PROGRAMACIÓN LINEAL

- **Introducción**
- **Modelo Abstracto. Aplicaciones**
- **Problemas de dietas**
- **Problema de transporte y transbordo**
- **Método del Simplex. Método de Karmarkar.**
- **Cálculo de la solución óptima de un problema de transporte. Método de la esquina N.O.**
- **Problema del transbordo**
- **Problema de asignación. Solución óptima con el método húngaro.**
- **Método penalizaciones: Método de Vogel**
- **Método Modi: Prueba de Optimalidad**

PROGRAMACIÓN LINEAL

- **Introducción**
- **Modelo Abstracto. Aplicaciones**
- **Problemas de dietas**
- **Problema de transporte y transbordo**
- **Método del Simplex. Método de Karmarkar.**

🕮 PROGRAMACIÓN LINEAL

INTRODUCCIÓN: La Programación Lineal como ahora se formula y sus aplicaciones a los numerosos problemas reales que se plantean en la industria, economía, actividades militares, etc., no fue conocido hasta 1947, aunque anteriormente algunos matemáticos se habían ocupado del modelo, así se debe citar a Fourier en 1823 y al matemático ruso Kantorovich, éste llebava varios años dedicado a su estudio, publica en 1939 una extensa monografía: *Mathematical methods in the organization and planning of Production*, señaladando que hay dos procedimientos para aumentar la rentabilidad de una empresa:

- **Modificando los procesos tecnológicos, por renovación de maquinaria.**
- **Por una planificación de la producción, ésto es distribución de trabajo entre individuos o maquinarias de forma que el rendimiento sea máximo.**

La introducción de la Programación Lineal en Economía es muy antigua, ya que es lógico pensar que comienza cuando los economistas empiezan a presentar *Modelos Económicos* en forma matemática; uno de los primeros trabajos se encuentra en 1758 en la Tabla de Quesnay (diagrama que explica los flujos de dinero y de bienes que constituyen el núcleo básico de una economía. Léon Walras propone en 1874 un modelo matemático, siendo los coeficientes de las ecuaciones de restricción coeficientes tecnológicos, pero hasta 1930 los trabajos sobre esta meteria son relativamente escasos.

La mayor parte de los economistas matemáticos se ocuparon del análisis de problemas teóricos asociados con la posibilidad de equlibrio exonómico y su eficiencia frenta a condiciones competititas o monopolísticas. Para este esdudio de condicones de estabilización creyeron más útil tuilizar las funciones convexas con derivadas continuas, que el estuido de sistemas formados por inecuaciones.

Unos problemas planteados en 1937 por fue el matemático húngaro-estadounidense John Von Neumann en su trabajo *A model of general Economic Equilibrium*, formulando un modelo dinámico lineal generó tanta influencia que numerosos economistas matemáticos se ocuparon de él de una forma teórica, quedando relegada su aplicación a un segundo término.

Uno de los primeros autores que se ocuparon del aspecto cuantitativo fue el economistas estadounidense Wassily Leontief, construyendo uno de los primeros *Modelos Cuantitativos* de la economía americana.

Para el matemático estadounidense George Dantzig la labor de Leontief fue muy importante al resolver las tres fases que se pueden considerar en el estudio de un problema real:

- **Obtención de datos reales en la industria, esto lleva un trabajo de meses e incluso de años.**

- **Construcción del modelo empírico, resolviendo sistemas formados por un gran número de ecuaciones lineales (hay que aún no habia computadores electrónicos).**

- **La deducción de consecuencias para una situación económica futura a partir del modelo empírico estudiado.**

La gran depresión y la llegada del New Deal en Estados Unidos hicieron que el Gobierno prestase gran atención a estos problemas y contribuyese a la formación y desarrollo de equipos integrados por matemáticos y economistas, dedicándose al estudio estadístico de la productividad, índice de vida, recursos nacionales, etc., haciendo necesario organizar e interpretar estos datos y construir un modelo matemático que describiese la economía en términos cuantitativos.

Desde 1936 el Bureau of Labor Statistics viene aplicando el modelo de Leontief a numerosos problemas de tipo militar como a los planteados por la industria civil.

A partir de 1947, Tjalling Charles Koopmans (Nobel Economía 1975, compartido con Leonid Kantorovich) llama la atención de los economistas sobre la gran potencialidad de aplicación de los Modelos de Programación Lineal a la Economía, como ejemplo se utilizó en la Segunda Guerra Mundial para resolver el llamado *problema del transporte.*

La Cowles Commission organiza Conferencias, en las que intervienen célebres economistas: Kenneth Arrow (Nobel Economia, 1972), Robert Dorfman, Leonid Hurwicz (Nobel Economía, 2007), Abba Lerner, Jacob Marschak, Oskar Morgenstern y Paul Samuelson (Nobel Economía, 1970), y matemáticos como Ernest William Brown, Merrill Flood Meeks, Albert William Tucker y George Dantzig. Las comunicaciones presentadas se recogen en una obra titulada *Activity Analysis of Production and Allocation*.

Paul Samuelson en 1955 publica *Market Mechanims and Maximization* y enuncua un teoream de sustitución para un modelo generalizado del de Leontief.

La Programación Lineal va creciendo continuamente en su aplicación a la industria, economía, problema dietético, transporte, etc.

🕮 MODELO ABSTRACTO. APLICACIONES

El modelo matemático consiste en hallar el óptimo, máximo o mínimo de una función lineal cuyas variables están sometdas a un conjunto de restricciones también lineales.

- **PROBLEMA DE LA DIETA**

El primer problema dietético planteado en forma de programación lineal y resuelto por el *Método del Simplex*, fue estudiado por Stigler en 1945. El problema consistía en determinar qué cantidades de 77 alimentos debían adquirirse con costo mínimo para que satisfacieran las necesidades vitales.

En general este problema puede plantearse: Sean $(A_1, A_2, \cdots, A_n)$ alimentos, conteniendo *m* elementos nutritivos $(B_1, B_2, \cdots, B_m)$, siendo $(b_1, b_2, \cdots, b_m)$ las cantidades mínimas requeridas, respectivamente, para una alimentación completa.

Se sabe que el costo por unidad del alimento A_i es c_i y cada unidad A_i contiene a_{ij} del complejo B_j.

Se quiere determinar el número de unidades x_i de A_i necesarias para que la alimentación sea completa y el coste mínimo.

Se trata, pues, de minimizar: $Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + \cdots + c_n x_n$

Sujeto a las restricciones:
$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n \geq b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n \geq b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n \geq b_m \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

La función Z se denomina *función económica o función objetivo*

Las restricciones del tipo $\leq$ suelen representar limitaciones de recursos; las restantes suelen ser externas al proceso: las de tipo $\geq$ suelen significar condiciones técnicas, legales o de calidad del servicio.

El campo de aplicación de este modelo es en mezclas de alimentos para granjas o bien de agentes químicos (fertilizantes).

Stigler en 1937 hacer notar: Nadie recomienda alguna de estas dietas (dietas verdaderas de coste mínimo).

- **PROBLEMA DEL TRANSPORTE**

El problema del transporte o distribución, es un problema de redes especial en programación lineal que se funda en la necesidad de llevar unidades de un punto específico llamado *fuente u origen* hacia otro punto específico llamado destino.

El modelo básico del problema del transporte es el modelo donde la cantidad ofertada es igual a la cantidad demandada, sin embargo trasladar esta suposición a la realidad es casi imposible por lo cual hace falta crear orígenes y/o destinos ficticios con el excedente de oferta y/o demanda.

Los principales objetivos de un modelo de transporte son la satisfacción de todos los requerimientos establecidos por los destinos, y claro está, la minimización de los costos relacionados con el plan determinado por las rutas escogidas.

El procedimiento de resolución de un modelo de transporte se puede llevar a cabo mediante programación lineal común, sin embargo su estructura permite la creación de múltiples alternativas de solución tales como la estructura de asignación o los métodos heurísticos más populares como Vogel, Esquina Noroeste o Mínimos Costos.

El problema surje ante la siguiente situación:

Suponiendo que hay m salidas $(S_1, S_2, \cdots, S_m)$ y n destinos $(D_1, D_2, \cdots, D_n)$ y que en cada salida S_i hay a_i unidades de una determinada mercancía y que el coste del transporte de una unidad desde S_i hasta D_j es c_{ij} $(1 \le i \le m;\ i \le j \le n)$.

Suponiendo que en el destino D_j se necesitan b_j unidades de esta mercancia, siendo $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, aunque esto no tiene por qué ocurrir necesariamente.

El problema consiste en determinar cuántas unidades x_{ij} hay que transportar desde S_i a D_j de forma que el costo toal del transporte de todas las unidades hasta su destino sea mínimo.

La situación se puede expresar:

Hay un número $x_{ij} \ge 0$ tal que $Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}$ sea mínimo

sujeto a las restricciones:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (1 \le j \le n) \qquad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (1 \le i \le m) \qquad x_{ij} \ge 0 \quad (1 \le i \le m\ ;\ 1 \le j \le n)$$

MÉTODO GEOMÉTRICO PARA ENCONTRAR UNA SOLUCIÓN ÓPTIMA

Un astillero recibe un encargo para reparar barcos de la flota de un armador, compuesta por pesqueros de 500 toneladas y yates de 100 toneladas. Cada pesquero se tarda en reparar 100 horas, y cada yate, 50 horas. El astillero dispone de 1.600 horas para hacer las reparaciones. Por política de empresa, el astillero no acepta encargos de más de 12 pesqueros ni más de 16 yates. Las reparaciones se pagan a 100 euros la tonelada, independientemente del tipo de barco.
¿Cuántos barcos de cada clase debe reparar el astillero para maximizar el ingreso de este encargo?. ¿Cuál es dicho ingreso máximo?.

Solución:

Las variables de decisión para un conejo son:

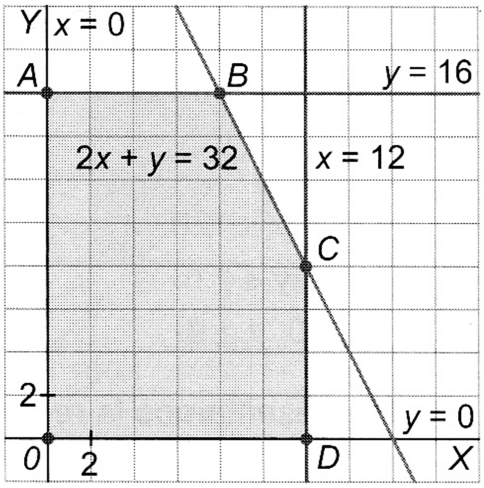
$x \equiv$ pesqueros $\qquad y \equiv$ yates

La función objetivo para maximizar es: $z = 50.000\,x + 10.000\,y$

Sujeta a las restricciones: $\begin{cases} 100\,x + 50\,y \leq 1.600 \\ 0 \leq x \leq 12 \\ 0 \leq y \leq 16 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2\,x + y \leq 32 \\ 0 \leq x \leq 12 \\ 0 \leq y \leq 16 \end{cases}$

Se representa la región factible y se calculan los vértices:

O(0,0) A(0,16) B(8,16) C(12,8) D(12,0)



Se evalúa la función objetivo en los vértices:

$$\begin{array}{ll} O(0,0) & z_O = 0 \\ A(0,16) & z_A = 10.000 \text{ x } 16 = 160.000 \\ B(8,16) & z_B = 50.000 \text{ x } 8 + 10.000 \text{ x } 16 = 560.000 \\ C(12,8) & z_C = 50.000 \text{ x } 12 + 10.000 \text{ x } 8 = 680.000 \\ D(12,0) & z_D = 50.000 \text{ x } 12 = 600.000 \end{array}$$

El máximo ingreso se localiza en el vértice $C(12,8)$ y su valor es $z_C = 680.000$ euros, es decir, hay que reparar $x = 12$ pesqueros e $y = 8$ yates, obteniéndose unos ingresos de 680.000 euros.

