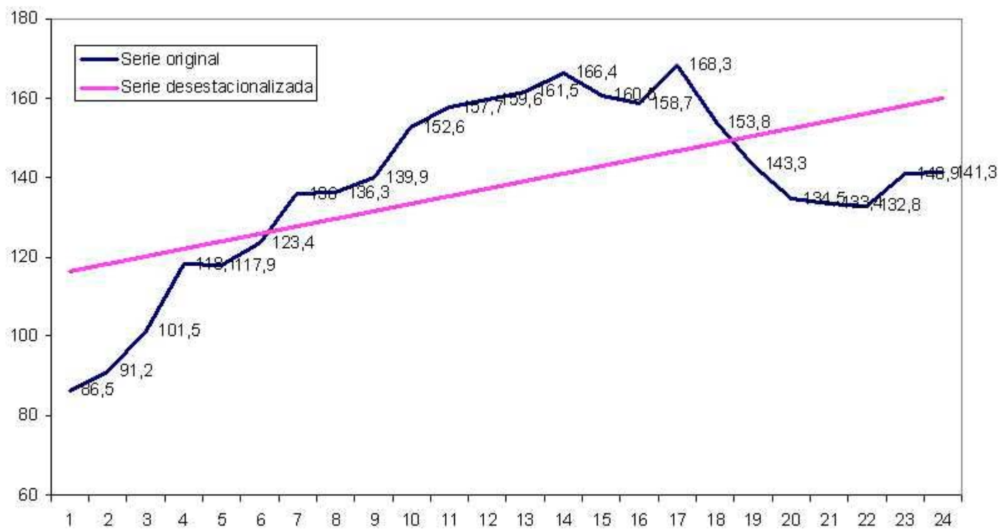
$$\hat{b}_0 = (3316{,}1/24) - 1{,}892\,.\,(300/24) = 114{,}52$$

La ecuación de la recta de regresión por mínimos cuadrados: $Y_t = \overbrace{114{,}52}^{\hat{b}_0} + \overbrace{1{,}892}^{\hat{b}_1}\, t$

Los coeficientes estimados son: $\hat{b}_0 = 114{,}52$ y $\hat{b}_1 = 1{,}892$

La recta ajustada puede servir tanto para representar la tendencia como para realizar predicciones a medio o largo plazo. En la predicción a corto plazo tiene una escasa aplicación en la predicción.

El gráfico representando la serie original y la serie desestacionalizada de las obras de ingeniería civil:




Bajo el supuesto de estacionalidad estable, la predicción viene dada por la expresión:

$$\hat{X}_{(t+m)/t} = \hat{T}_{(t+m)/t}\ \hat{E}_m \qquad m = 1, 2, \cdots, L, \cdots, \cdots$$

donde $\hat{T}_{(t+m)/t}$ es la predicción obtenida de la tendencia mediante el ajuste de una función a los datos desestacionalizados, prescindiendo del ciclo, ya que éste es un componente difícil de predecir.

Podría pensarse que la tendencia puede calcularse ajustando directamente la serie original a la función (recta, parábola; si en la serie original se toman previamente logaritmos es adecuado ajustar una recta).
Este procedimiento no es aconsejable, ya que el factor estacional distorsiona gravemente los resultados de la estimación, en especial si la estacionalidad es fuerte (no existe estacional cuando $E_t = 1 \ \forall t$ ).

Para predecir los cuatro trimestres del año 1994 (períodos 25, 26, 27 y 28) se recurre a la fórmula:

$$\hat{X}_{(t+m)/t} = \hat{T}_{(t+m)/t}\ \hat{E}_m \quad \text{donde} \quad \hat{T}_{(t+m)/t} = \hat{b}_0 + (t+m)\,\hat{b}_1 \quad \mapsto \quad \hat{X}_{(t+m)/t} = \left[\hat{b}_0 + (t+m)\,\hat{b}_1\right] \hat{E}_m$$

con lo cual,

$$\hat{X}_{25/24} = \left[\hat{b}_0 + 25\,\hat{b}_1\right] \hat{E}_1 = \left[114{,}52 + 25\,.\,1{,}892\right]\ 0{,}8918 = 144{,}3$$

$$\hat{X}_{26/24} = \left[\hat{b}_0 + 26\,\hat{b}_1\right] \hat{E}_1 = \left[114{,}52 + 26\,.\,1{,}892\right]\ 1{,}0172 = 166{,}5$$

$$\hat{X}_{27/24} = \left[\hat{b}_0 + 27\,\hat{b}_1\right] \hat{E}_1 = \left[114{,}52 + 27\,.\,1{,}892\right]\ 1{,}0165 = 168{,}3$$

$$\hat{X}_{28/24} = \left[\hat{b}_0 + 28\,\hat{b}_1\right] \hat{E}_1 = \left[114{,}52 + 28\,.\,1{,}892\right]\ 1{,}0744 = 180$$

**(b) Predicción de los índices para 1994 por el método de Holt-Winters**

Se toma $\alpha = 0{,}20$, $\beta = 0{,}10$ y $\gamma = 0{,}05$

- Para obtener los valores iniciales de $S$ y $b_1$ se aplican las ecuaciones:

$$b_{1,0} = \frac{\overline{X}_k - \overline{X}_1}{(k-1)\,L} = \frac{137{,}275 - 100}{(6-1)\,.\,4} = 1{,}864 \quad \text{con } (k-1) \text{ años y } L \text{ períodos (trimestres)}$$

$$S_0 = \overline{X}_1 - \frac{L}{2}\, b_{1,0} = 100 - \frac{4}{2}\,.\,1{,}864 = 96{,}3$$

- Los valores iniciales $\left[\, C_{m-L} = E_m = IVE_m \,\right]$, $t = 0$, $1 \leq m \leq L$, de los factores estacionales obtenidos al aplicar el método de la razón a la media móvil:

$$C_{-3} = E_1 = 0{,}8918 \qquad C_{-2} = E_2 = 1{,}0172 \qquad C_{-1} = E_3 = 1{,}0165 \qquad C_0 = E_4 = 1{,}0744$$

La fórmula genérica del *predictor* de *m* períodos: $\hat{X}_{(t+m)/t} = (S_t + b_{1,t}\, m)\, C_{t+m-L}$

*En el período 1:* $\hat{X}_{1/0} = (S_1 + b_{1,0}\,.\,1)\, C_{-3} = \left[\, 96{,}3 + 1{,}864 \,\right].\, 0{,}8918 = 87{,}5$

La predicción del período 1 está condicionada a los valores iniciales, que, a su vez se han calculado introduciendo toda la información muestral. Por este motivo, no se tendrá en cuenta en el cálculo de la RECM (*raíz cuadrada del error medio*) y del EAM (*error absoluto medio*).

Considerando las fórmulas respectivas de las ecuaciones de nivel, pendiente y factor estacional:

$$S_t = \alpha\, \frac{X_t}{C_{t-L}} + (1-\alpha)\,(S_{t-1} + b_{1,(t-1)}) \quad \textit{ecuación de nivel}$$

$$b_{1,t} = \beta\,(S_t - S_{t-1}) + (1-\beta)\, b_{1,(t-1)} \qquad \textit{ecuación de la pendiente}$$

$$C_t = \gamma\, \frac{X_t}{S_t} + (1-\gamma)\, C_{t-L} \qquad \textit{ecuación del factor estacional}$$

para $t = 1$, se tiene:

$$S_1 = \alpha\, \frac{X_1}{C_{-3}} + (1-\alpha)\,(S_0 + b_{1,0}) = 0{,}2\, \frac{77{,}1}{0{,}8918} + (1-0{,}2)\,(96{,}3 + 1{,}864) = 95{,}8$$

$$b_{1,1} = \beta\,(S_1 - S_0) + (1-\beta)\, b_{1,0} = 0{,}1\,(95{,}8 - 96{,}3) + (1-0{,}1)\, 1{,}864 = 1{,}630$$

$$C_1 = \gamma\, \frac{X_1}{S_1} + (1-\gamma)\, C_{-3} = 0{,}05\, \frac{77{,}1}{95{,}8} + (1-0{,}05)\, 0{,}8918 = 0{,}8875$$

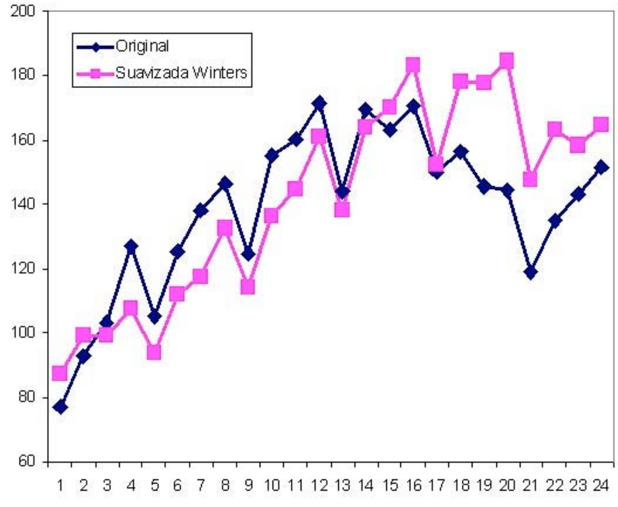
A partir del período 1, conociendo $S_1$ y $b_{1,1}$, se pueden realizar predicciones.

