TEORÍA DE COLAS

- **Modelo M/M/1/k y M/M/s/k**

MODELO DE COLAS M/M/1/k

Este tipo de sistemas de colas se caracterizan por tener una cola finita, como indica la cuarta inicial de la notación de Kendall.

El número máximo de clientes en el sistema en estos modelos se encuentran limitado a k , que coincide con la suma del número de servidores y el tamaño de la cola, por lo que la capacidad de la cola es $(k-s)$

El modelo M/M/1/k es aquel en el que un servidor atiende todas las peticiones, por lo general este modelo se etiqueta como M/M/s/k para un número genérico de servidores.

Otra interpretación de este sistema es aquel en la que los clientes que llegan dejan la cola a partir de una determinada longitud ya que no están dispuestos a soportar una larga espera.

En esta situación, sí el sistema está lleno (la capacidad es k) no se permite la entrada de nuevos clientes al sistema. En consecuencia, la tasa de llegada efectiva no es constante y varía con el tiempo (dependiendo sí el sistema está o no lleno):

$$\lambda_{ef} = \lambda\,(1-p_k) \quad \text{donde} \quad p_n = \rho^n\, p_0 \quad \text{para } n = 0, 1, \ldots, k \quad \sum_{n=0}^{k} p_k = 1$$

El factor de saturación $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$ determina como varían las probabilidades p_n de que haya n clientes en el sistema.

Sí $\rho < 1 \rightarrow$ Los estados más probables son los de menor número de clientes, dado que la oferta de servicio supera a la demanda.

Sí $\rho = 1 \rightarrow$ Todos los estados son equiprobables.

Sí $\rho > 1 \rightarrow$ Los estados más probables son los de mayor número de clientes, pues la demanda de servicio supera a la oferta.

Probabilidades del estado: $p_n = \begin{cases} \dfrac{(1-\rho)\,\rho^n}{1-\rho^{k+1}} & n = 0, 1, 2, \ldots, k \\ 0 & n = k+1, k+2, \ldots \end{cases}$

En este caso, la solución para el estado estacionario existe incluso sí $\rho \geq 1$. Intuitivamente esto se debe a que la limitación de la capacidad del sistema provoca que éste no se desborde.

Tasa de llegada efectiva: $\lambda_{ef} = \lambda\,(1-p_k) = \lambda \left[1 - \dfrac{(1-\rho)\,\rho^k}{1-\rho^{k+1}} \right]$

Número promedio de clientes en el sistema: $L_s = \begin{cases} \dfrac{\rho}{(1-\rho)} - \dfrac{(k+1)\rho^{k+1}}{1-\rho^{k+1}} & \rho \neq 1 \\ \dfrac{k}{2} & \rho = 1 \end{cases}$

Número promedio de clientes en la cola: $L_q = L_s - (1-p_0) = \begin{cases} L_s - \dfrac{(1-\rho^k)\rho}{1-\rho^{k+1}} & \rho \neq 1 \\ \dfrac{k(k-1)}{2(k+1)} & \rho = 1 \end{cases}$

Tiempo promedio de estancia en el sistema: $W_s = \dfrac{L_s}{\lambda_{ef}}$

Tiempo promedio de espera en la cola: $W_q = W_s - \dfrac{1}{\mu}$ o $W_q = \dfrac{L_q}{\lambda_{ef}}$

Longitud de la cola: $L_q = \lambda_{ef} W_q$

MODELO DE COLAS M/M/s/k

En algunos sistemas la cola no puede albergar a un número indefinido de clientes. En este caso se dice que el sistema es de capacidad limitada.

El límite lo fija el parámetro k que incluye a los servidores.

Las tasas de llegada y servicio son:

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & n = 0, \cdots, k+s-1 \\ 0 & n = k+s, k+s+1, \cdots \end{cases} \qquad \mu_n = \begin{cases} n\mu & n = 1, \cdots, s \\ s\mu & n = s+1, s+2, \cdots \end{cases}$$

Las probabilidades de cada estado del sistema: $\left(\rho = \dfrac{\lambda}{s\,.\,\mu}\right)$

$$p_0 = \frac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{s} \frac{k!}{(k-n)!\,n!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \sum_{n=s+1}^{k} \frac{k!}{(k-n)!} \cdot \frac{1}{s!\,.\,s^{n-s}} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}$$

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{k!}{(k-n)!\;n!} \,.\, \rho^n \,.\, p_0 & 0 \leq n \leq s \\ \dfrac{k!}{(k-n)!} \cdot \dfrac{1}{s!\,.\,s^{n-s}} \,.\, \rho^n \,.\, p_0 & n \geq s \end{cases}$$