PROBLEMA DE LA DIETA: **Un veterinario quiere elaborar un compuesto que permita alimentar a los guacamayos y que cubra sus necesidades mínimas de calcio, fósforo y magnesio al mínimo coste posible. Para ello se debe mezclar de forma adecuada dos preparados alimenticios, A y B. Una porción de A contiene 30 mg de calcio, 10 mg de fósforo y 40 mg de magnesio, y cuesta 3 euros. Mientras que una porción de B contiene 40 mg de calcio, 30 mg de fósforo y 20 mg de magnesio, y tiene un precio de 4 euros.**
Si la dieta debe aportar, al menos 350 mg de calcio, 150 mg de fósforo y 300 mg de magnesio, ¿cuántas porciones de cada preparado deben utilizarse para satisfacer estos requisitos con el mínimo coste?. ¿En estos casos el guacamayo recibirá más cantidad de calcio que la necesaria?.

Solución:

Las variables de decisión: $x = \text{porciones de A}$ $\quad y = \text{porciones de B}$

Los datos se organizan con ayuda de la tabla:

	Calcio	Fósforo	Magnesio	Coste
Preparado A (x)	30	10	40	3 €
Preparado B (y)	40	30	20	4 €
Cantidades mínimas	350	150	300	

El coste del alimento vendrá determinado por la función objetivo: $z = 3x + 4y$

Las restricciones del problema de programación lineal son:

$$\begin{cases} 30x + 40y \geq 350 & \text{cantidad mínima calcio} \\ 10x + 30y \geq 150 & \text{cantidad mínima fósforo} \\ 40x + 20y \geq 300 & \text{cantidad mínima magnesio} \\ x \geq 0 \quad y \geq 0 & \end{cases}$$

$$\begin{cases} 30x + 40y = 350 \\ 10x + 30y = 150 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x + 4y = 35 \\ x + 3y = 15 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x + 4y = 35 \\ -3x - 9y = -45 \end{cases} \rightarrow C(9,2)$$

$$\begin{cases} 40x + 20y = 300 \\ 30x + 40y = 350 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x + y = 15 \\ 3x + 4y = 35 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -8x - 4y = -60 \\ 3x + 4y = 35 \end{cases} \rightarrow B(5,5)$$

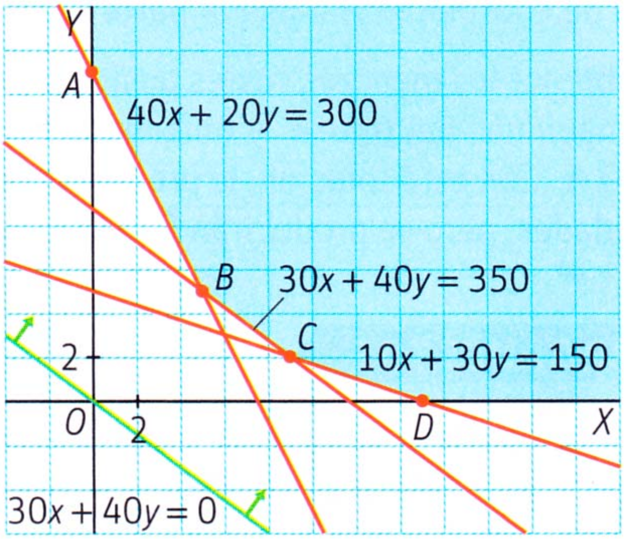
A(0, 15) D(15, 0)

$$\text{Min}\, z = 3x + 4y \rightarrow \begin{cases} A(0,\ 15) & z = 3 \times 0 + 4 \times 15 = 60 \\ B(5,\ 5) & z = 3 \times 5 + 4 \times 5 = 35 \\ C(9,\ 2) & z = 3 \times 9 + 4 \times 2 = 35 \\ D(15,\ 0) & z = 3 \times 15 + 4 \times 0 = 45 \end{cases}$$

Hay dos posibilidades:

- 5 unidades de A y 5 unidades de B
- 9 unidades de A y 2 unidades de B

En ambos casos el aporte de calcio es de 350 mg.



PROBLEMA DE LA DIETA: En una granja hay un total de 9.000 conejos. La dieta mensual mínima que debe consumir cada conejo es de 48 unidades de hidratos de carbono y 60 unidades de proteínas. En el mercado hay dos tipos de productos, A y B, que aportan estas necesidades de consumo. Cada envase A contiene 2 unidades de hidratos de carbono y 4 unidades de proteínas y cada envase B contiene 3 unidades de hidratos de carbono y 3 unidades de proteínas. Cada envase A cuesta 0,24 euros y que cada envase de B cuesta 0,20 euros. Determinar el número de envases de cada tipo que deben adquirir los responsables de la granja con objeto de que el coste sea mínimo y se cubran las necesidades mensuales de consumo de todos los conejos.

Solución:

Las variables de decisión para un conejo son:

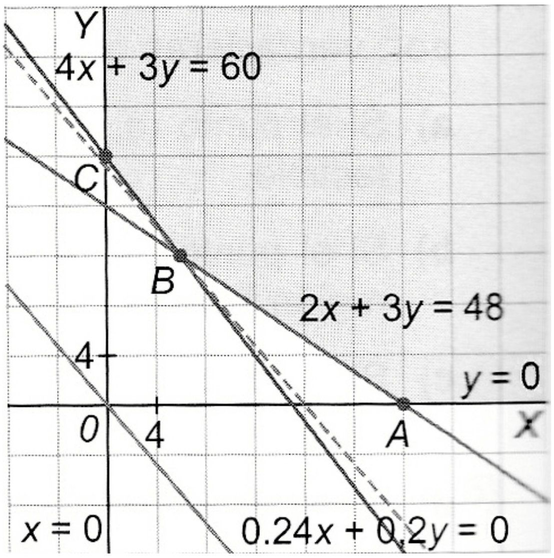
$x \equiv$ envases tipo A $\qquad$ $y \equiv$ envases tipo B

	Envases A x	Envases B y	Cantidades mínimas
Hidratros	2	3	48
Proteínas	4	3	60
Coste	0,24	0,2	

La función objetivo o función económica para minimizar es: $z = 0,24\,x + 0,2\,y$

Sujeta a las restricciones: $\begin{cases} 2x + 3y \geq 48 \\ 4x + 3y \geq 60 \\ x \geq 0 \quad y \geq 0 \end{cases}$

Se representa la región factible y, al no ser acotada la recta $0,24\,x+0,2\,y=0$



Como la función objetivo tiene coeficientes de la *x*, y de la *y*, positivos, el mínimo se localizará en el último punto de la región factible que toque la recta $0,24\,x+0,2\,y=0$ al desplazarse de forma paralela en el sentido negativo del eje Y.

En consecuencia, el mínimo se localizará en el vértice B.

$$\text{vértice B} \equiv \begin{cases} 2\,x+3\,y=48 \\ 4\,x+3\,y=60 \end{cases} \quad \rightarrow \quad B(6,\,12)$$

Es decir, para obtener el coste mínimo hay que adquirir $x=6$ envases A e $y=12$ envases B para cada conejo. Por tanto, para los 9.000 conejos hay que adquirir 54.000 envases A y 108.000 envases B.

El coste mensual por conejo es: $z=0,24\times 6+0,2\times 12=3,84$ euros

El coste total para los 9.000 conejos: $z_{9.000}=3,84\times 9.000=34.560$ euros

PROBLEMA DEL TRANSPORTE: Una empresa tiene dos factorías donde fabrica piezas de automóvil produciendo respectivamente 8.000 y 15.000 unidades.

Las piezas han de ser transportadas a tres fábricas que necesitan 10.000, 7.000 y 6000 piezas, respectivamente.

	Fábrica 1	Fábrica 2	Fábrica 3
Factoría 1	6	13	2
Factoria 2	4	4	12

Los costes de transporte, en euros, por pieza, aparecen en la tabla adjunta. ¿Cómo debe organizarse el transporte para que el coste sea mínimo?.

Solución:

$x \equiv$ número de piezas que entrega la Factoría 1 a la Fábrica 1
$y \equiv$ número de piezas que entrega la Factoría 1 a la Fábrica 2

Si la cantidad total entregada coincide con la cantidad total demandada, puede establecerse la tabla adjunta:

	Fábrica 1	Fábrica 2	Fábrica 3	Oferta
Factoría 1	x	y	$8.000-x-y$	8.000
Factoría 2	$10.000-x$	$7.000-y$	$x+y-2.000$ ↲	15.000
Demanda	10.000	7.000	6.000	

$$\rightarrow \quad 15.000 - (10.000 - x) - (7.000 - y) = x + y - 2.000$$

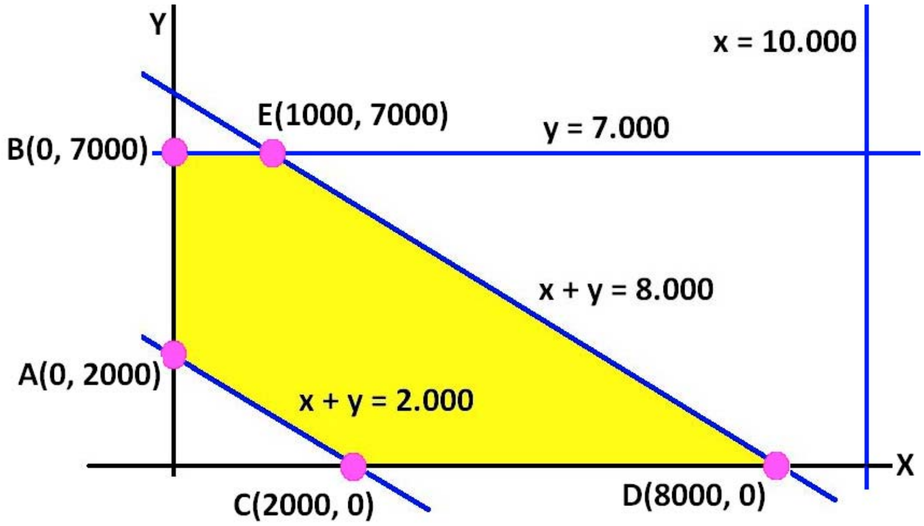
La función económica o función objetivo:

$$z = 6x + 13(7.000 - y) + 2(8.000 - x - y) + 4(10.000 - x) + 4(7.000 - y) + 12(x + y - 2000)$$

$$z = 12\,x + 19\,y + 60.000$$

Las restricciones resultan al obligar que todas las variables sean positivas o nulas:

$$\begin{cases} x \leq 10.000 \\ y \leq 7.000 \\ x + y \leq 8.000 \\ x + y \geq 2.000 \\ x \geq 0 \quad y \geq 0 \end{cases}$$



$$A(0, 2.000) \quad z_A = 19 \times 2.000 + 60.000 = 98.000$$
$$B(0, 7.000) \quad z_B = 19 \times 7.000 + 60.000 = 193.000$$
$$C(2.000, 0) \quad z_C = 12 \times 2.000 + 60.000 = 84.000$$
$$D(8.000, 0) \quad z_D = 12 \times 8.000 + 60.000 = 156.000$$
$$E(1.000, 7.000) \quad z_E = 12 \times 1.000 + 19 \times 7.000 + 60.000 = 205.000$$