Para realizar la predicción $\hat{X}_{2/1}$, es decir, un período hacia delante $(m = 1)$, se utilizan $S_1$ y $b_{1,1}$, así como el valor inicial $C_{-2}$:

$$\hat{X}_{2/1} = (S_1 + b_{1,1} \,.\, 1)\, C_{-2} = (95,8 + 1,630 \,.\, 1) \,.\, 1,0172 = 99,1$$

A su vez, el factor estacional $C_1$, que se calcula anteriormente, se utilizará en la predicción del período cinco, que corresponde al primer trimestre de 1989.

| Períodos | Trimestre | $X_t$ | $S_t$ | $b_{1,t}$ | $C_t$ | $\hat{X}_{t/(t-1)}$ | $e_{t/(t-1)}$ | $e^2_{t/(t-1)}$ | $\lvert e_{t/(t-1)} \rvert$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -3 | | | | | 0,8918 | | | | |
| -2 | | | | | 1,0172 | | | | |
| -1 | | | | | 1,0165 | | | | |
| 0 | | | 96,3 | 1,864 | 1,0744 | | | | |
| 1 | Q1 1988 | 77,1 | 95,8 | 1,630 | 0,8875 | 87,5 | | | |
| 2 | Q2 1988 | 92,8 | 96,2 | 1,506 | 1,0146 | 99,1 | -6,3 | 39,8 | 6,3 |
| 3 | Q3 1988 | 103,2 | 98,5 | 1,583 | 1,0181 | 99,3 | 3,9 | 15,1 | 3,9 |
| 4 | Q4 1988 | 126,9 | 103,7 | 1,944 | 1,0819 | 107,5 | 19,4 | 376,7 | 19,4 |
| 5 | Q1 1989 | 105,1 | 108,2 | 2,200 | 0,8917 | 93,7 | 11,4 | 129,5 | 11,4 |
| 6 | Q2 1989 | 125,5 | 113,0 | 2,467 | 1,0194 | 112,0 | 13,5 | 182,9 | 13,5 |
| 7 | Q3 1989 | 138,2 | 119,5 | 2,872 | 1,0250 | 117,6 | 20,6 | 424,9 | 20,6 |
| 8 | Q4 1989 | 146,4 | 125,0 | 3,130 | 1,0864 | 132,4 | 14,0 | 194,6 | 14,0 |
| 9 | Q1 1990 | 124,8 | 130,5 | 3,366 | 0,8949 | 114,3 | 10,5 | 111,3 | 10,5 |
| 10 | Q2 1990 | 155,2 | 137,5 | 3,734 | 1,0248 | 136,5 | 18,7 | 351,4 | 18,7 |
| 11 | Q3 1990 | 160,3 | 144,3 | 4,036 | 1,0293 | 144,8 | 15,5 | 240,2 | 15,5 |
| 12 | Q4 1990 | 171,5 | 150,2 | 4,227 | 1,0892 | 161,1 | 10,4 | 107,2 | 10,4 |
| 13 | Q1 1991 | 144 | 155,8 | 4,356 | 0,8964 | 138,2 | 5,8 | 33,2 | 5,8 |
| 14 | Q2 1991 | 169,3 | 161,1 | 4,458 | 1,0261 | 164,1 | 5,2 | 27,2 | 5,2 |
| 15 | Q3 1991 | 163,2 | 164,2 | 4,317 | 1,0275 | 170,4 | -7,2 | 52,3 | 7,2 |
| 16 | Q4 1991 | 170,5 | 166,1 | 4,078 | 1,0860 | 183,5 | -13,0 | 169,4 | 13,0 |
| 17 | Q1 1992 | 150,1 | 169,6 | 4,023 | 0,8958 | 152,6 | -2,5 | 6,0 | 2,5 |
| 18 | Q2 1992 | 156,5 | 169,4 | 3,600 | 1,0210 | 178,2 | -21,7 | 470,8 | 21,7 |
| 19 | Q3 1992 | 145,7 | 166,8 | 2,976 | 1,0198 | 177,8 | -32,1 | 1029,9 | 32,1 |
| 20 | Q4 1992 | 144,5 | 162,4 | 2,242 | 1,0762 | 184,4 | -39,9 | 1588,9 | 39,9 |
| 21 | Q1 1993 | 119 | 158,3 | 1,605 | 0,8886 | 147,5 | -28,5 | 812,7 | 28,5 |
| 22 | Q2 1993 | 135,1 | 154,4 | 1,054 | 1,0137 | 163,3 | -28,2 | 793,0 | 28,2 |
| 23 | Q3 1993 | 143,2 | 152,4 | 0,753 | 1,0158 | 158,5 | -15,3 | 234,7 | 15,3 |
| 24 | Q4 1993 | 151,8 | 150,8 | 0,510 | 1,0727 | 164,9 | -13,1 | 170,5 | 13,1 |
| | | | | | | | | 7562,3 | 356,6 |



El proceso recursivo se continúa indefinidamente.

$$\text{RECM} = \sqrt{\frac{\sum_{t=2}^{T} e^2_{t/(t-1)}}{T-1}} = \sqrt{\frac{7562,3}{23}} = 18,13$$

$$\text{EAM} = \frac{\sum_{t=2}^{17} \left| e^2_{t/(t-1)} \right|}{17-1} = \frac{356,6}{23} = 15,50$$

Las predicciones para 1994 (Q1 1994, Q2 1994, Q3 1994, Q4 1994), períodos 25, 26, 27 y 28:

$$\hat{X}_{(t+m)/t} = (S_t + b_{1,t}\, m)\, C_{t+m-L}$$

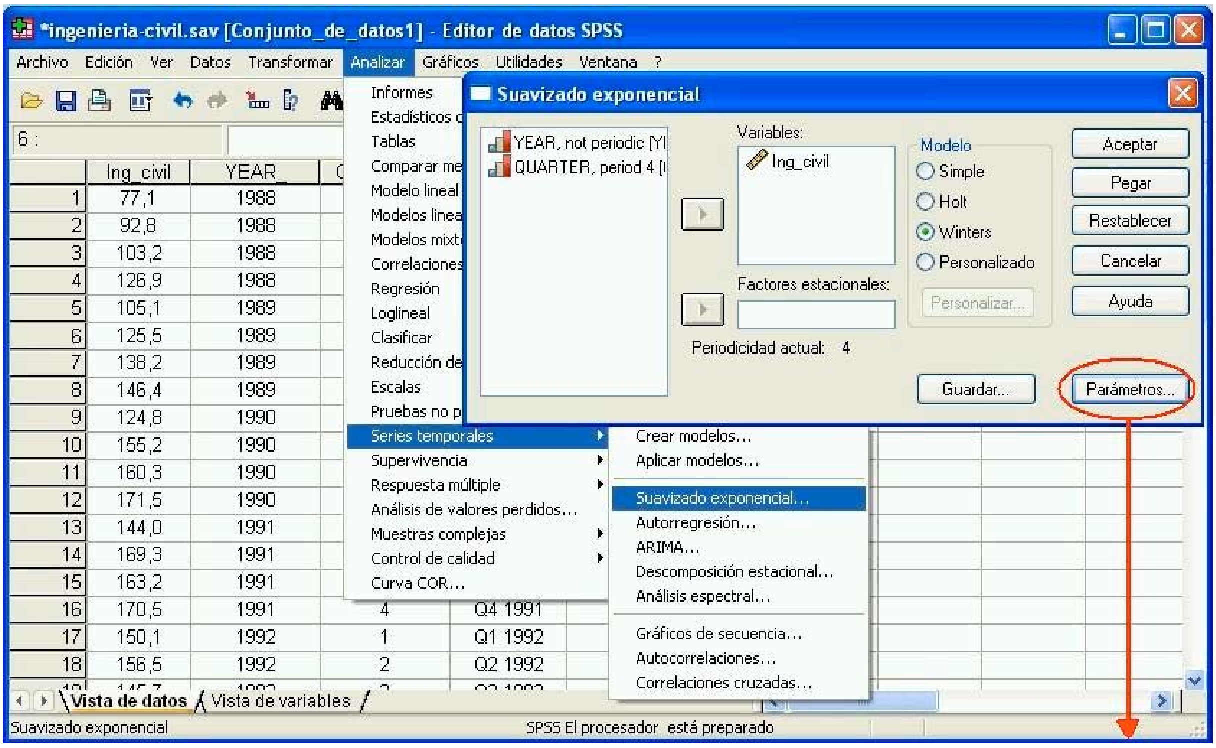
$$\hat{X}_{25/24} = (S_{24} + b_{1,24}\,.\,1)\, C_{21} = (150,8 + 0,510\,.\,1)\,.\,0,8886 = 134,4$$

