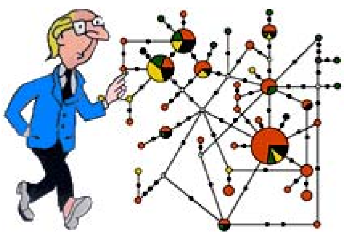
Universidad Autónoma de Madrid

Instrumentos Estadísticos Avanzados
Facultad Ciencias Económicas y Empresariales
Departamento de Economía Aplicada
Profesor: Santiago de la Fuente Fernández

GESTIÓN DE PROYECTOS CPM - ACKOFF - SASIENI
TÉCNICAS DE EVALUACIÓN Y REVISIÓN DE PROYECTOS



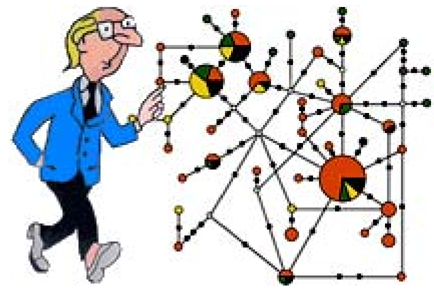
- CPM - MCE
- Algoritmo de Ackoff - Sasieni

Universidad Autónoma de Madrid

Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....



CPM - MCE

Algoritmo de Ackoff - Sasieni

(IMPRESO EN PAPEL RECICLADO) UNICAMENTE PARA USO ESCOLAR

MÉTODO CPM - RUTA CRÍTICA

El método CPM (Critical Path Method) es frecuentemente utilizado en el desarrollo y control de proyectos. El objetivo principal es determinar la duración de un proyecto, entendiendo éste como una secuencia de actividades relacionadas entre sí, donde cada una de las actividades tiene una duración estimada.

La realización de cualquier proyecto lleva dos costes: Los directos que provienen de factores directamente imputables a cada tarea (coste del equipo, materias primas, horas de máquina, horas de hombres, etc.), y los indirectos que son imputables mediante claves de distribución (gastos generales, multas, supervisión, etc.).

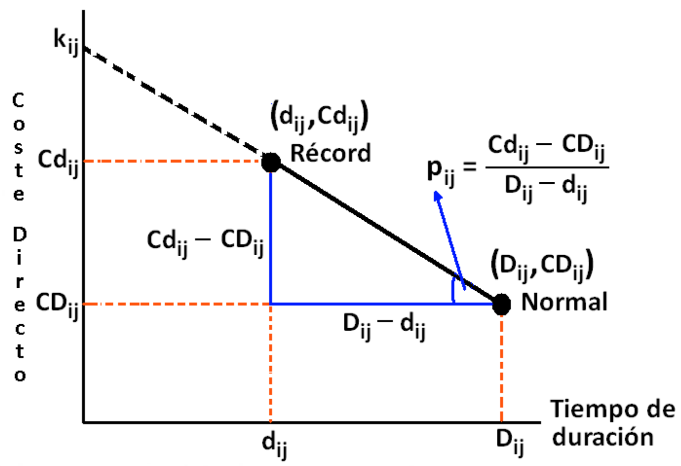
Las versiones originales de los métodos PERT Y CPM se diferencian en dos aspectos importantes:

- El método PERT supone que los tiempos de ejecución son probabilísticos, mientras que el método CPM supone que las actividades son determinísticas.
- El método CPM asigna la misma importancia al tiempo y al coste.

ESTRUCTURA DEL PROBLEMA CPM

El objetivo fundamental de la técnica CPM, es determinar el cambio entre tiempo y coste que debe emplearse en cada actividad, para cumplir con el tiempo de finalización del proyecto programado a un coste mínimo.

Los costes directos de una actividad suelen estar relacionados inversamente con su duración.



Cuando se reduce la duración de una actividad (i, j) a partir de un punto (D_{ij}, CD_{ij}) llega un momento en el que resulta imposible disminuirla por debajo de un cierto valor d_{ij} denominado duración récord.