El valor mínimo de la función objetivo es $z_C = 84.000$, que se obtiene en el vértice $C(2.000, 0)$, la organización del transporte se adjunta en la tabla:

	Fábrica 1	Fábrica 2	Fábrica 3	Oferta
Factoría 1	2.000	0	6.000	8.000
Factoría 2	8.000	7.000	0	15.000
Demanda	10.000	7.000	6.000	

💾 **PROBLEMA DEL TRANSPORTE: Desde las ciudades de origen de Lisboa (*L*) y Oporto (*O*) se surte de pescado a las ciudades de destino de Évora (*E*), Braga (*Br*) y Beja (*Be*). La tabla del margen muestra los costes, en unidades monetarias, de transportar una caja de pescado desde un lugar de origen a un lugar de destino.**

	E	*Br*	*Be*
L	1	3	2
O	2	1	2

Si las cantidades ofertadas por las ciudades de origen son de 25 cajas en *L* y 15 en *O* y las cantidades demandadas por las ciudades de destino son 20 cajas por *E*, 15 por Br y 5 por *Be*, ¿cuál es la mejor opción para distribuir el pescado para que los costes de transporte sean los más bajos posibles y de forma que todas las ciudades de destino sean totalmente abastecidas con las cantidades demandadas?

Solución:

Si la cantidad total ofertada coincide con la cantidad total demandada, se puede establecer la tabla adjunta de variables que indican el número de cajas que se transportan de un lugar a otro.

	Évora	Braga	Beja	Total
Lisboa	x	y	$25-x-y$	25
Oporto	$20-x$	$15-y$	$x+y-20$	15
Total	20	15	5	40

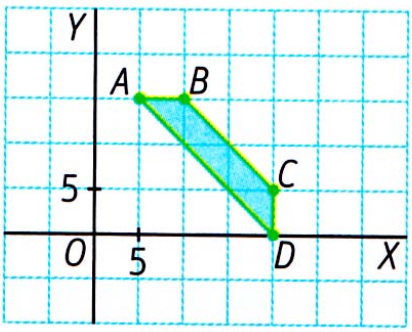
Hay que minimizar la función objetivo de costes:

$$z = x + 3y + 2(25-x-y) + 2(20-x) + (15-y) + 2(x+y-20) = -x + 2y + 65$$

Las restricciones del problema son las que resultan al obligar a que todas las variables de la anterior tabla sean positivas o nulas.

En consecuencia, el problema de programación lineal queda:

$$\text{Min } z = -x + 2y + 65 \quad \begin{cases} x + y \le 25 \\ x \le 20 \\ y \le 15 \\ x + y \ge 20 \\ x \ge 0 \quad y \ge 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} A(5,15) & \rightarrow & z_A = 90 \\ B(10,15) & \rightarrow & z_B = 85 \\ C(20,5) & \rightarrow & z_C = 55 \\ D(20,0) & \rightarrow & z_D = 45 \end{cases}$$

La colución óptima se encuentra en D: $x = 20,\ y = 0$

	Évora	Braga	Beja	Total
Lisboa	20	0	5	25
Oporto	0	15	0	15
Total	20	15	5	40

Por tanto, la mejor distribución es 20 cajas de Lisboa a Évora, 5 cajas de Lisboa a Beja, 15 cajas de Oporto a Braga.

El coste total es de $z = -20 + 2 \times 0 + 65 = 45$

• MÉTODO ABSTRACTO PARA ENCONTRAR UNA SOLUCIÓN ÓPTIMA

Se trata de optimizar una función lineal, llamada objetivo o económica, $Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + \cdots + c_n x_n$ **sometida a un sistema de restricciones:**

$$\textit{forma regular} \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n = b_m \\ x_i \geq 0 \end{cases} \qquad [1]$$

Un modelo expresado de esta forma se dice que está en *forma regular*, pues las ecuaciones de restrición son verdaderas ecuaciones (no inecuaciones).

En el caso en que las restricciones sean inecuaciones se sumará o restará (depende del signo de la desigualdad) a cada una de las inecuaciones del sistema de restricciones una variable llamada *variable de holgura*, que son siempre positivas.

En consecuencia, habrá que añadir al sistema *m variables de holgura*.

Evidentemente estas variables también aparecerán en la función objetivo, pero para que ésta no varíe los coeficientes c_i **correspondientes serán nulos.**

Se llama *solución* del modelo a cualquier conjunto de variables $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ **que satisfaga el sistema. Esra solución se llama *factible o posible* si las** $x_i \geq 0$**. En el csaso en que la solución factible minimice o maximice la función objetivo, se le llama *solución óptima*.**

Una solución es *básica no degenerada* cuando consta de m valores no nulos, mientras que si existen menos de m se dice que la solución es degenerada.

El sistema de restricciones en forma regular [1] puede expresarse en la forma:

$$\boxed{Z = cX} \quad \text{sujeto a } X \geq 0 \text{ y } AX = b$$

donde, $c = (c_1, c_2, \cdots, c_n)$ es un vector fila y $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ es un vector columna.

$A = (a_{ij})$, $b = (b_1, b_2, \cdots, b_m)$ y 0 es un vector columna n dimensional nulo.

Otra representación del sistema [1] es la siguiente:

$$\boxed{Z = cX} \quad \text{sujeto a } X \geq 0 \text{ y } x_1 P_1 + x_2 P_2 + \cdots + x_n P_n = P_0$$

donde P_j $(1 \leq j \leq n)$ es la j-ésima columna de la matriz A y $P_0 = b$

Teorema: El conjunto de todas las soluciones posibles al problema de programación lineal es un conjunto convexo.

De todas las soluciones factibles solo interesa las que sean vértices o extremos.

El objetivo es minimizar la función $Z = cX$, solamente se tiene en cuenta este caso porque maximizar una función $\text{Max}\, Z = -\text{Min}(-Z)$.

Para encontrar la *solución óptima* se tendrán que analizar los puntos extremos del conjunto de soluciones factibles y se hace de forma indirecta, asociando a cada vértice un sistema de vectores linealmente independientes como se refleja a continuación.

Se conoce que el sistema de restricciones de la función objetivo $Z = cX$ puede expresarse en la forma $\sum_{j=1}^{n} x_j P_j = P_o$

Teniendo en cuenta que la característica de la matriz es *m*, se puede afirmar que el número máximo de vectores linealmente independientes entre todos los P_j es *m*.

En estas condiciones se asocia a cada uno de los P_j linealmente independientes un punto extremo de acuerdo con el siguiente teorema.

Teorema: Si puede encontrarse un conjunto $k \leq m$ vectores $(P_1, P_2, \cdots, P_k)$ que es linealmente independiente y tal que

$$x_1 P_1 + x_2 P_2 + \cdots + x_n P_n = P_0 \quad \text{y todas las } x_i \geq 0$$

entonces, el punto $X = (x_1, x_2, \cdots, x_k, 0, \cdots, 0)$ es un punto extremo del conjunto convexo de soluciones posibles. En este caso X es un vector n-dimensional cuyos últimos $(n - k)$ términos son cero.

Recíprocamente, si $X = (x_1, x_2, \cdots, x_k)$ es un punto extremo del conjunto convexo de las soluciones, entonces los vectores asociados con las $x_i > 0$ forman un conjunto linealmente independiente. De aquí se sigue que, al menos, *m* de las x_i son positivas.

Definición 1: Se dice que las variables $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ constituyen un conjunto básico si la matriz de sus coeficientes tiene inversa (no singular), es decir, si los vectores $(P_1, P_2, \cdots, P_m)$ son linealmente independientes.
Las restantes variables son *no básicas o auxiliares*.

Hay que tener en cuenta que, a lo sumo, hay $\binom{n}{m}$ conjuntos básicos de variables.

Definición 2: Las soluciones de las ecuaciones de restricción en las que las variables no básicas o auxiliares se hacen iguales a cero, se dice que son *soluciones básicas*.

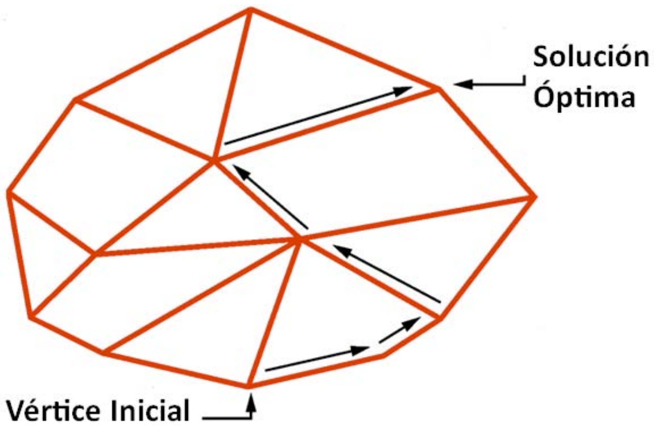
Una solución básica contiene $(n-m)$ ceros como mínimo y existre un número finito de soluciones básicas, como máximo $\binom{n}{m}$.

Definición 3: Una solución en la que las variables tienen valores no negativos se llama *factible*.

- ## EL MÉTODO DEL SIMPLEX

El algoritmo Símplex fue desarrollado por George Dantzig en 1947. Un algoritmo Símplex es un algoritmo de *pivote*, procede examinando vértices adyacentes del poliedro de soluciones.

En 1939 el matemático ruso Leonid Kantoróvich, pionero esta disciplina, realizó estudios que le sirvieron para conseguir el Premio Nobel de Economía en 1975.



La solución óptima está asociada a un punto extremo de la región factible que satisface todas las restricciones, determinando el valor máximo de la función objetivo z, o en su caso el valor mínimo de z.

Es un método que, una vez se ha determinado una solución básica, permite obtener otra solución que proporcione el mínimo en un número finito de pasos.

Estos pasos o iteraciones consisten en encontrar una nueva solución posible cuyo valor correspondiente de la función objetivo sea menor que el valor de la función objetivo de la solución precedente.

El proceso continúa hasta alcanzar una solución mínima.

Al conocer que todas las soluciones de puntos extremos tienen asociados *m* vectores linealmente independientes, la búsqueda se limita a aquellas soluciones que son generadas por *m* vectores linealmente independientes.

Se parte de que el problema de programación lineal tiene solución, que cada solución factible básica es no degenerada, y que se conoce una solución factible.