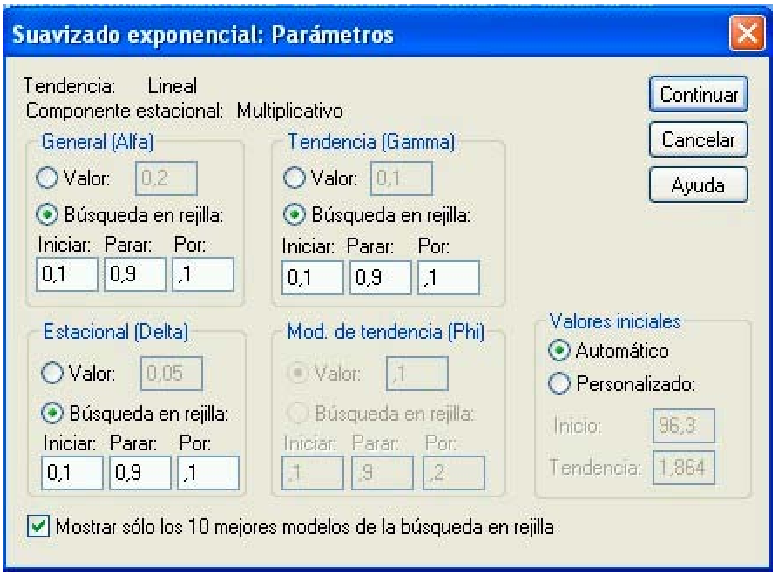
$$\hat{X}_{26/24} = (S_{24} + b_{1,24}\,.\,2)\, C_{22} = (150,8 + 0,510\,.\,2)\,.\,1,0137 = 153,9$$

$$\hat{X}_{27/24} = (S_{24} + b_{1,24}\,.\,3)\, C_{23} = (150,8 + 0,510\,.\,3)\,.\,1,0158 = 154,7$$

$$\hat{X}_{28/24} = (S_{24} + b_{1,24}\,.\,4)\, C_{24} = (150,8 + 0,510\,.\,4)\,.\,1,0727 = 163,9$$

El valor dado a los coeficientes $\alpha$ y $\beta$ puede influir de forma importante en la precisión de los estimadores. Con este motivo, se han analizado los datos anteriores con el SPSS para aplicar el método de Holt-Winters multiplicativo. Este programa permite realizar la búsqueda de los coeficientes con los que se obtiene el RECM más pequeño.






Para cada uno de los parámetros hay que indicar el valor máximo y el mínimo entre los que se realiza la búsqueda, así como el incremento dado entre cada valor y el siguiente.

En este caso, el intervalo de búsqueda para los tres parámetros ha sido $(0,1-0,9)$, el incremento seleccionado ha sido de 0,1.

**Sumas menores de los errores cuadráticos**

| Serie | Rango del modelo | Alpha (Nivel) | Gamma (Tendencia) | Delta (Estación) | Sumas de los errores cuadráticos |
|---|---|---|---|---|---|
| Ing_civil | 1 | ,90000 | ,30000 | ,10000 | 1559,38444 |
| | 2 | ,90000 | ,40000 | ,10000 | 1559,62934 |
| | 3 | ,90000 | ,30000 | ,20000 | 1575,53940 |
| | 4 | ,90000 | ,40000 | ,20000 | 1577,81427 |
| | 5 | ,90000 | ,50000 | ,10000 | 1580,06332 |
| | 6 | ,90000 | ,20000 | ,10000 | 1582,01641 |
| | 7 | ,90000 | ,30000 | ,30000 | 1593,33468 |
| | 8 | ,90000 | ,20000 | ,20000 | 1596,37788 |
| | 9 | ,90000 | ,40000 | ,30000 | 1598,17546 |
| | 10 | ,90000 | ,50000 | ,20000 | 1600,45017 |

**Parámetros del suavizado**

| Serie | Alpha (Nivel) | Gamma (Tendencia) | Delta (Estación) | Sumas de los errores cuadráticos | gl error |
|---|---|---|---|---|---|
| Ing_civil | ,90000 | ,30000 | ,10000 | 1559,38444 | 19 |

A continuación, se muestran los parámetros con las sumas menores de errores cuadráticos. Estos parámetros se utilizan para pronosticar.

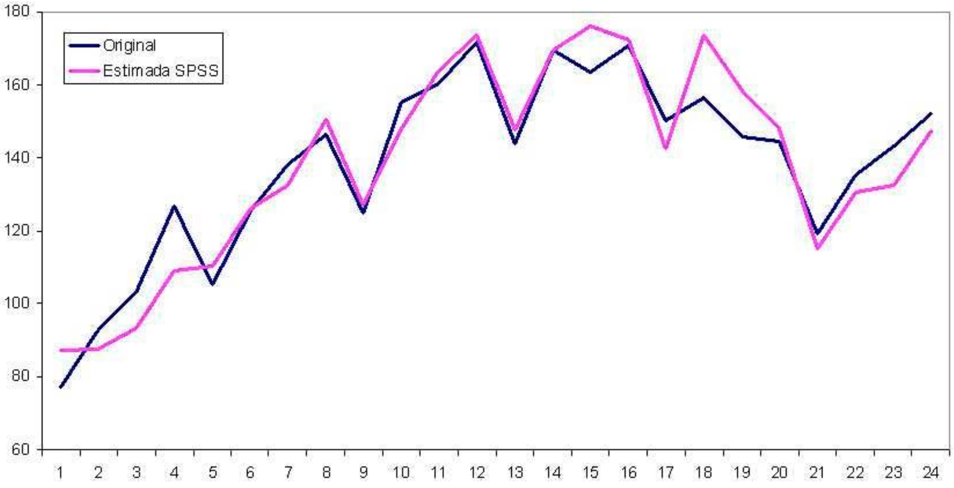
En la salida, los valores que minimizan el RECM son: $\alpha = 0,90$ , $\beta = 0,30$ , $\gamma = 0,10$

como puede verse el valor óptimo del coeficiente $\alpha$ para esta serie es muy elevado.

Se obtiene $\text{RECM} = \sqrt{\dfrac{\sum_{t=2}^{T} e^2_{t/(t-1)}}{T-1}} = \sqrt{\dfrac{1559,38444}{23}} = 8,23$

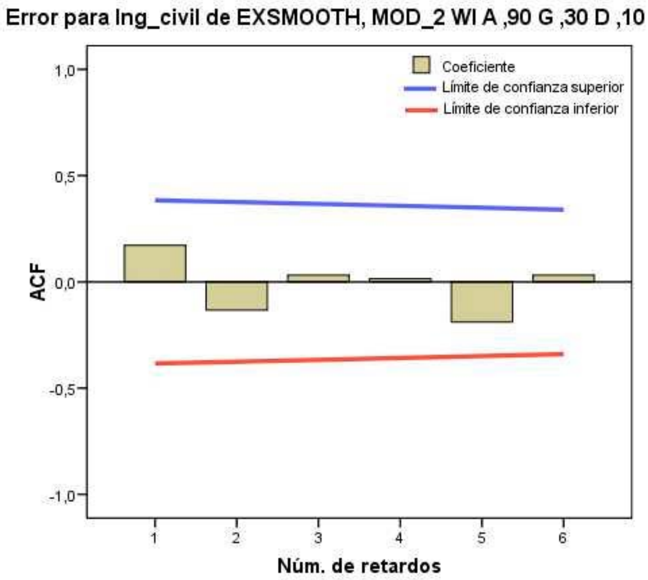
Con lo cual, la RECM ha pasado de un valor de 18,13 para valores de los parámetros elegidos arbitrariamente (aunque dentro de los límites aconsejados) a un valor de 8,23 para valores que minimizan la RECM. La disminución es muy considerable, por lo que es muy conveniente utilizar estos métodos de búsqueda en las aplicaciones prácticas mediante algún programa de ordenador.