El punto (d_{ij}, Cd_{ij}) proporciona el tiempo y el coste necesarios cuando se realiza la actividad de forma intensiva, es decir, se acelera completamente sin reparar en costes.

Al aumentar la actividad llega un momento D_{ij} en que los costes dejan de disminuir, esta duración se denomina normal.

El punto determinado (D_{ij}, CD_{ij}) proporciona el coste y tiempo necesarios cuando la actividad se realiza de forma normal, sin recurrir a costes adicionales (horas extra, materiales especiales, etc.) para acelerar la actividad.

Variables de decisión: $x_{ij} \equiv$ tiempo de duración de la actividad (i, j)

Naturalmente, cuando es necesario acortar la duración de un proyecto, se desea hacerlo con el mínimo coste posible. Se hace necesario calcular las pendientes de coste de todas las actividades.

Las pendientes de coste representan el incremento de coste directo producido al reducir la duración del proyecto en una unidad de tiempo.

Incremento coste directo: $p_{ij} = \dfrac{Cd_{ij} - CD_{ij}}{D_{ij} - d_{ij}}$ pendiente coste actividad (i, j)

Para cada actividad (i, j): $\begin{cases} CD_{ij} \equiv \text{Coste directo normal} & D_{ij} \equiv \text{Tiempo normal} \\ Cd_{ij} \equiv \text{Coste directo récord} & d_{ij} \equiv \text{Tiempo récord} \end{cases}$

FORMULACIÓN DEL PROBLEMA CPM MEDIANTE PROGRAMACIÓN LINEAL

Durante un tiempo máximo T de finalización del proyecto, se deben determinar las duraciones x_{ij} que minimicen el coste total.

Para tener en cuenta la finalización del proyecto se necesita una variable para cada suceso:

$y_i \equiv$ tiempo más temprano (desconocido) del suceso i-ésimo.

Designando por k_{ij} la ordenada en el origen de la actividad (i, j), el coste directo total del proyecto será: $CD\,(T) = \sum_{i,j} (k_{ij} - p_{ij}\, x_{ij})$

El problema queda reducido a: $\text{Max } z = \sum_{i,j} -p_{ij}\, x_{ij}$

Sujeto a las restricciones: $\begin{cases} x_{ij} \geq d_{ij} \\ x_{ij} \leq D_{ij} \\ y_i + x_{ij} - y_j \leq 0 \\ y_n \leq T \\ x_{ij} \geq 0 \quad y_i \geq 0 \end{cases}$

Una vez obtenida la solución para diversos valores de T, será preciso combinar los resultados obtenidos, con los costes indirectos para determinar el valor óptimo de T.

PROGRAMACIÓN DE PROYECTOS A COSTE MÍNIMO (M.C.E)

Surge como prolongación del Método del Camino Crítico (C.P.M.) al analizar la relación que existe entre la duración de una actividad y el coste necesario para realizarla.

El método M.C.E. estudia las diferentes actividades en que se desarrolla un proyecto, considerando para cada una de ellas un intervalo de tiempo comprendido entre un tiempo normal y un tiempo tope (récord). Cada uno de estos tiempos se refiere a un nivel de utilización de recursos.

Puesto que cada actividad tiene una duración entre el tiempo normal y el tiempo tope, la duración total del proyecto también estará comprendida en un intervalo (tiempo máximo y tiempo mínimo), dependiendo del nivel que se están utilizando los recursos.

UAM Universidad Autónoma de Madrid

Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....

A diferencia del método PERT, se considera que la duración de cada actividad no es una cantidad fija, que sólo puede variar por circunstancias aleatorias, sino que, por el contrario, la duración de cada actividad varía de acuerdo con el nivel de utilización de recursos. En consecuencia, a cada nivel de recursos le corresponde una duración determinada para cada actividad.