Número medio de clientes en cola:

$$L_q = \frac{1}{s!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \cdot \frac{\rho}{(1-\rho)^2} \cdot p_0 \cdot \left[1 - \rho^{k-s} - (k-s) \cdot \rho^{k-s} \cdot (1-\rho)\right]$$

Número medio de clientes en el sistema: $L_s = \sum_{n=0}^{k} n \cdot p_n = L_q + \frac{\lambda_{ef}}{\mu}$

Tasa media de llegada (entrada efectiva): $\lambda_{ef} = \lambda (k - L_s)$

Tiempo medio de clientes en cola: $W_q = \frac{L_q}{\lambda_{ef}}$

Tiempo medio de clientes en el sistema: $W_s = \frac{L_s}{\lambda_{ef}}$

En un taller mecánico llegan vehículos para una puesta a punto antes de pasar la ITV, las llegadas siguen un proceso de Poisson de promedio 18 vehículos/hora. Las dimensiones del taller sólo permiten que haya 4 vehículos, y las ordenanzas municipales no permiten esperar en la vía pública. El taller despacha un promedio de 6 vehículos/hora de acuerdo con una distribución exponencial. Se pide:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que no haya ningún vehículo en el taller?
b) ¿Cuál es el promedio de vehículos en el taller?
c) ¿Cuánto tiempo pasa por término medio un vehículo en el taller?
d) ¿Cuánto tiempo esperan por término medio los vehículos en la cola?
e) ¿Cuál es la longitud media de la cola?

Solución:

a) Es un modelo de cola M/M/1/k con $k = 4$ vehículos

Hay un sola cola, con disciplina FIFO, la capacidad del sistema es limitada, de modo que sólo puede haber 4 vehículos como máximo en el taller, con lo cual el número máximo de vehículos en la cola es $(4-1)$. Las llegadas siguen un proceso de Poisson de parámetro $\lambda = 18$ vehículos/hora, los tiempos entre llegadas se distribuyen exponencialmente $\text{Exp}(\lambda = 18)$, los tiempos entre servicios se distribuyen exponencialmente $\text{Exp}(\mu = 6)$ siendo $\mu = 6$ vehículos/hora el número medio que el taller (servidor) es capaz de atender.

El factor de saturación $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} = \dfrac{18}{6} = 3$ determina como varían las probabilidades p_n de que haya n vehículos en el sistema.

Probabilidad de que no haya ningún vehículo en el taller:

$$p_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{k+1}} = \frac{1-3}{1-3^5} = 0{,}00826$$

b) Promedio de vehículos en el taller (sistema):

$$L_s = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(k+1)\rho^{k+1}}{1-\rho^{k+1}} = \frac{3}{1-3} - \frac{5 \times 3^5}{1-3^5} = -\frac{3}{2} + \frac{1215}{242} = 3{,}52 \text{ vehículos}$$

c) Tiempo promedio de un vehículo en el taller: $W_s = \dfrac{L_s}{\lambda_{ef}}$

Tasa de llegada efectiva:

$$\lambda_{ef} = \lambda\left[1 - \frac{(1-\rho)\,\rho^k}{1-\rho^{k+1}}\right] = 18\left[1 - \frac{(1-3)\,3^4}{1-3^5}\right] = 5{,}95 \text{ vehículos/hora}$$

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda_{ef}} = \frac{3,52}{5,95} = 0,5916 \text{ horas}$$

d) Tiempo medio de espera en la cola de vehículos:

$$W_q = W_s - \frac{1}{\mu} = 0,5916 - \frac{1}{6} = 0,4249 \text{ horas}$$

e) Longitud de la cola: $L_q = \lambda_{ef} W_q = 5,95 \text{ x } 0,4249 = 2,528$ vehículos

o bien, $L_q = L_s - \dfrac{(1-\rho^k)\rho}{1-\rho^{k+1}} = 3,52 - \dfrac{(1-3^4)3}{1-3^5} = 2,528$ vehículos

Un taller utiliza 10 máquinas idénticas. Cada máquina deja de funcionar en promedio una vez cada 7 horas. Un operario puede reparar una máquina en 4 horas en promedio, pero el tiempo de reparación real varía según una distribución exponencial.
Interpretar y comparar las respuestas:
a) El número mínimo de mecánicos que se necesita para que el número estimado de máquinas que fallan sea menor que 4
b) El número mínimo de mecánicos que se necesita, de manera que la demora esperada hasta que se repare una máquina sea menor que 4 horas

Solución:

a) Es un modelo de cola M/M/1/k con $k = 10$ máquinas

$$\lambda = \frac{1}{7} \text{ maquina/hora} = 0,1428 \text{ maquina/hora}$$

$$\mu = \frac{1}{4} \text{ maquina/hora} = 0,25 \text{ maquina/hora}$$

Factor de saturación: $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} = \dfrac{4}{7} = 0,5714$