El gráfico con valores observados y pronosticados con estos valores óptimos de parámetros:




Con el objeto de determinar si el método de Holt-Winters explica satisfactoriamente la parte sistemática de la evolución de la serie, se obtiene *la función de autocorrelación estimada (ACF) de los errores de predicción*.

Como la muestra es de 24 observaciones se calculan estos coeficientes para los 6 primeros retardos, debido a la pérdida de fiabilidad no conviene que el número de coeficientes calculado sea superior a 1/4 del tamaño muestral.




Los 6 coeficientes están dentro de la banda de confianza, por lo que a un nivel individual se rechaza la hipótesis de que cada uno de los coeficientes $\rho_s$ sea distinto de cero.

**Autocorrelaciones**

Serie: Error para Ing_civil de EXSMOOTH, MOD_2 WI A ,90 G ,30 D ,10

| Retardo | Autocorrelación | Error típico[a] | Estadístico de Box-Ljung Valor | gl | Sig.[b] |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ,172 | ,192 | ,805 | 1 | ,370 |
| 2 | -,133 | ,188 | 1,308 | 2 | ,520 |
| 3 | ,032 | ,183 | 1,337 | 3 | ,720 |
| 4 | ,015 | ,179 | 1,344 | 4 | ,854 |
| 5 | -,189 | ,174 | 2,514 | 5 | ,774 |
| 6 | ,032 | ,170 | 2,548 | 6 | ,863 |

a. El proceso subyacente asumido es la independencia (ruido blanco).

b. Basado en la aproximación chi cuadrado asintótica.

En el contraste global se plantean las hipótesis: $\begin{cases} H_0: \rho_1 = \rho_2 = \cdots = \rho_6 = 0 \\ H_1: \text{alguno no es nulo} \end{cases}$

El estadístico $Q^*$ de Box-Ljung: $Q^* = T(T-2)\sum_{h=1}^{M} \frac{1}{T-h} r_h^2$ (M $\equiv$ número coeficientes que se contrastan)

**Autocorrelaciones parciales**

Serie: Error para lng_civil de EXSMOOTH, MOD_2 WI A ,90 G ,30 D ,10

| Retardo | Autocorrelación parcial | Error típico |
|---|---|---|
| 1 | $r_1 =$ ,172 | ,204 |
| 2 | $r_2 =$ -,168 | ,204 |
| 3 | $r_3 =$ ,092 | ,204 |
| 4 | $r_4 =$ -,035 | ,204 |
| 5 | $r_5 =$ -,178 | ,204 |
| 6 | $r_6 =$ ,115 | ,204 |

$$Q^* = 24(24-2)\sum_{h=1}^{6} \frac{1}{T-h} r_h^2 = 2{,}875$$

puesto que $Q^* = 2{,}875 < 12{,}59 = \chi^2_{0,05\,;\,6}$ se acepta la hipótesis nula para un nivel de confianza del 95%.

En consecuencia, se puede concluir que el método de Holt-Winters explica razonablemente la parte sistemática de la serie, ya que los errores que se cometen en la predicción se aproximan a una variable de *ruido blanco* en el sentido de que no están correlacionados entre sí.

## MÉTODO DE HOLT-WINTERS: ESQUEMA ADITIVO

Recordar que el método de Holt-Winters está diseñado para realizar predicciones de series que sigan una tendencia aproximadamente lineal y, además, estén sometidas a la influencia del factor estacional.

El modelo teórico en el *método de Holt-Winters aditivo*: $X_t = (b_0 + b_1\, t) + E_t + \varepsilon_t$

En la versión aditiva se utilizan, como en la versión multiplicativa, tres ecuaciones de alisado para la obtención de las estimaciones de $b_0$, $b_1$ y $E_t$.

- Los valores iniciales, al igual que en el método multiplicativo, se obtienen mediante las ecuaciones:

$$b_{1,0} = \frac{\overline{X}_k - \overline{X}_1}{(k-1)\,L} \quad \textit{con } (k-1) \textit{ años y } L \textit{ períodos}$$

$$S_0 = \overline{X}_1 - \frac{L}{2}\, b_{1,0}$$

- El nivel $(b_0)$ se estima mediante la variable de alisado $S_t$ que viene dada por la *ecuación de nivel*:

$$S_t = \alpha\,(X_t - C_{t-L}) + (1-\alpha)\,(S_{t-1} + b_{1,(t-1)}) \qquad 0 < \alpha < 1$$

En esta ecuación $X_t$ se desestacionaliza *restándole* al factor estacional, mientras que en el método multiplicativo se desestacionaliza *dividiendo* por dicho factor.

➢ La pendiente $(b_1)$ se estima por la variable de alisado $b_{1,t}$ que viene dada por la *ecuación de la pendiente*:

$$b_{1,t} = \beta\,(S_t - S_{t-1}) + (1-\beta)\,b_{1,(t-1)} \qquad 0 < \beta < 1$$

esta ecuación coincide exactamente con la ecuación de la pendiente del método multiplicativo.

➢ El factor estacional $(E_t)$ se estima por la variable de alisado $C_t$ dada por la *ecuación del factor estacional*:

$$C_t = \gamma\,(X_t - S_t) + (1-\gamma)\,C_{t-L} \qquad 0 < \gamma < 1$$

La diferencia $(X_t - S_t)$ es una variable en la que la tendencia está eliminada, en mayor o menor grado.

Para hacer operativo el método de Holt-Winters en su versión aditiva se necesita conocer el mismo número de valores iniciales que en la versión multiplicativa.

Como valores iniciales de los coeficientes estacionales se toman generalmente los índices de variación estacional calculados por el *método de la diferencia a la media móvil*. Para la pendiente y la ordenada en el origen se pueden utilizar los mismos valores que en el método multiplicativo.

Con la información disponible en t se pueden realizar predicciones de 1 o más períodos en adelante. La fórmula genérica del predictor de m períodos en adelante viene dada por:

$$\hat{X}_{(t+m)/t} = (S_t + b_{1,t}\,m) + C_{t+m-L} \qquad 1 \le m \le L$$

**Práctica método aditivo de Holt-Winters:** Partiendo de la tabla de trabajo con los índices trimestrales de obras realizadas en ingeniería civil entre 1988-1993. Se trata de obtener la predicción de los cuatro trimestres de 1994 por el método aditivo de Holt-Winters.

| Trimestres | 1988 | 1989 | 1990 | 1991 | 1992 | 1993 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Primero | 77,1 | 105,1 | 124,8 | 144 | 150,1 | 119 |
| Segundo | 92,8 | 125,5 | 155,2 | 169,3 | 156,5 | 135,1 |
| Tercero | 103,2 | 138,2 | 160,3 | 163,2 | 145,7 | 143,2 |
| Cuarto | 126,9 | 146,4 | 171,5 | 170,5 | 144,5 | 151,8 |
| $\overline{X}_t$ | *100* | *128,8* | *152,95* | *161,75* | *149,2* | *137,275* |

Antes de comenzar con el método de Holt-Winters se requiere conocer los valores iniciales de los factores estacionales obtenidos al aplicar el método de las diferencias a la media móvil.

Para ello, se aplica el método aditivo de las medias móviles: $X_t = E_t + (T_t + C_t) + A_t$, con el objetivo de estimar el componente estacional $E_t$

*Cálculo de los Índices de variación estacional:*

**SERIE NO CENTRADA DE MEDIAS MÓVILES**

| Trimestres | 1988 | 1989 | 1990 | 1991 | 1992 | 1993 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1º - 2º | --------- | 123,9 | 146,7 | 162,0 | 155,7 | 135,5 |
| 2º - 3º | 100,0 | 128,8 | 153,0 | 161,8 | 149,2 | 137,3 |
| 3º - 4º | 107,0 | 133,7 | 157,8 | 163,3 | 141,4 | --------- |
| 4º - 1º | 115,2 | 141,2 | 161,3 | 160,1 | 136,1 | --------- |