Situación del problema:

Sea la solución dada $X_0 = (x_{10}, x_{20}, \cdots, x_{m0})$

Y el conjunto de vectores linealmente independientes $(P_1, P_2, \cdots, P_m)$

Se tiene que: $x_{10} P_1 + x_{20} P_2 + \cdots + x_{m0} P_{m0} = P_0$ con todas las $x_{i0} \geq 0$

$z_0 = c_1 x_{10} + c_2 x_{20} + c_3 x_{30} + \cdots + c_m x_{m0}$

Las c_i son los coeficientes de coste de la función objetivo y z_0 es el correspondiente valor de la función objetivo para la solución dada.

Puesto que $(P_1, P_2, \cdots, P_m)$ son linealmente independientes se puede expresar cualquier vector del conjunto $(P_1, P_2, \cdots, P_n)$ en función de $(P_1, P_2, \cdots, P_m)$

Sea P_j dado por: $x_{1j} P_1 + x_{2j} P_2 + \cdots + x_{mj} P_{mj} = P_j \qquad j = 1, 2, \cdots, n$

Y se define, $c_1 x_{1j} + c_2 x_{2j} + c_3 x_{30} + \cdots + c_m x_{mj} = Z_j \qquad j = 1, 2, \cdots, n$

Donde los c_i son los coeficientes de costo correspondientes a P_i

Nota: Para evitar confusiones en la notación, se designa el vector solución $X = (x_1, x_2, \cdots, x_m)$ por el vector $X_0 = (x_{10}, x_{20}, \cdots, x_{m0})$. Así mismo se indica que los $(n-k)$ valores restantes del vector solución han sido hechos arbitrariamente iguales a cero.

Para aplicar el Método del Simplex es necesario recurrir a los dos teoremas que se exponen a continuación:

Teorema 1: Si para cualquier j fija, se cumple la condición $z_j - c_j > 0$, entonces se puede construir un conjunto de soluciones posibles tal que $z < z_0$ para cualquier miembro del conjunto, donde el límite inferior de z puede ser finito o infinito.

Teorema 2: Si para cualquier solución básica $X = (x_{10}, x_{20}, \cdots, x_{m0})$ las condiciones $z_j - c_j \leq 0$ se cumplen, para todas las $j = 1, 2, \cdots, n$, entonces dicha solución es una solución factible mínima.

Procedimiento para resolver el problema:

Se supone que:

a) Se seleccionan *m* vectores linealmente independientes que dan como resultado una solución posible, y se expresan todos los otros vectores en términos de esta base.

b) La matriz del problema contiene *m* vectores que pueden ser arreglados explícitamente para formar una matriz diagonal, unidad, de orden *m*.

a) Sean $(P_1, P_2, \cdots, P_m)$ los *m* vectores linealmente independientes y se designa la matriz $m \times m$ $(P_1, P_2, \cdots, P_m)$ por B. La matriz B recibe el nombre de base admisible.

Para calcular el vector solución X correspondiente y la representación de los otros vectores en términos de la base, se debe calcular primero B^{-1}, puesto que

$$B X_0 = P_0 \quad \to \quad X_0 = B^{-1} P_0 \quad \Rightarrow \quad X_j = B^{-1} P_j$$

donde, $X_0 = (x_{10}, x_{20}, \cdots, x_{m0})$ con $x_{i0} \geq 0$ y $X_j = (x_{1j}, x_{2j}, \cdots, x_{mj})$ son vectores columna.

Para comenzar el método del simplex se agrupan los vectores de la matriz de la siguiente forma:

$$\left(P_o \middle| P_1, P_2, \cdots, P_m \middle| P_{m+1}, \cdots, P_n\right)$$

o bien en la forma $\left(P_o \middle| \; B \; \middle| P_{m+1}, \cdots, P_n\right)$

Multiplicando los elementos de la expresión matricial anterior por B^{-1} se obtiene:

$$B^{-1} \left(P_o \middle| \; B \; \middle| P_{m+1}, \cdots, P_n\right) = \left(X_o \middle| \; I_m \; \middle| X_{m+1}, \cdots, X_n\right)$$

Como se conocen las c_i, se calculan las $(z_j - c_j)$ y se determina, si para cualquier j la correspondiente $(z_j - c_j > 0)$. Si esto es así, se desarrolla el procedimeinto de cómputo descrito en el Teorema 1.
Si no es así, se ha encontrado la solución mínima posible.

b) Se parte de un conjunto dado de vectores $(P_1, P_2, \cdots, P_n)$ que contiene *m* vectores unitarios que pueden ser agrupados para formar una matriz unitaria de orden $m \times m$.

Sean los vectores $(P_1, P_2, \cdots, P_m)$ tomando como base admisible $B = (P_1, P_2, \cdots, P_m)$

Puesto que $B^{-1} = I_m$ y dado que originariamente se supuso que todos los elementos de P_0 eran no negativos, la solución de punto extremo inicial será:

$$X_0 = P_0 \quad y \quad X_j = P_j$$

donde, $X_0 = (x_{10}, x_{20}, \cdots, x_{m0})$ con $x_{i0} \geq 0$ y $X_j = (x_{1j}, x_{2j}, \cdots, x_{mj})$

Para iniciar el método del simplex se arregla la matriz del problema como se muestra en la tabla adjunta.

I	Base	c	P_0	c_1	c_2	$\cdots$	c_h	$\cdots$	c_m	c_{m+1}	•	c_j	•	c_k	•	c_n
				P_1	P_2	$\cdots$	P_h	$\cdots$	P_m	P_{m+1}	•	P_j	•	P_k	•	P_n
1	P_1	c_1	x_{10}	1	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$x_{1,m+1}$	•	x_{1j}	•	x_{1k}	•	x_{1n}
2	P_2	c_2	x_{20}	0	1	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$x_{2,m+1}$	•	x_{2j}	•	x_{2k}	•	x_{2n}
•	•	•	•	•	•	$\cdots$	•	$\cdots$	•	•	•	•	•	•	•	•
h	P_h	c_h	x_{h0}	0	0	$\cdots$	1	$\cdots$	0	$x_{h,m+1}$	•	x_{hj}	•	x_{hk}	•	x_{hn}
•	•	•	•	•	•	$\cdots$	•	$\cdots$	•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	$\cdots$	•	$\cdots$	•	•	•	•	•	•	•	•
m	P_m	c_m	x_{m0}	0	0	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$x_{m,m+1}$	•	x_{mj}	•	x_{mk}	•	x_{mn}
$m+1$			z_0	0	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$z_{m+1} - c_{m+1}$		$z_j - c_j$		$z_k - c_k$		$z_n - c_n$

En la práctica no es necesario agrupar entre sí los vectores unitarios, no obstante se hace en esta ocasión con próposito ilustrativo.

De las ecuaciones originales del problema, dadas por $AX = b$, se tiene que $x_{i0} = b_i$, x_{ij} para $j = 1, 2, \cdots, n$ se obtiene tomando el producto escalar del vector c con el vector X_j, es decir:

$$z_0 = \sum_{i=1}^{m} c_i \, x_{i0} \qquad\qquad z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i \, x_{ij} \quad 1 \leq j \leq n$$

Los elementos z_j y $(z_j - c_j)$ se anotan en sus respectivas columnas en el renglón $(m+1)$. La diferencia $(z_j - c_j)$ será cero para aquellos vectores que están en la base.

- Sí todos los números $z_j - c_j \leq 0$ para $(j = 1, 2, \cdots, n)$, entonces la solución $X_0 = (x_{10}, x_{20}, \cdots, x_{m0}) = (b_1, b_2, \cdots, b_m)$ es una solución mínima factible, y el valor correspondiente de la función objetivo es z_0.

- En caso de que al menos una diferencia $z_j - c_j > 0$ se calcula una nueva solución factible cuya base contiene $(m-1)$ vectores de la base original $(P_1, P_2, \cdots, P_m)$.

El vector que debe introducirse es aquel que corrresponde a $\boxed{\max_j (z_j - c_j)}$

Si hay más de un resultado igual, la regla será seguir el orden lexicográfico.

- Suponiendo que en este caso es: $\max_j (z_j - c_j) = z_k - c_k > 0$, el vector que será introducido en la base será el P_k.

A continuación se calcula: $\boxed{\theta_0 = \min_i \dfrac{x_{i0}}{x_{ik}}}$ para los valores $x_{ik} > 0$

Sí todas las $x_{ik} \leq 0$ habría una solución factible donde la función objetivo se puede hacer arbitrariamente pequeña, con lo que finalizaría el proceso.

- Suponiendo que algunas $x_{ik} > 0$ y que $\theta_0 = \min_i \dfrac{x_{i0}}{x_{ik}} = \dfrac{x_{h0}}{x_{hk}}$, el vector eliminado en la base sería el P_h.

La nueva base para la nueva solución sería $(P_1, P_2, \cdots, P_{h-1}, P_{h+1}, \cdots, P_m, P_k)$

Ahora hay que calcular explícitamente la nueva solución y expresar cada vector que no se encuentra en la base en términos de esta nueva base.

Puesto que la base inicial es $(P_1, P_2, \cdots, P_m) = I_m$, se pueden expresar fácilmente todos los vectores P_i en términos de esta base. Teniendo entonces:

$$P_0 = x_{10} P_1 + x_{20} P_2 + \cdots + x_{h0} P_h + \cdots + x_{m0} P_m$$
$$P_k = x_{1k} P_1 + x_{2k} P_2 + \cdots + x_{hk} P_h + \cdots + x_{mk} P_m$$

Si se despeja en la expresión P_k el valor de P_h y se sutituye en la de P_0 se obtiene:

$$P_k = x_{1k} P_1 + x_{2k} P_2 + \cdots + x_{hk} P_h + \cdots + x_{mk} P_m \quad \to \quad P_h = \frac{P_k}{x_{hk}} - \frac{x_{1k}}{x_{hk}} P_1 - \frac{x_{2k}}{x_{hk}} P_2 - \cdots - \frac{x_{mk}}{x_{hk}} P_m$$

$$P_0 = \overbrace{\left(x_{10} - \frac{x_{h0}}{x_{hk}} x_{1k} \right)}^{x^{\bullet}_{10}} P_1 + \overbrace{\left(x_{20} - \frac{x_{h0}}{x_{hk}} x_{2k} \right)}^{x^{\bullet}_{20}} P_2 + \cdots + \overbrace{\frac{x_{h0}}{x_{hk}}}^{x^{\bullet}_{k0}} P_k + \cdots + \overbrace{\left(x_{m0} - \frac{x_{h0}}{x_{hk}} x_{mk} \right)}^{x^{\bullet}_{m0}} P_m$$

La nueva solución posible es $X^{\bullet}_0 = (x^{\bullet}_{10}, x^{\bullet}_{20}, \cdots, x^{\bullet}_{k0}, \cdots, x^{\bullet}_{m0})$ con $x^{\bullet}_{i0} \geq 0$ y dada por

$\boxed{x^{\bullet}_{i0} = x_{i0} - \dfrac{x_{h0}}{x_{hk}} x_{ik}}$ para $i = 1, 2, \cdots, h-1, h+1, \cdots, m$

De forma análoga, sustituyendo la expresión para P_h en la de P_j, se obtiene la expresión para cada P_j que no se encuentre en la nueva base.