Número promedio de máquinas en el sistema:

$$L_s = \frac{\rho}{(1-\rho)} - \frac{(k+1)\rho^{k+1}}{1-\rho^{k+1}} = \frac{0,5714}{(1-0,5714)} - \frac{11\,.\,0,5714^{11}}{1-0,5714^{11}} = 1,3098$$

Tiempo promedio de estancia en el sistema:

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{1,3098}{0,1428} = 9,1722 \text{ horas}$$

Con 1 mecánico hay 1,31 máquinas que no funcionan en el sistema, es menor que 4

b) Tiempo promedio de estancia en la cola: $W_q < 4$ **horas**

Si es un mecánico: $W_q = W_s - \dfrac{1}{\mu} = 9,1722 - \dfrac{1}{0,25} = 5,1722$

- **Si son 2 mecánicos es un modelo de cola M/M/2/10 con población finita**

$$p_0 = \frac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{s} \frac{k!}{(k-n)!\,n!}\,.\,\rho^n + \sum_{n=s+1}^{k} \frac{k!}{(k-n)!}\,.\,\frac{1}{s!\,.\,s^{n-s}}\,.\,\rho^n}$$

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{k!}{(k-n)!\;n!}\,.\,\rho^n.\;p_0 & 0 \le n \le s \\[2ex] \dfrac{k!}{(k-n)!}\,.\,\dfrac{1}{s!\,.\,s^{n-s}}\,.\,\rho^n.\;p_0 & n \ge s \end{cases}$$

$$p_0 = \frac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{2} \frac{10!}{(10-n)!\,n!}\,.\,0,5714^n + \sum_{n=3}^{10} \frac{10!}{(10-n)!}\,.\,\frac{1}{2!\,.\,2^{n-s}}\,.\,0,5714^n} =$$

$$= \frac{1}{20,4064 + 847,6732} = \frac{1}{868,0796} = 0,00115$$

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{2} \frac{10!}{(10-n)!\,n!}\,.\,\rho^n = \frac{10!}{10!\,10!} + \frac{10!}{9!\,1!}\,.\,0,5714 + \frac{10!}{8!\,2!}\,.\,0,5714^2 = 20,40641$

- $\displaystyle\sum_{n=3}^{10} \frac{10!}{(10-n)!}\,.\,\frac{1}{2!\,.\,2^{n-s}}\,.\,0,5714^n = \frac{10!}{7!}\,.\,\frac{1}{2!\,.\,2}\,.\,0,5714^3 + \frac{10!}{6!}\,.\,\frac{1}{2!\,.\,2^2}\,.\,0,5714^4 +$

$$= \frac{10!}{5!}\,.\,\frac{1}{2!\,.\,2^3}\,.\,0,5714^5 + \frac{10!}{4!}\,.\,\frac{1}{2!\,.\,2^4}\,.\,0,5714^6 + \frac{10!}{3!}\,.\,\frac{1}{2!\,.\,2^5}\,.\,0,5714^7 +$$

$$+ \frac{10!}{2!}\,.\,\frac{1}{2!\,.\,2^6}\,.\,0,5714^8 + \frac{10!}{1!}\,.\,\frac{1}{2!\,.\,2^7}\,.\,0,5714^9 + \frac{10!}{0!}\,.\,\frac{1}{2!\,.\,2^8}\,.\,0,5714^{10} = 847,6732$$

- $p_1 = \dfrac{10!}{9!\,1!}\,.\,0,5714\,.\;0,00115 = 0,0065 \qquad p_2 = \dfrac{10!}{8!\,2!}\,.\,0,5714^2\;.\;0,00115 = 0,0169$

- $p_3 = \dfrac{10!}{7!} \cdot \dfrac{1}{2!\,2^{3-2}} \cdot 0,5714^3 \ .\ 0,00115 = 0,0386$

$$p_4 = \frac{10!}{6!} \cdot \frac{1}{2!\,2^{4-2}} \cdot 0,5714^4 \ .\ 0,00115 = 0,0772$$

$$p_5 = 0,1324 \quad p_6 = 0,1892 \quad p_7 = 0,2162 \quad p_8 = 0,1853 \quad p_9 = 0,1059 \quad p_{10} = 0,0302$$

Número promedio de máquinas en el sistema:

$$L_s = \sum_{n=0}^{k} n \,.\, p_n \quad \rightarrow \quad L_s = \sum_{n=0}^{10} n \,.\, p_n = 6,513$$

Tasa de no funcionamiento efectivo:

$$\lambda_{ef} = \lambda\,(k - L_s) = 0,1428\ (10 - 6,513) = 0,4979$$

Tiempo promedio de estancia en el sistema: $W_s = \dfrac{L_s}{\lambda_{ef}} = \dfrac{6,513}{0,4979} = 13,081$ **horas**