**SERIE CENTRADA DE MEDIAS MÓVILES**

| Trimestres | 1988 | 1989 | 1990 | 1991 | 1992 | 1993 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Primero | --------- | 119,6 | 143,9 | 161,6 | 157,9 | 135,8 |
| Segundo | --------- | 126,4 | 149,8 | 161,9 | 152,5 | 136,4 |
| Tercero | 103,5 | 131,3 | 155,4 | 162,5 | 145,3 | --------- |
| Cuarto | 111,1 | 137,4 | 159,5 | 161,7 | 138,8 | --------- |

| **Excel** | | | STC_1 + ERR-1 | | | SAF_1 | SAS_1 = $X_t$ - SAF_1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Trimestre | $X_t$ = T + E + C + A | Medias móviles descentrada T + C | Medias móviles centrada T + C | E + A = $X_t$ - (T + C) | IBVE | IBVE normalizado IVE ($E_t$) | SERIE DESESTACIONALIZADA $X_t$ - IVE |
| Q1 1988 | 77,1 | --------- | --------- | --------- | -15,1500 | -15,2994 | 92,40 |
| Q2 1988 | 92,8 | 100,0 | --------- | --------- | 2,9475 | 2,7981 | 90,00 |
| Q3 1988 | 103,2 | 107,0 | 103,5 | -0,3000 | 2,5325 | 2,3831 | 100,82 |
| Q4 1988 | 126,9 | 115,2 | 111,1 | 15,8125 | 10,2675 | 10,1181 | 116,78 |
| Q1 1989 | 105,1 | 123,9 | 119,6 | -14,4500 | -15,1500 | -15,2994 | 120,40 |
| Q2 1989 | 125,5 | 128,8 | 126,4 | -0,8625 | 2,9475 | 2,7981 | 122,70 |
| Q3 1989 | 138,2 | 133,7 | 131,3 | 6,9375 | 2,5325 | 2,3831 | 135,82 |
| Q4 1989 | 146,4 | 141,2 | 137,4 | 8,9625 | 10,2675 | 10,1181 | 136,28 |
| Q1 1990 | 124,8 | 146,7 | 143,9 | -19,1125 | -15,1500 | -15,2994 | 140,10 |
| Q2 1990 | 155,2 | 153,0 | 149,8 | 5,3875 | 2,9475 | 2,7981 | 152,40 |
| Q3 1990 | 160,3 | 157,8 | 155,4 | 4,9500 | 2,5325 | 2,3831 | 157,92 |
| Q4 1990 | 171,5 | 161,3 | 159,5 | 11,9875 | 10,2675 | 10,1181 | 161,38 |
| Q1 1991 | 144 | 162,0 | 161,6 | -17,6375 | -15,1500 | -15,2994 | 159,30 |
| Q2 1991 | 169,3 | 161,8 | 161,9 | 7,4250 | 2,9475 | 2,7981 | 166,50 |
| Q3 1991 | 163,2 | 163,3 | 162,5 | 0,6875 | 2,5325 | 2,3831 | 160,82 |
| Q4 1991 | 170,5 | 160,1 | 161,7 | 8,8250 | 10,2675 | 10,1181 | 160,38 |
| Q1 1992 | 150,1 | 155,7 | 157,9 | -7,7875 | -15,1500 | -15,2994 | 165,40 |
| Q2 1992 | 156,5 | 149,2 | 152,5 | 4,0500 | 2,9475 | 2,7981 | 153,70 |
| Q3 1992 | 145,7 | 141,4 | 145,3 | 0,3875 | 2,5325 | 2,3831 | 143,32 |
| Q4 1992 | 144,5 | 136,1 | 138,8 | 5,7500 | 10,2675 | 10,1181 | 134,38 |
| Q1 1993 | 119 | 135,5 | 135,8 | -16,7625 | -15,1500 | -15,2994 | 134,30 |
| Q2 1993 | 135,1 | 137,3 | 136,4 | -1,2625 | 2,9475 | 2,7981 | 132,30 |
| Q3 1993 | 143,2 | --------- | --------- | --------- | 2,5325 | 2,3831 | 140,82 |
| Q4 1993 | 151,8 | --------- | --------- | --------- | 10,2675 | 10,1181 | 141,68 |

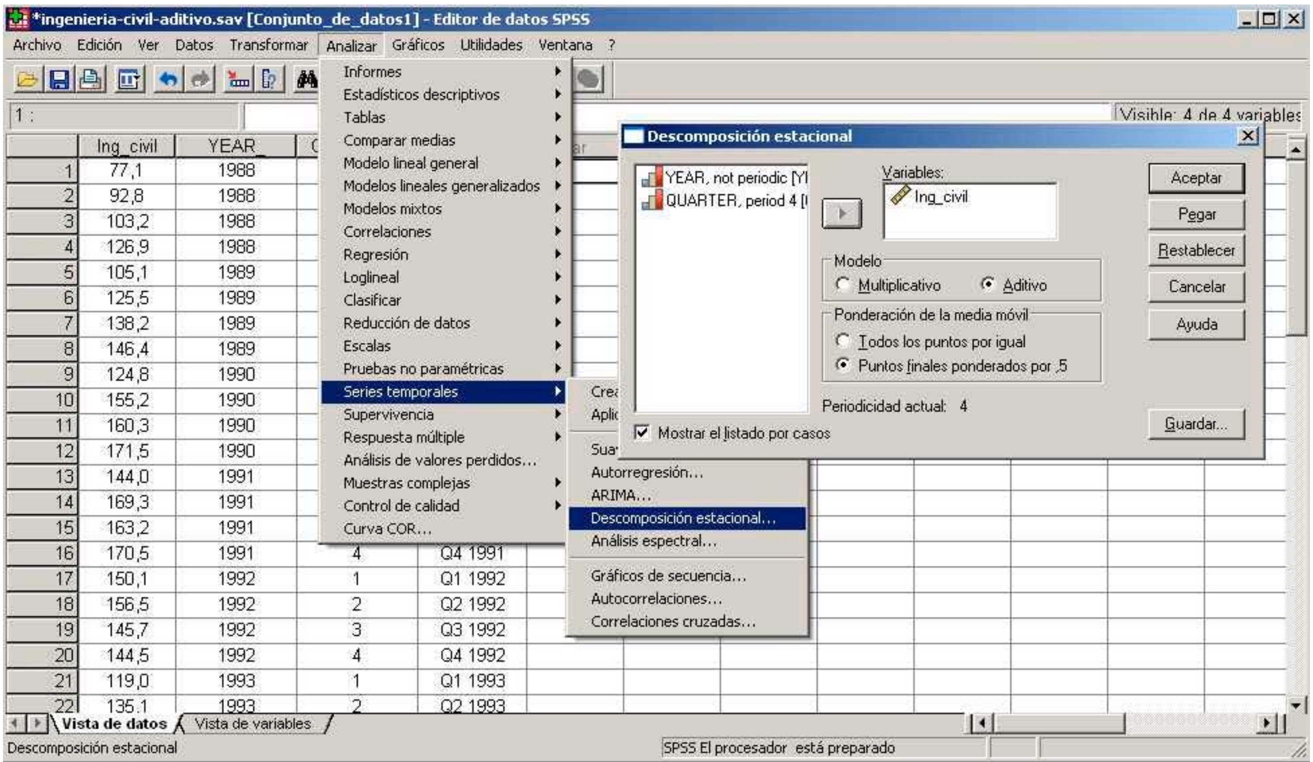
**SERIE COMPONENTES ESTACIONAL Y ACCIDENTAL**

| Trimestres | 1988 | 1989 | 1990 | 1991 | 1992 | 1993 | **IBVE** | **IVE** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Primero | --------- | -14,45 | -19,11 | -17,64 | -7,79 | -16,76 | -15,1500 | -15,2994 |
| Segundo | --------- | -0,86 | 5,39 | 7,43 | 4,05 | -1,26 | 2,9475 | 2,7981 |
| Tercero | -0,30 | 6,94 | 4,95 | 0,69 | 0,39 | --------- | 2,5325 | 2,3831 |
| Cuarto | 15,81 | 8,96 | 11,99 | 8,82 | 5,75 | --------- | 10,2675 | 10,1181 |
| | | | | | | | 0,5975 | 0,0000 |

**SERIE DESESTACIONALIZADA:** $X_t - IVE = (T + E + C + A) - IVE$

| Trimestres | 1988 | 1989 | 1990 | 1991 | 1992 | 1993 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Primero | 86,5 | 117,9 | 139,9 | 161,5 | 168,3 | 133,4 |
| Segundo | 91,2 | 123,4 | 152,6 | 166,4 | 153,8 | 132,8 |
| Tercero | 101,5 | 136,0 | 157,7 | 160,5 | 143,3 | 140,9 |
| Cuarto | 118,1 | 136,3 | 159,6 | 158,7 | 134,5 | 141,3 |

Utilizando el SPSS para aplicar el método de las medias móviles:



*ingenieria-civil-aditivo.sav [Conjunto_de_datos1] - Editor de datos SPSS

Archivo Edición Ver Datos Transformar Analizar Gráficos Utilidades Ventana ?