En términos de esta nueva base, resulta:

$$P_j = x_{1j} P_1 + x_{2j} P_2 + \cdots + x_{hj} P_h + \cdots + x_{mj} P_m \qquad 1 \leq j \leq n \quad \mapsto$$

$\mapsto \quad P_j = x^{\bullet}_{1j} P_1 + x^{\bullet}_{2j} P_2 + \cdots + x^{\bullet}_{kj} P_k + \cdots + x^{\bullet}_{mj} P_m$

donde, $\boxed{x^{\bullet}_{ij} = x_{ij} - \dfrac{x_{hj}}{x_{hk}} x_{ik}} \quad (i \neq h) \qquad \boxed{x^{\bullet}_{kj} = \dfrac{x_{hj}}{x_{hk}}}$

Puesto que $z^{\bullet}_j - c_j = c_1 x^{\bullet}_{1j} + c_2 x^{\bullet}_{2j} + \cdots + c_k x^{\bullet}_{kj} + \cdots + c_m x^{\bullet}_{mj} - c_j$

Se desprende que $z^{\bullet}_j - c_j = z_j - c_j - \dfrac{x_{hj}}{x_{hk}} (z_k - c_k)$

Así como que $z^{\bullet}_0 = c_1 x^{\bullet}_{10} + c_2 x^{\bullet}_{20} + \cdots + c_k x^{\bullet}_{k0} \cdots + c_m x^{\bullet}_{m0} = z_0 - \dfrac{x_{h0}}{x_{hk}} (z_k - c_k)$

De esta forma se observa que, para obtener una nueva solución $X^{\bullet}_0$, los nuevos vectores $x^{\bullet}_i$ y las $z^{\bullet}_j - c_j$ correspondientes, cada elemento de la tabla anterior para las filas $(i = 1, 2, \cdots, m-1)$ y las columnas $(j = 0, 1, \cdots, n)$ se transforma mediante las fórmulas:

$$\boxed{x^{\bullet}_{ij} = x_{ij} - \frac{x_{hj}}{x_{hk}} x_{ik}} \quad (i \neq h) \qquad \boxed{x^{\bullet}_{kj} = \frac{x_{hj}}{x_{hk}}}$$

donde, $z^{\bullet}_0 = x^{\bullet}_{m-1\,0}$ **y** $z^{\bullet}_j - c_j = x^{\bullet}_{m-1\,j}$

Es decir, se aplica las fórmulas a todos los elementos de la tabla, incluyendo la columna P_0 y la fila $m-1$

☞ RESUMEN DEL MÉTODO DEL SIMPLEX

1. Se calculan los elementos $(z_j - c_j)$ para determinar si se ha encontrado una solución mínima, es decir, sí $z_j - c_j \leq 0$ para todo valor de j.

2. El vector que se ha de introducir en la base sería el mayor $z_j - c_j$

3. El vector que ha de ser eliminado de la base, que para asegurar sea una nueva solución ha de ser el vector con $\min\left(\dfrac{x_{i0}}{x_{ik}}\right)$ para aquellas $x_{ik} > 0$, donde k corresponde al vector seleccionado en el paso 2. Sí todas las $x_{ik} \leq 0$ la solución es ilimitada.

4. La transformación de la tabla por el método de eliminación para obtener la nueva solución y los elementos asociados.

Cada una de estas iteraciones produce una solución nueva y por los teoremas 1 y 2 enunciados se obtiene finalmente una solución mínima, o bien se determina una solución ilimitada.

☞ RESUMEN DEL MÉTODO DE KARMARKAR (MÉTODO DEL PUNTO INTERIOR)

La estrategia consiste en la búsqueda del óptimo a través de caminos que recorren la zona interior de la región factible; de ahí su nombre de Método del Punto Interior.

1. Se realizan los cocientes entre cada elemento de la columna P_0 por el homólogo de la columna P_1 (asociada a la variable x_1), que es la variable que va a dejar de ser nula en el vértice adyacente siguiente.

2. El mínimo cociente positivo corresponde a la variable que pasará a ser nula en el vértice siguiente. El elemento de la columna P_1 que haga mínimo el cociente será el *elemento pivote* (x_{hk}), alrededor de él gira la transformación de los coeficientes de la tabla que permitirá pasar a la segunda tabla del proceso.

3. La fila del *pivote* se divide por el valor del *pivote*.

4. La columna del *pivote* se hace 0 salvo el elemento del *pivote* que vale 1.

5. Las columnas de las variables que con respecto a la tabla anterior que siguen en base quedan inalteradas. Cualquier otro elemento se transforma según la regla que se adjunta:

$$x^{\bullet}_{ij} = x_{ij} - \frac{x_{hj}}{x_{hk}} x_{ik} \quad i \neq h \qquad\qquad x^{\bullet}_{kj} = \frac{x_{hj}}{x_{hk}} \quad i = h$$

6. Que la actividad *h* tome el valor o nivel k_1, en lugar del valor 0 que tomaba antes es $k_1(c_h - z_h)$ en lugar de $k_1 c_h$, debido a que para producir la actividad h es necesario distraer una parte de los recursos destinados a las actividades que en el vértice V_0 eran no nulas.
Esta reducción sobre el beneficio unitario c_h que produce una unidad de la actividad h viene dada por el *coste de substitución:* $z_h = \sum_{i=1}^{n} c^{\bullet}_i \, x^{\bullet}_{ih}$

Las cantidades $(c_h - z_h)$, en el caso de variables físicas reales, reciben el nombre de *beneficios reducidos,* en tanto que las magnitudes $(z_h - c_h)$ reciben el nombre de *costes reducidos*.

7. El proceso es reiterado hasta que no sea posible encontrar una cantidad de *beneficios reducidos* $(c_h - z_h) > 0$, en cuyo momento habrá alcanzado el *óptimo* y finaliza el algoritmo.
El razonamiento en el caso de mínimo es similar, aunque las valoraciones en el caso de analizar el valor de z_j se hagan en sentido contrario al desarrollado en el caso de máximo.

EJEMPLO DE CÁLCULO DE UN ÓPTIMO

Un artesano dedicado a la fabricación de pipas de fumar produce dos tipos (pipas rectas y cachimbas), entre otros materiales utiliza brezo, ebonita y cerezo, disponiendo mensualmente de 8000, 6000 y 6300 unidades respectivamente. Para fabricar los dos tipos de pipas requiere de los siguientes componentes:

	Brezo	Ebonita	Cerezo	
Pipas (x_1)	10	15	18	80
Cachimbas (x_2)	20	10	6	70
	8000	6000	6300	

El artesano puede vender todo lo que produzca mensualmente, obteniendo un beneficio neto de 80 euros por cada pipa y 70 euros por cada cachimba. ¿Qué número de pipas y cachimbas debe fabricar para maximizar su beneficio?

Solución:

La función económica o función objetivo: $z = 80\,x_1 + 70\,x_2$

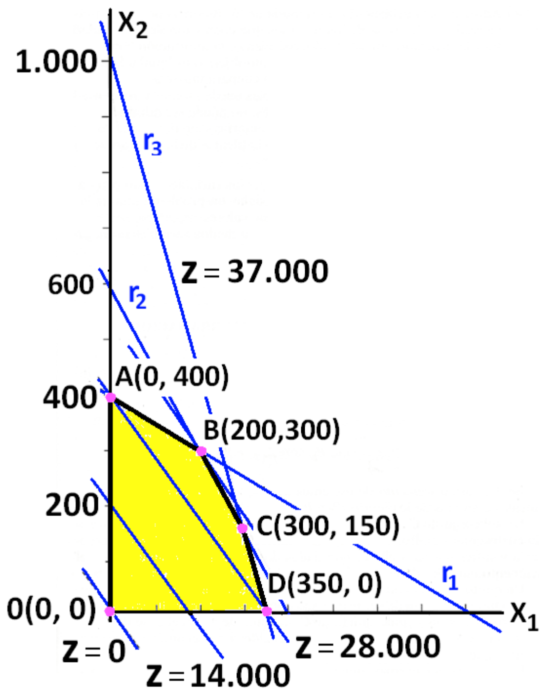
Con siguientes restricciones: $\begin{cases} 10\,x_1 + 20\,x_2 \leq 8000 \\ 15\,x_1 + 10\,x_2 \leq 6000 \\ 18\,x_1 + 6\,x_2 \leq 6300 \\ x_1 \geq 0 \qquad x_2 \geq 0 \end{cases}$

El interior y la frontera del polígono convexo de vértices O, A, B, C, D constituyen el conjunto de posibles soluciones del problema.

Siendo la función económica: $z = 80\,x_1 + 70\,x_2$

$$\begin{cases} z_O = 80 \times 0 + 70 \times 0 = 0 \\ z_A = 80 \times 0 + 70 \times 400 = 28000 \\ z_D = 80 \times 350 + 70 \times 0 = 28000 \\ z_C = 80 \times 300 + 70 \times 150 = 34500 \\ z_B = 80 \times \boxed{200} + 70 \times \boxed{300} = 37000 \end{cases}$$

Para maximizar su beneficio tiene que fabricar mensualmente 200 pipas y 300 cachimbas.



Para resolver el problema por el *método del simplex* se comienza por convertir las desigualdades en igualdades introduciendo sendas *variables de holgura* no negativas en cada restricción. Un problema de progamación lineal:

Maximizar $z = 80x_1 + 70x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$

$$\begin{cases} 10x_1 + 20x_2 + x_3 = 8000 \\ 15x_1 + 10x_2 + x_4 = 6000 \\ 18x_1 + 6x_2 + x_5 = 6300 \\ x_j \geq 0 \end{cases}$$

Se aplica el método de Karmarkar, una de las variantes del simplex, un buscador de óptimos a partir de puntos interiores, siendo ésta la gran novedad en relación con el método Simplex.

El problema así formulado parte de un espacio de cinco dimensiones, con una base inicial formada por $B = \{P_3, P_4, P_5\} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$, con solución $X_0 = (x_3, x_4, x_5) = (8000, 6000, 6300)$ y un vértice inicial $V_0 = (0, 0, 8000, 6000, 6300)$

La variable que va a pasar a ser nula en la siguiente solución se determina calculando los cocientes entre cada elemento de la columna P_0 por el homólogo de la columna P_1, asociada a la x_1 que es la variable que va a dejar de ser nula en el vértice adyacente siguiente. Estos cocientes son:

$$\frac{8000}{10} = 800 \qquad \frac{6000}{15} = 400 \qquad \frac{6300}{18} = 350$$

El cociente mínimo positivo corresponde a la variable x_5, que pasará a ser nula en el vértice siguiente. El elemento de la columna P_1 que determina este cociente es 18 que pasa a ser el *elemento pivote*, la variable x_1 entra en la base sustituyendo a la variable x_5

La columna del pivote se hace 0 excepto el elemento pivote que vale 1. Se divide toda fila del pivote por 18.

		c_j	80	70	0	0	0
Base	$c_i^{\bullet}$	P_0	$P_1 \searrow$	P_2	P_3	P_4	P_5
x_3	0	8000	10	20	1	0	0
x_4	0	6000	15	10	0	1	0
x_5	0	6300	18	6	0	0	1
Coste sustitución z_j		0	0	0	0	0	0
Beneficio reducido $c_j - z_j$			80	70	0	0	0

Las columnas de las variables que con respecto a la tabla anterior siguen en base quedan inalteradas, $P_3 = (1, 0, 0)$ y $P_4 = (0, 1, 0)$