Ing_civil | Visible: 8 de 8 variab

| | Ing_civil | YEAR_ | QUARTER_ | DATE_ | ERR_1 | SAS_1 | SAF_1 | STC_1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 77,1 | 1988 | 1 | Q1 1988 | 2,3913 | 92,40 | -15,2994 | 90,0081 |
| 2 | 92,8 | 1988 | 2 | Q2 1988 | -4,4042 | 90,00 | 2,7981 | 94,4060 |
| 3 | 103,2 | 1988 | 3 | Q3 1988 | -2,3850 | 100,82 | 2,3831 | 103,2019 |
| 4 | 126,9 | 1988 | 4 | Q4 1988 | 5,0617 | 116,78 | 10,1181 | 111,7202 |
| 5 | 105,1 | 1989 | 1 | Q1 1989 | ,7550 | 120,40 | -15,2994 | 119,6444 |
| 6 | 125,5 | 1989 | 2 | Q2 1989 | -3,2539 | 122,70 | 2,7981 | 125,9558 |
| 7 | 138,2 | 1989 | 3 | Q3 1989 | 4,0483 | 135,82 | 2,3831 | 131,7685 |
| 8 | 146,4 | 1989 | 4 | Q4 1989 | -1,0272 | 136,28 | 10,1181 | 137,3091 |
| 9 | 124,8 | 1990 | 1 | Q1 1990 | -3,3894 | 140,10 | -15,2994 | 143,4888 |
| 10 | 155,2 | 1990 | 2 | Q2 1990 | 2,3017 | 152,40 | 2,7981 | 150,1002 |
| 11 | 160,3 | 1990 | 3 | Q3 1990 | 2,2817 | 157,92 | 2,3831 | 155,6352 |
| 12 | 171,5 | 1990 | 4 | Q4 1990 | 1,6617 | 161,38 | 10,1181 | 159,7202 |
| 13 | 144,0 | 1991 | 1 | Q1 1991 | -2,0783 | 159,30 | -15,2994 | 161,3777 |
| 14 | 169,3 | 1991 | 2 | Q2 1991 | 4,1128 | 166,50 | 2,7981 | 162,3891 |
| 15 | 163,2 | 1991 | 3 | Q3 1991 | -1,5072 | 160,82 | 2,3831 | 162,3241 |
| 16 | 170,5 | 1991 | 4 | Q4 1991 | -1,1494 | 160,38 | 10,1181 | 161,5313 |
| 17 | 150,1 | 1992 | 1 | Q1 1992 | 6,6772 | 165,40 | -15,2994 | 158,7222 |
| 18 | 156,5 | 1992 | 2 | Q2 1992 | 1,1128 | 153,70 | 2,7981 | 152,5891 |
| 19 | 145,7 | 1992 | 3 | Q3 1992 | -1,7739 | 143,32 | 2,3831 | 145,0908 |
| 20 | 144,5 | 1992 | 4 | Q4 1992 | -3,8828 | 134,38 | 10,1181 | 138,2647 |
| 21 | 119,0 | 1993 | 1 | Q1 1993 | -1,3006 | 134,30 | -15,2994 | 135,5999 |
| 22 | 135,1 | 1993 | 2 | Q2 1993 | -3,6094 | 132,30 | 2,7981 | 135,9113 |
| 23 | 143,2 | 1993 | 3 | Q3 1993 | 2,5500 | 140,82 | 2,3831 | 138,2669 |
| 24 | 151,8 | 1993 | 4 | Q4 1993 | 2,2372 | 141,68 | 10,1181 | 139,4447 |

Vista de datos / Vista de variables

SPSS El procesador está preparado

NOTA.- *SPSS antes de hacer la media elimina los IBVE mayor y menor, es decir, calcula el valor medio en lugar de la media, puede utilizar también la mediana. En definitiva, se trata de utilizar una medida que mitigue el efecto que pueden causar períodos con comportamiento extremo.*
*Los coeficientes estacionales no tienen por qué ser fijos en el tiempo. De ahí que se tomen como factores estacionales el resultado de realizar una media móvil para los IBVE de cada estación, e incluso una regresión lineal sobre cada conjunto de IBVE en cada estación.*

Obtenidos los factores estacionales: $E_1 = -15,2994$ , $E_2 = 2,7981$ , $E_3 = 2,3831$ , $E_4 = 10,1181$

Se procede a la aplicación del método Holt-Winters aditivo, tomando $\alpha = 0,20$, $\beta = 0,10$ y $\gamma = 0,05$

- Los valores iniciales de $S$ y $b_1$ se obtienen de la misma forma que en el método multiplicativo, aplicando las ecuaciones:

$$b_{1,0} = \frac{\overline{X}_k - \overline{X}_1}{(k-1)\,L} = \frac{\overline{X}_{1993} - \overline{X}_{1988}}{(6-1)\,.\,4} = \frac{137,275 - 100}{5\,.\,4} = 1,864 \quad k \text{ años y } L \text{ períodos (trimestres)}$$

$$S_0 = \overline{X}_1 - \frac{L}{2}\, b_{1,0} = 100 - \frac{4}{2}\,.\,1,864 = 96,3$$

- Los valores iniciales $\left[ C_{m-L} = E_m = IVE_m \right]$, $t = 0$, $1 \le m \le L$, de los factores estacionales obtenidos al aplicar el método de la razón a la media móvil:

$$C_{-3} = E_1 = -15,2294 \;,\; C_{-2} = E_2 = 2,7981 \;,\; C_{-1} = E_3 = 2,3831 \;,\; C_0 = E_4 = 10,1181$$

- En el *período 1* se obtienen los estadísticos $S_1$, $b_{1,0}$ y $C_1$ utilizando, respectivamente, las fórmulas:

$$S_t = \alpha\,(X_t - C_{t-L}) + (1-\alpha)\,(S_{t-1} + b_{1,(t-1)})$$
$$b_{1,t} = \beta\,(S_t - S_{t-1}) + (1-\beta)\,b_{1,(t-1)}$$
$$C_t = \gamma\,(X_t - S_t) + (1-\gamma)\,C_{t-L}$$

$$S_1 = \alpha\,(X_1 - C_{1-4}) + (1-\alpha)\,(S_{1-1} + b_{1,(1-1)}) = 0{,}2\,(77{,}1 + 15{,}2294) + (1-0{,}2)\,(96{,}3 + 1{,}864) = 96{,}3$$

$$b_{1,1} = \beta\,(S_1 - S_{1-1}) + (1-\beta)\,b_{1,(1-1)} = 0{,}1\,(97 - 96{,}3) + (1-0{,}1)\,1{,}864 = 1{,}746$$

$$C_1 = \gamma\,(X_1 - S_1) + (1-\gamma)\,C_{1-4} = 0{,}05\,(77{,}1 - 97) + (1-0{,}05)\,(-15{,}2294) = -15{,}46293$$

Las predicciones vienen dadas por la fórmula: $\hat{X}_{(t+m)/t} = (S_t + b_{1,t}\ m) + C_{t+m-L} \qquad 1 \le m \le L$

$$\hat{X}_{(1+1)/1} = (S_1 + b_{11}\ 1)\,C_{1+1-4} = (97 + 1{,}746) + 2{,}7981 = 101{,}5$$

- A partir del *período 1*, el proceso recursivo se continúa de forma indefinida mientras que se disponga de nuevos datos de la variable X. En la siguiente tabla se recogen los cálculos para el período muestral.

| Períodos | Trimestre | $X_t$ | $S_t$ | $b_{1,t}$ | $C_t$ | $\hat{X}_{t/(t-1)}$ | $e_{t/(t-1)}$ | $e^2_{t/(t-1)}$ | $\lvert e_{t/(t-1)} \rvert$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -3 | | | | | -15,2294 | | | | |
| -2 | | | | | 2,7981 | | | | |
| -1 | | | | | 2,3831 | | | | |
| 0 | | | 96,30 | 1,8640 | 10,1181 | | | | |
| 1 | Q1 1988 | 77,1 | 97,00 | 1,7460 | -15,3855 | | | | |
| 2 | Q2 1988 | 92,8 | 97,0 | 1,5711 | 2,4483 | 101,5 | -8,7 | 76,5 | 8,7 |
| 3 | Q3 1988 | 103,2 | 99,0 | 1,6161 | 2,4730 | 101,0 | 2,2 | 5,1 | 2,2 |
| 4 | Q4 1988 | 126,9 | 103,9 | 1,9390 | 10,7640 | 110,8 | 16,1 | 260,8 | 16,1 |
| 5 | Q1 1989 | 105,1 | 108,7 | 2,2327 | -14,7982 | 90,4 | 14,7 | 215,6 | 14,7 |
| 6 | Q2 1989 | 125,5 | 113,4 | 2,4743 | 2,9315 | 113,4 | 12,1 | 145,9 | 12,1 |
| 7 | Q3 1989 | 138,2 | 119,8 | 2,8716 | 3,2676 | 118,3 | 19,9 | 394,6 | 19,9 |
| 8 | Q4 1989 | 146,4 | 125,3 | 3,1302 | 11,2812 | 133,5 | 12,9 | 167,2 | 12,9 |
| 9 | Q1 1990 | 124,8 | 130,7 | 3,3537 | -14,3512 | 113,6 | 11,2 | 124,9 | 11,2 |
| 10 | Q2 1990 | 155,2 | 137,7 | 3,7188 | 3,6618 | 136,9 | 18,3 | 333,3 | 18,3 |
| 11 | Q3 1990 | 160,3 | 144,5 | 4,0318 | 3,8937 | 144,6 | 15,7 | 244,9 | 15,7 |
| 12 | Q4 1990 | 171,5 | 150,9 | 4,2653 | 11,7482 | 159,8 | 11,7 | 136,3 | 11,7 |
| 13 | Q1 1991 | 144 | 155,8 | 4,3295 | -14,2229 | 140,8 | 3,2 | 10,3 | 3,2 |
| 14 | Q2 1991 | 169,3 | 161,2 | 4,4399 | 3,8827 | 163,8 | 5,5 | 30,5 | 5,5 |
| 15 | Q3 1991 | 163,2 | 164,4 | 4,3129 | 3,6395 | 169,6 | -6,4 | 40,4 | 6,4 |
| 16 | Q4 1991 | 170,5 | 166,7 | 4,1139 | 11,3502 | 180,4 | -9,9 | 99,0 | 9,9 |
| 17 | Q1 1992 | 150,1 | 169,5 | 3,9838 | -14,4830 | 156,6 | -6,5 | 42,3 | 6,5 |
| 18 | Q2 1992 | 156,5 | 169,3 | 3,5660 | 3,0471 | 177,4 | -20,9 | 436,5 | 20,9 |
| 19 | Q3 1992 | 145,7 | 166,7 | 2,9493 | 2,4061 | 176,5 | -30,8 | 950,9 | 30,8 |
| 20 | Q4 1992 | 144,5 | 162,4 | 2,2187 | 9,8890 | 181,0 | -36,5 | 1334,4 | 36,5 |
| 21 | Q1 1993 | 119 | 158,4 | 1,5965 | -15,7273 | 150,1 | -31,1 | 967,7 | 31,1 |
| 22 | Q2 1993 | 135,1 | 154,4 | 1,0383 | 1,9305 | 163,0 | -27,9 | 779,2 | 27,9 |
| 23 | Q3 1993 | 143,2 | 152,5 | 0,7457 | 1,8210 | 157,8 | -14,6 | 214,0 | 14,6 |
| 24 | Q4 1993 | 151,8 | 151,0 | 0,5191 | 9,4358 | 163,1 | -11,3 | 128,4 | 11,3 |
| | | | | | | | | 7138,4 | 348,2 |

A partir de las dos últimas columnas:

$$\text{RECM}=\sqrt{\frac{\sum_{t=2}^{T} e^2_{t/(t-1)}}{T-1}}=\sqrt{\frac{7138,4}{23}}=17,61 \qquad \text{EAM}=\frac{\sum_{t=2}^{T}\left| e_{t/(t-1)}\right|}{T-1}=\frac{348,2}{23}=15,14$$

En esta serie, utilizando los mismos parámetros ($\alpha=0,20$, $\beta=0,10$ y $\gamma=0,05$), el *método multiplicativo* ofrece peores resultados que el *método aditivo*, en el sentido de que tanto la *RECM como el EAM son menores en el método aditivo*.

- A partir de las variables de alisado $S_{24}=151$ , $b_{24}=0,5191$ , $C_{21}=-15,7273$, $C_{22}=1,9305$, $C_{23}=1,8210$ y $C_{24}=9,4358$ , se hacen las predicciones para 1994 (Q1 1994, Q2 1994, Q3 1994, Q4 1994), períodos 25, 26, 27 y 28, con un período hacia adelante:

$$\hat{X}_{(t+m)/t}=(S_t+b_{1,t}\,m)+C_{t+m-L}$$

$$\hat{X}_{25/24}=(S_{24}+b_{1,24}\,.\,1)+C_{21}=(151+0,5191\,.\,1)+(-15,7273)=135,8$$

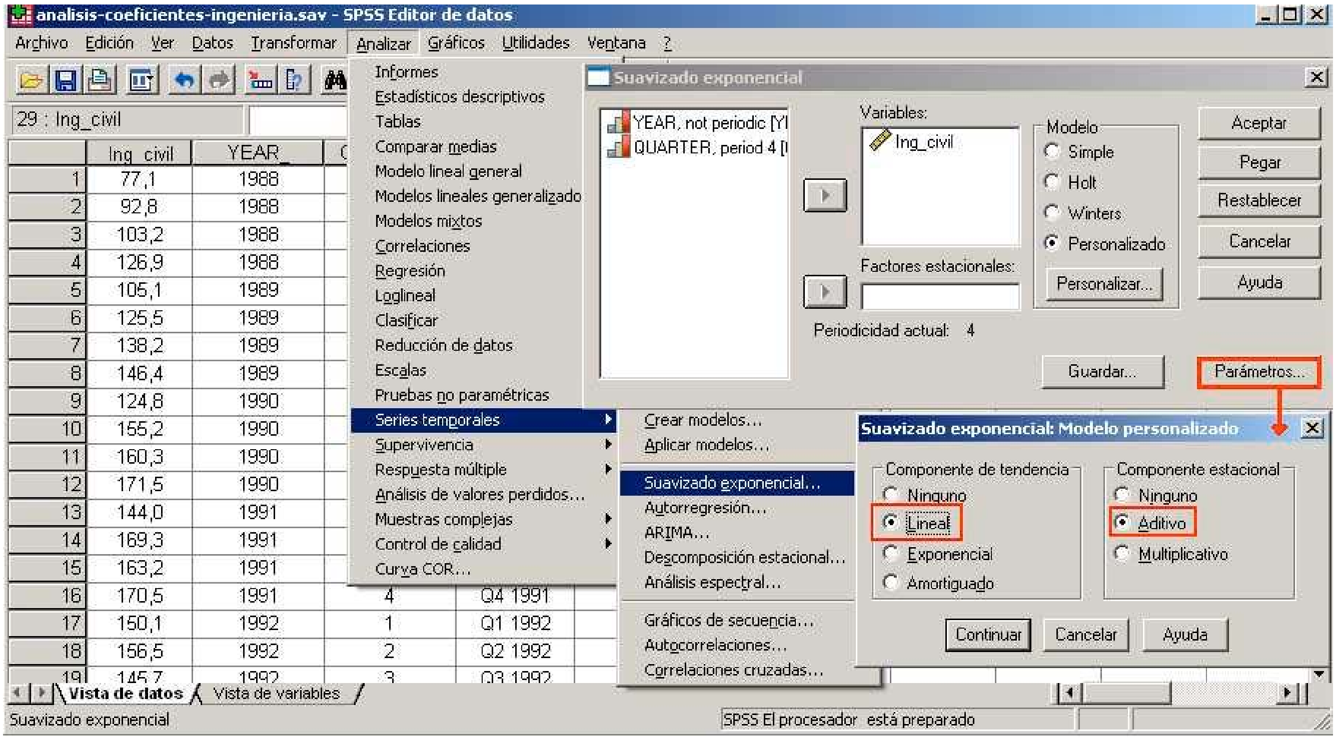
$$\hat{X}_{26/24}=(S_{24}+b_{1,24}\,.\,2)+C_{22}=(151+0,5191\,.\,2)+1,9305=154$$

$$\hat{X}_{27/24}=(S_{24}+b_{1,24}\,.\,3)+C_{23}=(151+0,5191\,.\,3)+1,8210=154,4$$

$$\hat{X}_{28/24}=(S_{24}+b_{1,24}\,.\,4)+C_{24}=(151+0,5191\,.\,4)+9,4358=162,5$$

Las predicciones obtenidas para 1994 obtenidas con las dos versiones (multiplicativo, aditivo) del método de Holt-Winters difieren poco entre sí, encontrándose muy alejadas de las predicciones obtenidas cuando se aplica el IVE conjuntamente con predicciones de la tendencia, obtenidas a partir del ajuste de una recta a la serie desestacionalizada.