Cualquier otro elemento de la tabla, siendo el elemento pivote es $x_{hk} \equiv x_{31}$, donde $h = 3$, $k = 1$, se transforma según la regla:

$$x^{\bullet}_{ij} = x_{ij} - \frac{x_{hj}}{x_{hk}} x_{ik} \quad i \neq h \qquad x^{\bullet}_{kj} = \frac{x_{hj}}{x_{hk}} \quad i = h$$

$$\begin{cases} x^{\bullet}_{10} = x_{10} - \dfrac{x_{30}}{x_{31}} x_{11} = 8000 - \dfrac{6300}{18} 10 = 4500 \\ x^{\bullet}_{20} = x_{20} - \dfrac{x_{30}}{x_{31}} x_{21} = 6000 - \dfrac{6300}{18} 15 = 750 \\ x^{\bullet}_{12} = x_{12} - \dfrac{x_{32}}{x_{31}} x_{11} = 20 - \dfrac{6}{18} 10 = \dfrac{300}{18} \\ x^{\bullet}_{22} = x_{22} - \dfrac{x_{32}}{x_{31}} x_{21} = 10 - \dfrac{6}{18} 15 = 5 \end{cases}$$

$$x^{\bullet}_{15} = x_{15} - \frac{x_{35}}{x_{31}} x_{11} = 0 - \frac{1}{18} 10 = \frac{-10}{18}$$

$$x^{\bullet}_{25} = x_{25} - \frac{x_{35}}{x_{31}} x_{21} = 0 - \frac{1}{18} 15 = \frac{-15}{18}$$

		c_j	80	70	0	0	0
Base	$c^{\bullet}_i$	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
x_3	0	4500	0	$300/18$	1	0	$-10/18$
x_4	0	750	0	5	0	1	$-15/18$
$x^{\bullet}_1$	80	350	1	$6/18$	0	0	$1/18$
Coste sustitución z_j		28.000	80	$80/3$	0	0	$80/18$
Beneficio reducido $c_j - z_j$			0	$130/3$	0	0	$-80/18$

Coste de sustitución: $z_h = \sum_{i=1}^{3} c^{\bullet}_i \, x^{\bullet}_{ih}$

$$z_0 = \sum_{i=1}^{3} c^{\bullet}_i \, x^{\bullet}_{i0} = c^{\bullet}_1 \, x^{\bullet}_{30} = 80 \text{ x } 350 = 28.000 \qquad z_2 = \sum_{i=1}^{3} c^{\bullet}_i \, x^{\bullet}_{i2} = c^{\bullet}_1 \, x^{\bullet}_{32} = 80 \text{ x } \frac{6}{18} = \frac{80}{3}$$

$$z_1 = \sum_{i=1}^{3} c^{\bullet}_i \, x^{\bullet}_{i1} = c^{\bullet}_1 \, x^{\bullet}_{31} = 80 \text{ x } 1 = 80 \qquad z_5 = \sum_{i=1}^{3} c^{\bullet}_i \, x^{\bullet}_{i5} = c^{\bullet}_1 \, x^{\bullet}_{35} = 80 \text{ x } \frac{1}{18} = \frac{80}{18}$$

Beneficio reducido: $(c_h - z_h)$

$$c_2 - z_2 = 70 - \frac{80}{3} = \frac{130}{3} \qquad c_5 - z_5 = 0 - \frac{80}{18} = -\frac{80}{18}$$

Sale de la base inicial P_5 y entra P_1, con solución $X_0^{\bullet} = (x_1, x_3, x_4) = (4500, 6000, 6300)$, el vértice cambia $V_1 = (350, 0, 4500, 750, 0)$ y la función objetivo pasa a valer 28.000.

Como en la tabla hay valores $c_j - z_j > 0$ la solución puede mejorarse, introduciendo en la base la variable x_2, a la que corresponde ese beneficio marginal positivo.

Para continuar el proceso se hacen los cocientes cada elemento de la columna P_0 por los homólogos de P_2 (columna correspondiente a la variable que entra en la nueva base).

La selección del mínimo cociente positivo indica que variable sale de la base y el pivote. Los cocientes son:

$$\frac{4500}{300/18} = 270 \qquad \frac{750}{\boxed{5}} = 150 \qquad \frac{350}{6/18} = 1050$$

El elemento pivote es $x_{hk} = x_{22} = 5$, donde, $h = 2,\ k = 2$.

		c_j	80	70	0	0	0	
Base	$c_i^{\bullet}$	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	
x_3	0	4500	0	300/18	1	0	$-10/18$	270
x_4	0	750	0	$\boxed{5}$	0	1	$-15/18$	150
$x_1^{\bullet}$	80	350	1	$6/18$	0	0	$1/18$	1050
Coste sustitución	z_j	28.000	80	$80/3$	0	0	$80/18$	
Beneficio reducido	$c_j - z_j$		0	$130/3$	0	0	0	

La columna del pivote se hace 0 excepto el elemento pivote que vale 1.

Se divide toda fila del pivote por 5.

Sale de la base la variable x_4 y entra la variable x_2 con base $P_2 = (0, 1, 0)$, hay que modificar P_4 y P_5

Las columnas de las variables que con respecto a la tabla anterior siguen en base quedan inalteradas, $P_1 = (0, 0, 1)$ y $P_3 = (1, 0, 0)$

Cualquier otro elemento de la tabla, siendo el elemento pivote es $x_{hk} = x_{22}$, donde $h = 2$, $k = 2$, se transforma según la regla:

$$x_{ij}^{\bullet} = x_{ij} - \frac{x_{hj}}{x_{hk}} x_{ik} \quad i \neq h \qquad\qquad x_{kj}^{\bullet} = \frac{x_{hj}}{x_{hk}} \quad i = h$$

$$\begin{cases} x^{\bullet}_{10} = x_{10} - \dfrac{x_{20}}{x_{22}}\, x_{12} = 4500 - \dfrac{750}{5}\,\dfrac{300}{18} = 2000 \\ x^{\bullet}_{30} = x_{30} - \dfrac{x_{20}}{x_{22}}\, x_{32} = 350 - \dfrac{750}{5}\,\dfrac{6}{18} = 300 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^{\bullet}_{14} = x_{14} - \dfrac{x_{24}}{x_{22}}\, x_{12} = 0 - \dfrac{1}{5}\,\dfrac{300}{18} = -\dfrac{10}{3} \\ x^{\bullet}_{24} = \dfrac{x_{24}}{x_{22}} = \dfrac{1}{5} \\ x^{\bullet}_{34} = x_{34} - \dfrac{x_{24}}{x_{22}}\, x_{32} = 0 - \dfrac{1}{5}\,\dfrac{6}{18} = -\dfrac{1}{15} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^{\bullet}_{15} = x_{15} - \dfrac{x_{25}}{x_{22}}\, x_{12} = -\dfrac{10}{18} + \dfrac{15/18}{5}\,\dfrac{300}{18} = \dfrac{20}{9} \\ x^{\bullet}_{25} = \dfrac{x_{25}}{x_{22}}\, x_{22} = -\dfrac{15/18}{5} = -\dfrac{1}{6} \\ x^{\bullet}_{35} = x_{35} - \dfrac{x_{25}}{x_{22}}\, x_{32} = \dfrac{1}{18} + \dfrac{15/18}{5}\,\dfrac{6}{18} = \dfrac{1}{9} \end{cases}$$

		c_j	80	70	0	0	0
Base	$c^{\bullet}_i$	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
x_3	0	2000	0	0	1	$-10/3$	$20/9$
$x^{\bullet}_2$	70	150	0	1	0	$1/5$	$-1/6$
$x^{\bullet}_1$	80	300	1	0	0	$-1/15$	$1/9$
Coste sustitución	z_j	34.500	80	70	0	$26/3$	$-25/9$
Beneficio reducido	$c_j - z_j$		0	0	0	$-26/3$	$25/9$

Costes de sustitución: $z_h = \sum_{i=1}^{3} c^{\bullet}_i\, x^{\bullet}_{ih}$

$$z_0 = \sum_{i=1}^{3} c^{\bullet}_i\, x^{\bullet}_{i0} = c^{\bullet}_1\, x^{\bullet}_{30} + c^{\bullet}_2\, x^{\bullet}_{20} = 80 \text{ x } 300 + 70 \text{ x } 150 = 34.500$$

$$z_4 = \sum_{i=1}^{3} c^{\bullet}_i\, x^{\bullet}_{i4} = c^{\bullet}_1\, x^{\bullet}_{14} + c^{\bullet}_2\, x^{\bullet}_{24} = 80 \text{ x } \frac{-1}{15} + 70 \text{ x } \frac{1}{5} = \frac{26}{3}$$

$$z_5 = \sum_{i=1}^{3} c^{\bullet}_i\, x^{\bullet}_{i5} = c^{\bullet}_1\, x^{\bullet}_{15} + c^{\bullet}_2\, x^{\bullet}_{25} = 80 \text{ x } \frac{1}{9} + 70 \text{ x } \frac{-1}{6} = -\frac{25}{9}$$

Beneficio reducido: $(c_h - z_h)$

$$c_4 - z_4 = 0 - \frac{26}{3} = -\frac{26}{3} \qquad c_5 - z_5 = 0 + \frac{25}{9} = \frac{25}{9}$$

Sale de la base inicial P_4 y entra P_2, con solución $X_0^{\bullet} = (x_1, x_2, x_4) = (300, 150, 6300)$

Los vértices han ido cambiando con las iteraciones:
Del vértice inicial $V_0 = (0, 0, 8000, 6000, 6300)$, en la primera etapa cambia el vértice a $V_1 = (350, 0, 4500, 750, 0)$, en la segunda etapa a $V_2 = (300, 150, 2000, 0, 0)$

La función objetivo pasa de 28.000 a 34.500.

Como en la tabla $c_5 - z_5 > 0$ la solución puede mejorarse, introduciendo en la base la variable x_5, a la que corresponde ese beneficio marginal positivo.

Para continuar el proceso se hacen los cocientes cada elemento de la columna P_0 por los homólogos de P_5 (columna correspondiente a la variable que entra en la nueva base).

La selección del mínimo cociente positivo indica que variable sale de la base y el pivote. Los cocientes son:

$$\frac{2000}{\boxed{20/9}} = 900 \qquad \frac{150}{-1/6} = -900 \qquad \frac{300}{1/9} = 2700$$

Como entre los cocientes hay dos positivos, se selecciona el menor, que corresponde a la variable x_3.

El elemento pivote es $x_{hk} = x_{15} = \dfrac{20}{9}$, donde, $h = 1$, $k = 5$.

		c_j	80	70	0	0	0	
Base	$c_i^{\bullet}$	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	
x_3	0	2000	0	0	1	$-10/3$	$\boxed{20/9}$	900
$x_2^{\bullet}$	70	150	0	1	0	$1/5$	$-1/6$	-900
$x_1^{\bullet}$	80	300	1	0	0	$-1/15$	$1/9$	2700
Coste sustitución	z_j	34.500	80	70	0	$26/3$	$-25/9$	
Beneficio reducido	$c_j - z_j$		0	0	0	$-26/3$	$25/9$	

La columna del pivote se hace 0 excepto el elemento pivote que vale 1.