- El valor dado a los coeficientes $\alpha$ y $\beta$ puede influir de forma importante en la precisión de los estimadores. Con este motivo, se han analizan los datos de la serie con el SPSS para aplicar el método de Holt-Winters aditivo. Este programa permite realizar la búsqueda de los coeficientes con los que se obtiene el RECM más pequeño.





Para cada uno de los parámetros hay que indicar el valor máximo y el mínimo entre los que se realiza la búsqueda, así como el incremento dado entre cada valor y el siguiente.

En este caso, el intervalo de búsqueda para los tres parámetros ha sido $(0,1-0,9)$, el incremento seleccionado ha sido de 0,1.

**Parámetros del suavizado**

| Serie | Alpha (Nivel) | Gamma (Tendencia) | Delta (Estación) | Sumas de los errores cuadráticos | gl error |
|---|---|---|---|---|---|
| Ing_civil | ,90000 | ,40000 | ,10000 | 1240,86645 | 19 |

A continuación, se muestran los parámetros con las sumas menores de errores cuadráticos. Estos parámetros se utilizan para pronosticar.

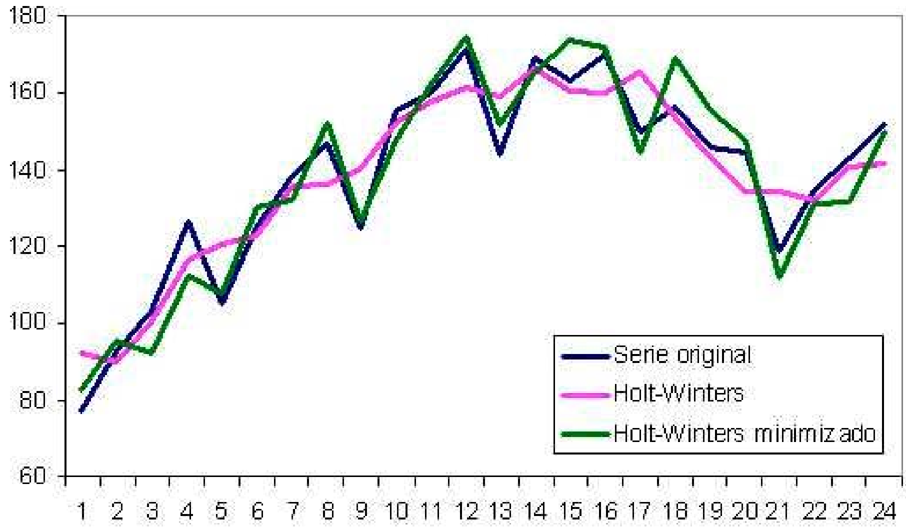
Los valores que minimizan RECM:

$\alpha = 0,90 \quad \beta = 0,40 \quad \gamma = 0,10$

El valor óptimo del coeficiente $\alpha$ para esta serie es muy elevado.

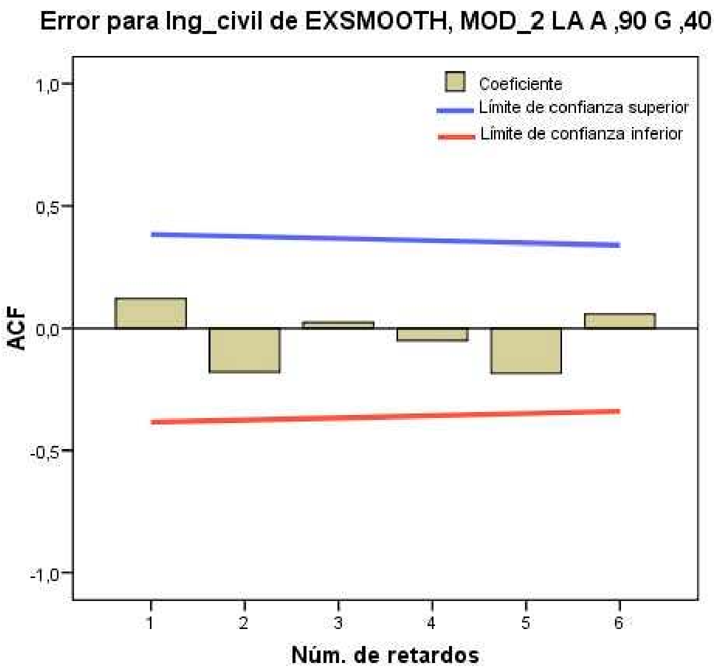
$$RECM = \sqrt{\frac{\sum_{t=2}^{T} e^2_{t/(t-1)}}{T-1}} = \sqrt{\frac{1240,86645}{23}} = 7,345 \quad \text{(menor que en el caso multiplicativo)}$$

En la siguiente gráfica se representa la serie original y las series pronosticadas (con los distintos valores analizados para la RECM) según el método aditivo de Holt-Winters:




Con objeto de determinar si el método de Holt-Winters explica satisfactoriamente la parte sistemática de la evolución de la serie, se obtiene *la función de autocorrelación estimada (ACF) de los errores de predicción*.

Como la muestra es de 24 observaciones se calculan estos coeficientes para los 6 primeros retardos, debido a la pérdida de fiabilidad no conviene que el número de coeficientes calculado sea superior a 1/4 del tamaño muestral.




Los 6 coeficientes están dentro de la banda de confianza, por lo que a un nivel individual se rechaza la hipótesis de que cada uno de los coeficientes $\rho_s$ sea distinto de cero.

**Autocorrelaciones**

Serie: Error para Ing_civil de EXSMOOTH, MOD_2 LA A ,90 G ,40 D ,10

| Retardo | Autocorrelación | Error típico[a] | Estadístico de Box-Ljung Valor | gl | Sig.[b] |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ,121 | ,192 | ,400 | 1 | ,527 |
| 2 | -,179 | ,188 | 1,310 | 2 | ,519 |
| 3 | ,024 | ,183 | 1,327 | 3 | ,723 |
| 4 | -,051 | ,179 | 1,407 | 4 | ,843 |
| 5 | -,183 | ,174 | 2,509 | 5 | ,775 |
| 6 | ,058 | ,170 | 2,626 | 6 | ,854 |

a. El proceso subyacente asumido es la independencia (ruido blanco).

b. Basado en la aproximación chi cuadrado asintótica.

En el contraste global se plantean las hipótesis: $\begin{cases} H_0: \ \rho_1 = \rho_2 = \cdots = \rho_6 = 0 \\ H_1: \ \text{alguno no es nulo} \end{cases}$

El estadístico $Q^*$ de Box-Ljung: $Q^* = T(T-2)\sum_{h=1}^{M} \frac{1}{T-h} r_h^2$ (M $\equiv$ número coeficientes que se contrastan)

**Autocorrelaciones parciales**

Serie: Error para Ing_civil de EXSMOOTH, MOD_2 LA A ,90 G ,40 D ,10

| Retardo | Autocorrelación parcial | Error típico |
|---|---|---|
| 1 | $r_1 =$ ,121 | ,204 |
| 2 | $r_2 =$ -,197 | ,204 |
| 3 | $r_3 =$ ,078 | ,204 |
| 4 | $r_4 =$ -,108 | ,204 |
| 5 | $r_5 =$ -,149 | ,204 |
| 6 | $r_6 =$ ,085 | ,204 |

$$Q^* = 24(24-2)\sum_{h=1}^{6} \frac{1}{T-h} r_h^2 = 2,577$$

puesto que $Q^* = 2,557 < 12,59 = \chi^2_{0,05\,;\,6}$ se acepta la hipótesis nula para un nivel de confianza del 95%.

Se puede concluir que el método de Holt-Winters explica razonablemente la parte sistemática de la serie, ya que los errores que se cometen en la predicción se aproximan a una variable de *ruido blanco* en el sentido de que no están correlacionados entre sí.

En consecuencia, el método de Holt-Winters en el esquema aditivo permite conseguir mejores resultados que en la versión multiplicativa, aunque con diferencias muy pequeñas.

Hoja nº ..................

Universidad Autónoma de Madrid

Asignatura ............................................................................ Grupo ...............................

Apellidos ............................................................................ Nombre ....................................

Ejercicio del día ...............................................................................................................

(IMPRESO EN PAPEL RECICLADO)

UNICAMENTE PARA USO ESCOLAR

Hoja nº ..................

Universidad Autónoma de Madrid

Asignatura ........................................................................................ Grupo ..............................

Apellidos ........................................................................................ Nombre ..............................

Ejercicio del día ........................................................................................

UNICAMENTE PARA USO ESCOLAR (IMPRESO EN PAPEL RECICLADO)

Instrumentos Estadísticos Avanzados
Facultad Ciencias Económicas y Empresariales
Departamento de Economía Aplicada
Profesor: Santiago de la Fuente Fernández