Se divide toda fila del pivote por $\dfrac{20}{9}$

Las columnas de las variables que con respecto a la tabla anterior siguen en base quedan inalteradas, $P_1 = (0, 0, 1)$ y $P_2 = (0, 1, 0)$

Sale de la base la variable x_3 y entra la variable x_5 con base $P_5 = (1, 0, 0)$. En consecuencia, hay que modificar P_3 y P_4

Cualquier otro elemento de la tabla, siendo el elemento pivote es $x_{hk} = x_{22}$, donde $h = 1$, $k = 5$, se transforma según la regla:

$$x^{\bullet}_{ij} = x_{ij} - \frac{x_{hj}}{x_{hk}}\, x_{ik} \quad i \neq h \qquad\qquad x^{\bullet}_{kj} = \frac{x_{hj}}{x_{hk}} \quad i = h$$

$$\begin{cases} x^{\bullet}_{10} = \dfrac{x_{10}}{x_{15}} = \dfrac{2000}{20/9} = 900 \\ x^{\bullet}_{20} = x_{20} - \dfrac{x_{10}}{x_{15}}\, x_{25} = 150 + \dfrac{2000}{20/9}\,\dfrac{1}{6} = 300 \\ x^{\bullet}_{30} = x_{30} - \dfrac{x_{10}}{x_{15}}\, x_{35} = 300 - \dfrac{2000}{20/9}\,\dfrac{1}{9} = 200 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^{\bullet}_{13} = \dfrac{x_{13}}{x_{15}} = \dfrac{1}{20/9} = \dfrac{9}{20} \\ x^{\bullet}_{23} = x_{23} - \dfrac{x_{12}}{x_{15}}\, x_{25} = 0 + \dfrac{1}{20/9}\,\dfrac{1}{6} = \dfrac{3}{40} \\ x^{\bullet}_{33} = x_{33} - \dfrac{x_{13}}{x_{15}}\, x_{35} = 0 - \dfrac{1}{20/9}\,\dfrac{1}{9} = -\dfrac{1}{20} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^{\bullet}_{14} = \dfrac{x_{14}}{x_{15}} = \dfrac{-10/3}{20/9} = -\dfrac{3}{2} \\ x^{\bullet}_{24} = x_{24} - \dfrac{x_{14}}{x_{15}}\, x_{25} = \dfrac{1}{5} - \dfrac{10/3}{20/9}\,\dfrac{1}{6} = -\dfrac{1}{20} \\ x^{\bullet}_{34} = x_{34} - \dfrac{x_{14}}{x_{15}}\, x_{35} = -\dfrac{1}{15} + \dfrac{10/3}{20/9}\,\dfrac{1}{9} = \dfrac{1}{10} \end{cases} \qquad \begin{cases} x^{\bullet}_{15} = \dfrac{x_{15}}{x_{15}} = 1 \\ x^{\bullet}_{25} = x_{25} - \dfrac{x_{15}}{x_{15}}\, x_{25} = 0 \\ x^{\bullet}_{35} = x_{35} - \dfrac{x_{15}}{x_{15}}\, x_{35} = 0 \end{cases}$$

		c_j	80	70	0	0	0
Base	$c^{\bullet}_i$	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
$x^{\bullet}_5$	0	900	0	0	9/20	−3/2	1
$x^{\bullet}_2$	70	300	0	1	3/40	−1/20	0
$x^{\bullet}_1$	80	200	1	0	−1/20	1/10	0
Coste sustitución	z_j	37.000	80	70	5/4	9/2	0
Beneficio reducido	$c_j - z_j$		0	0	−5/4	−9/2	0

Costes de sustitución: $z_h = \sum_{i=1}^{3} c^{\bullet}_i\, x^{\bullet}_{ih}$

$$z_0 = \sum_{i=1}^{3} c^{\bullet}_i\, x^{\bullet}_{i0} = c^{\bullet}_1\, x^{\bullet}_{30} + c^{\bullet}_2\, x^{\bullet}_{20} + c^{\bullet}_3\, x^{\bullet}_{10} = 80 \text{ x } 200 + 70 \text{ x } 300 + 0 \text{ x } 900 = 37.000$$

$$z_3 = \sum_{i=1}^{3} c^{\bullet}_i\, x^{\bullet}_{i3} = c^{\bullet}_1\, x^{\bullet}_{33} + c^{\bullet}_2\, x^{\bullet}_{23} + c^{\bullet}_3\, x^{\bullet}_{13} = 80 \text{ x } \frac{-1}{20} + 70 \text{ x } \frac{3}{40} + 0 \text{ x } \frac{9}{20} = \frac{5}{4}$$

$$z_4 = \sum_{i=1}^{3} c^{\bullet}_i\, x^{\bullet}_{i4} = c^{\bullet}_1\, x^{\bullet}_{34} + c^{\bullet}_2\, x^{\bullet}_{24} + c^{\bullet}_3\, x^{\bullet}_{14} = 80 \text{ x } \frac{1}{10} + 70 \text{ x } \frac{-1}{20} + 0 \text{ x } \frac{-3}{2} = \frac{9}{2}$$

Beneficio reducido: $(c_h - z_h)$

$$c_3 - z_3 = 0 - \frac{5}{4} = -\frac{5}{4} \qquad c_4 - z_4 = 0 - \frac{9}{2} = -\frac{9}{2}$$

Como en la tabla no hay ningún beneficio reducido $c_j - z_j > 0$ la solución no puede mejorar y el algoritmo ha finalizado.

La función objetivo pasa de 34.500 a 37.000

Los vértices han ido cambiando con las iteraciones:
Del vértice inicial $V_0 = (0, 0, 8000, 6000, 6300)$, en la primera etapa cambia el vértice a $V_1 = (350, 0, 4500, 750, 0)$, en la segunda etapa a $V_2 = (300, 150, 2000, 0, 0)$ y en la tercera etapa al vértice $V_3 = (200, 300, 0, 0, 900)$

En definitiva, la función objetivo o función económica alcanza el máximo para $x_1 = 200$, $x_2 = 300$

SIMPLEX: Maximizar $z = 3x + 2y$

Sujeto a las restricciones: $\begin{cases} 2x + y \leq 18 \\ 2x + 3y \leq 42 \\ 3x + y \leq 24 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 18 \\ 2x + 3y \leq 42 \\ 3x + y \leq 24 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$

Las inecuaciones se convierten en ecuaciones agregando tantas variables de holgura o ficticias como desigualdades se presentan, resultando el sistema de ecuaciones:

Maximizar $z = 3x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \qquad = 18 \\ 2x_1 + 3x_2 \qquad + x_4 = 42 \\ 3x_1 + x_2 \qquad\qquad + x_5 = 24 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_j \geq 0 \end{cases}$$

El problema así formulado parte de un espacio de cinco dimensiones, con una base inicial formada por $B = \{P_3, P_4, P_5\} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$, con solución $X_0 = (x_3, x_4, x_5) = (18, 42, 24)$ y un vértice inicial $V_0 = (0, 0, 18, 42, 24)$

La variable que va a pasar a ser nula en la siguiente solución se determina calculando los cocientes entre cada elemento de la columna P_0 por el homólogo de la columna P_1, asociada a la x_1 que es la variable que va a dejar de ser nula en el vértice adyacente siguiente. Estos cocientes son:

$$\frac{18}{2} = 9 \qquad \frac{42}{2} = 21 \qquad \frac{24}{\boxed{3}} = 8$$

El cociente mínimo positivo corresponde a la variable x_5, que pasará a ser nula en el vértice siguiente. El elemento de la columna P_1 que determina este cociente es 3 que pasa a ser el *elemento pivote*, la variable x_1 entra en la base sustituyendo a la variable x_5

La columna del pivote se hace 0 excepto el elemento pivote que vale 1. Se divide toda fila del pivote por 3.

		c_j	3	2	0	0	0
Base	$c_i^\bullet$	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
x_3	0	18	2	1	1	0	0
x_4	0	42	2	3	0	1	0
x_5	0	24	$\boxed{3}$	1	0	0	1
Coste sustitución	z_j	0	0	0	0	0	0
Beneficio reducido	$c_j - z_j$		3	2	0	0	0

Las columnas de las variables que con respecto a la tabla anterior siguen en base quedan inalteradas, $P_3 = (1, 0, 0)$ y $P_4 = (0, 1, 0)$

Cualquier otro elemento de la tabla, siendo el elemento pivote es $x_{hk} \equiv x_{31}$, donde $h = 3$, $k = 1$, se transforma según la regla:

$$x_{ij}^\bullet = x_{ij} - \frac{x_{hj}}{x_{hk}} x_{ik} \quad i \neq h \qquad x_{kj}^\bullet = \frac{x_{hj}}{x_{hk}} \quad i = h$$

$$\begin{cases} x_{10}^\bullet = x_{10} - \dfrac{x_{30}}{x_{31}} x_{11} = 18 - \dfrac{24}{3} 2 = 2 \\ x_{20}^\bullet = x_{20} - \dfrac{x_{30}}{x_{31}} x_{21} = 42 - \dfrac{24}{3} 2 = 26 \\ x_{12}^\bullet = x_{12} - \dfrac{x_{32}}{x_{31}} x_{11} = 1 - \dfrac{1}{3} 2 = \dfrac{1}{3} \\ x_{22}^\bullet = x_{22} - \dfrac{x_{32}}{x_{31}} x_{21} = 3 - \dfrac{1}{3} 2 = \dfrac{7}{3} \end{cases}$$

$$x_{15}^\bullet = x_{15} - \frac{x_{35}}{x_{31}} x_{11} = 0 - \frac{1}{3} 2 = \frac{-2}{3}$$

$$x_{25}^\bullet = x_{25} - \frac{x_{35}}{x_{31}} x_{21} = 0 - \frac{1}{3} 2 = \frac{-2}{3}$$

		c_j	3	2	0	0	0
Base	$c_i^\bullet$	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
x_3	0	2	0	1/3	1	0	−2/3
x_4	0	26	0	7/3	0	1	−2/3
$x_1^\bullet$	3	8	1	1/3	0	0	1/3
Coste sustitución	z_j	24	3	1	0	0	1/3
Beneficio reducido	$c_j - z_j$		0	1	0	0	−1/3

Coste de sustitución: $z_h = \sum_{i=1}^{3} c_i^\bullet\, x_{ih}^\bullet$

$$z_0 = \sum_{i=1}^{3} c_i^\bullet\, x_{i0}^\bullet = c_1^\bullet\, x_{30}^\bullet = 3 \text{ x } 8 = 24 \qquad z_2 = \sum_{i=1}^{3} c_i^\bullet\, x_{i2}^\bullet = c_1^\bullet\, x_{32}^\bullet = 3 \text{ x } \frac{1}{3} = 1$$

$$z_1=\sum_{i=1}^{3} c_i^{\bullet}\,x_{i1}^{\bullet}=c_1^{\bullet}\,x_{31}^{\bullet}=3\ x\ 1=3 \qquad z_5=\sum_{i=1}^{3} c_i^{\bullet}\,x_{i5}^{\bullet}=c_1^{\bullet}\,x_{35}^{\bullet}=3\ x\ \frac{1}{1}=\frac{1}{3}$$

Beneficio reducido: $(c_h - z_h)$

$$c_2 - z_2 = 2 - 1 = 1 \qquad c_5 - z_5 = 0 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$$

Sale de la base inicial P_5 y entra P_1, con solución $X_0^{\bullet}=(x_1, x_4, x_5)=(8, 26, 2)$, el vértice cambia $V_1=(8, 0, 18, 42, 0)$ y la función objetivo pasa a valer 24.

Como en la tabla hay valores $c_j - z_j > 0$ la solución puede mejorarse, introduciendo en la base la variable x_2, a la que corresponde ese beneficio marginal positivo.

Para continuar el proceso se hacen los cocientes cada elemento de la columna P_0 por los homólogos de P_2 (columna correspondiente a la variable que entra en la nueva base).

La selección del mínimo cociente positivo indica que variable sale de la base y el pivote. Los cocientes son:

$$\frac{2}{\boxed{1/3}}=6 \qquad \frac{26}{7/3}=\frac{78}{7} \qquad \frac{8}{1/3}=24$$

El elemento pivote es $x_{hk}=x_{12}=1/3$, donde, $h=1,\ k=2$.

		c_j	3	2	0	0	0
Base	$c_i^{\bullet}$	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
x_3	0	2	0	$\boxed{1/3}$	1	0	$-2/3$
x_4	0	26	0	$7/3$	0	1	$-2/3$
$x_1^{\bullet}$	3	8	1	$1/3$	0	0	$1/3$
Coste sustitución	z_j	24	3	1	0	0	$1/3$
Beneficio reducido	$c_j - z_j$		0	1	0	0	$-1/3$

La columna del pivote se hace 0 excepto el elemento pivote que vale 1.

Se divide toda fila del pivote por $1/3$

Sale de la base la variable x_3 y entra la variable x_2 con base $P_2=(1, 0, 0)$, hay que modificar P_3 y P_5

Las columnas de las variables que con respecto a la tabla anterior siguen en base quedan inalteradas, $P_1=(0, 0, 1)$ y $P_4=(0, 1, 0)$

Cualquier otro elemento de la tabla, siendo el elemento pivote es $x_{hk} = x_{12}$, donde $h = 1$, $k = 2$, se transforma según la regla:

$$x^{\bullet}_{ij} = x_{ij} - \frac{x_{hj}}{x_{hk}} x_{ik} \quad i \neq h \qquad x^{\bullet}_{kj} = \frac{x_{hj}}{x_{hk}} \quad i = h$$

$$\begin{cases} x^{\bullet}_{10} = \dfrac{x_{10}}{x_{12}} = \dfrac{2}{1/3} = 6 \\ x^{\bullet}_{20} = x_{20} - \dfrac{x_{10}}{x_{12}} x_{22} = 26 - \dfrac{2}{1/3}\dfrac{7}{3} = 12 \\ x^{\bullet}_{30} = x_{30} - \dfrac{x_{10}}{x_{12}} x_{32} = 8 - \dfrac{2}{1/3}\dfrac{1}{3} = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^{\bullet}_{13} = \dfrac{x_{13}}{x_{12}} \dfrac{1}{1/3} = 3 \\ x^{\bullet}_{23} = x_{23} - \dfrac{x_{13}}{x_{12}} x_{22} = 0 - \dfrac{1}{1/3}\dfrac{7}{3} = -7 \\ x^{\bullet}_{33} = x_{33} - \dfrac{x_{13}}{x_{12}} x_{32} = 0 - \dfrac{1}{1/3}\dfrac{1}{3} = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^{\bullet}_{15} = \dfrac{x_{15}}{x_{12}} = \dfrac{-2/3}{1/3} = -2 \\ x^{\bullet}_{25} = x_{25} - \dfrac{x_{15}}{x_{12}} x_{22} = -\dfrac{2}{3} + \dfrac{2/3}{1/3}\dfrac{7}{3} = 4 \\ x^{\bullet}_{35} = x_{35} - \dfrac{x_{15}}{x_{12}} x_{32} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2/3}{1/3}\dfrac{1}{3} = 1 \end{cases}$$

		c_j	3	2	0	0	0
Base	$c^{\bullet}_i$	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
$x^{\bullet}_2$	2	6	0	1	3	0	-2
x_4	0	12	0	0	-7	1	4
$x^{\bullet}_1$	3	6	1	0	-1	0	1
Coste sustitución z_j		30	3	2	3	0	-1
Beneficio reducido $c_j - z_j$			0	0	-3	0	1

Costes de sustitución: $z_h = \sum_{i=1}^{3} c^{\bullet}_i \, x^{\bullet}_{ih}$

$$z_0 = \sum_{i=1}^{3} c^{\bullet}_i \, x^{\bullet}_{i0} = c^{\bullet}_1 \, x^{\bullet}_{10} + c^{\bullet}_2 \, x^{\bullet}_{20} = 3 \text{ x } 6 + 2 \text{ x } 6 = 30$$

$$z_3 = \sum_{i=1}^{3} c^{\bullet}_i \, x^{\bullet}_{i3} = c^{\bullet}_1 \, x^{\bullet}_{13} + c^{\bullet}_2 \, x^{\bullet}_{23} = 3 \text{ x } (-1) + 2 \text{ x } 3 = 3$$

$$z_5 = \sum_{i=1}^{3} c^{\bullet}_i \, x^{\bullet}_{i5} = c^{\bullet}_1 \, x^{\bullet}_{15} + c^{\bullet}_2 \, x^{\bullet}_{25} = 3 \text{ x } 1 + 2 \text{ x } (-2) = -1$$

Sale de la base inicial P_3 y entra P_2, con solución $X_0^{\bullet} = (x_1, x_2, x_4) = (6, 6, 12)$, el vértice cambia $V_2 = (6, 6, 0, 12, 0)$ y la función objetivo pasa a valer 30

Como en la tabla hay valores $c_5 - z_5 > 0$ la solución puede mejorarse, introduciendo en la base la variable x_5, a la que corresponde ese beneficio marginal positivo.

Para continuar el proceso se hacen los cocientes cada elemento de la columna P_0 por los homólogos de P_5 (columna correspondiente a la variable que entra en la nueva base).

La selección del mínimo cociente positivo indica que variable sale de la base y el pivote. Los cocientes son:

$$\frac{6}{-2} = -3 \qquad \frac{12}{\boxed{4}} = 3 \qquad \frac{6}{1} = 6$$

Como entre los cocientes hay dos positivos, se selecciona el menor, que corresponde a la variable x_3.

El elemento pivote es $x_{hk} = x_{25} = 4$, donde, $h = 2$, $k = 5$.

		c_j	3	2	0	0	0
Base	$c_i^{\bullet}$	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
$x_2^{\bullet}$	2	6	0	1	3	0	-2
x_4	0	12	0	0	-7	1	$\boxed{4}$
$x_1^{\bullet}$	3	6	1	0	-1	0	1
Coste sustitución	z_j	30	3	2	3	0	-1
Beneficio reducido	$c_j - z_j$		0	0	-3	0	1

La columna del pivote se hace 0 excepto el elemento pivote que vale 1.

Se divide toda fila del pivote por 4

Sale de la base la variable x_4 y entra la variable x_5 con base $P_5 = (0, 1, 0)$. En consecuencia, hay que modificar P_3 y P_4

Las columnas de las variables que con respecto a la tabla anterior siguen en base quedan inalteradas, $P_1 = (0, 0, 1)$ y $P_2 = (1, 0, 0)$

Cualquier otro elemento de la tabla, siendo el elemento pivote es $x_{hk} = x_{12}$, donde $h = 1$, $k = 2$, se transforma según la regla:

$$x_{ij}^{\bullet} = x_{ij} - \frac{x_{hj}}{x_{hk}} x_{ik} \quad i \neq h \qquad x_{kj}^{\bullet} = \frac{x_{hj}}{x_{hk}} \quad i = h$$

$$\begin{cases} x^{\bullet}_{10} = x_{10} - \dfrac{x_{20}}{x_{25}} x_{15} = 6 + \dfrac{12}{4} 2 = 12 \\ x^{\bullet}_{30} = x_{30} - \dfrac{x_{30}}{x_{25}} x_{35} = 6 - \dfrac{12}{4} 1 = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^{\bullet}_{13} = x_{13} - \dfrac{x_{23}}{x_{25}} x_{15} = 3 - \dfrac{7}{4} 2 = -\dfrac{1}{2} \\ x^{\bullet}_{33} = x_{33} - \dfrac{x_{23}}{x_{25}} x_{35} = -1 + \dfrac{7}{4} 1 = \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^{\bullet}_{14} = x_{14} - \dfrac{x_{24}}{x_{25}} x_{15} = 0 + \dfrac{1}{4} 2 = \dfrac{1}{2} \\ x^{\bullet}_{34} = x_{34} - \dfrac{x_{24}}{x_{25}} x_{35} = 0 - \dfrac{1}{4} 1 = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

		c_j	3	2	0	0	0
Base	$c^{\bullet}_i$	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
$x^{\bullet}_2$	2	12	0	1	$-1/2$	$1/2$	0
$x^{\bullet}_5$	0	3	0	0	$-7/4$	$1/4$	1
$x^{\bullet}_1$	3	3	1	0	$3/4$	$-1/4$	0
Coste sustitución z_j		33	3	2	$5/4$	$1/4$	0
Beneficio reducido $c_j - z_j$			0	0	$-5/4$	$-1/4$	0

Costes de sustitución: $z_h = \sum_{i=1}^{3} c^{\bullet}_i \, x^{\bullet}_{ih}$

$$z_0 = \sum_{i=1}^{3} c^{\bullet}_i \, x^{\bullet}_{i0} = c^{\bullet}_1 x^{\bullet}_{30} + c^{\bullet}_2 x^{\bullet}_{20} + c^{\bullet}_3 x^{\bullet}_{10} = 3 \text{ x } 3 + 2 \text{ x } 12 + 0 \text{ x } 3 = 33$$

$$z_3 = \sum_{i=1}^{3} c^{\bullet}_i \, x^{\bullet}_{i3} = c^{\bullet}_1 x^{\bullet}_{33} + c^{\bullet}_2 x^{\bullet}_{23} + c^{\bullet}_3 x^{\bullet}_{13} = 3 \text{ x } \frac{3}{4} + 2 \text{ x } \frac{-1}{2} + 0 \text{ x } \frac{-7}{4} = \frac{5}{4}$$

$$z_4 = \sum_{i=1}^{3} c^{\bullet}_i \, x^{\bullet}_{i4} = c^{\bullet}_1 x^{\bullet}_{34} + c^{\bullet}_2 x^{\bullet}_{24} + c^{\bullet}_3 x^{\bullet}_{14} = 3 \text{ x } \frac{-1}{4} + 2 \text{ x } \frac{1}{2} + 0 \text{ x } \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Sale de la base inicial P_4 y entra P_5, con solución $X^{\bullet}_0 = (x_1, x_2, x_5) = (3, 12, 3)$, el vértice cambia $V_3 = (3, 12, 0, 0, 3)$ y la función objetivo pasa a valer 33.

En definitiva, la función objetivo o función económica alcanza el máximo para $x_1 = 3$, $x_2 = 12$

Como en la tabla no hay ningún beneficio reducido $c_j - z_j > 0$ la solución no puede mejorar y el algoritmo ha finalizado.