La resolución del método M.C.E. da lugar a un problema de programación lineal paramétrica. Debido a lo complicado que puede resultar éste proceso operativo, se utiliza algún algoritmo específico (Ackoff y Sasieni).

El algoritmo de Ackoff y Sasieni permite abordar el problema planteado por el método M.C.E de una manera mucho más sencilla y operativa que lo hacen los algoritmos clásicos de programación paramétrica.

ALGORITMO DE ACKOFF - SASIENI: SIMULACIÓN EN MICROCOMPUTADORES

PASO 1: Construir una matriz cuyas filas representen las diferentes rutas existentes de comienzo a fin del proyecto y, por columnas las diferentes actividades que componen el proyecto.
Cada elemento (i, j) de la matriz, representará la pendiente de coste de la actividad que ocupa la columna j-ésima siempre y cuando pertenezca a la ruta de la fila i-ésima; en otro caso se deja en blanco.
Se requiere que la matriz tenga tantas columnas como pendientes de coste posea.

PASO 2: Se amplía la matriz obtenida con una columna cuyos elementos representen las duraciones normales de las respectivas rutas, y una fila cuyos elementos indiquen la diferencia entre las duraciones normal y récord de cada actividad (acortamiento posible).

PASO 3: Se selecciona la actividad de menor pendiente en cada de las rutas críticas del proyecto (caso de existir varias) y se determina el tiempo de acortamiento.
Para ello se calcula el mínimo de las cantidades:
- Acortamiento máximo de las actividades sin que cambie su pendiente.
- Diferencia entre la duración de la ruta crítica y del primer subcrítico.

PASO 4: Una vez calculado el tiempo de acortamiento, se determina el incremento en el coste directo y el coste indirecto para la duración resultante. Se calcula el coste total y se amplia la matriz con una nueva columna, que represente las nuevas duraciones de las rutas y una fila para mostrar los nuevos acortamientos posibles.

El algoritmo continúa hasta encontrar una ruta crítica irreducible.

UAM
Universidad Autónoma de Madrid

Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

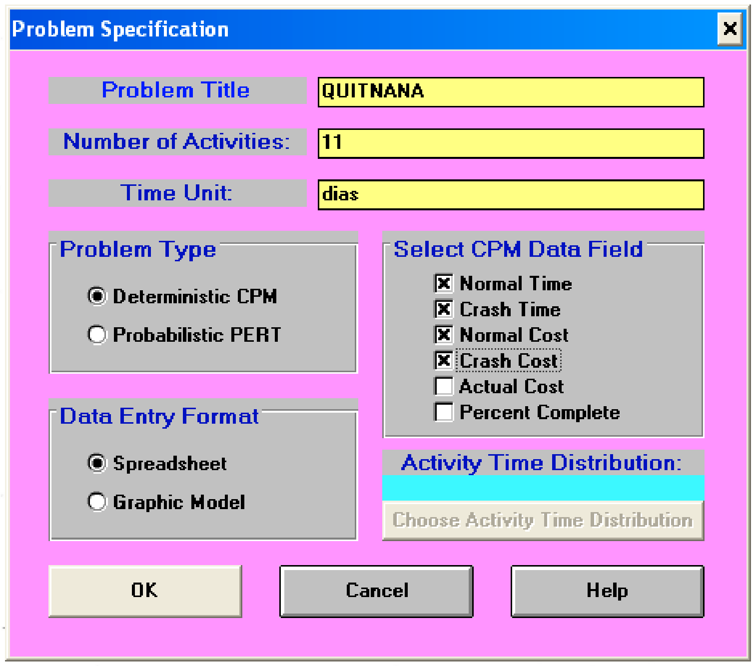
Ejercicio del día ....

La empresa Quintana S.A. programó 11 actividades para el asfaltado de la pista de aterrizaje de un aeropuerto. En la tabla adjunta se refleja la duración en días y las precedencias establecidas.

Actividad	Asignación	Predecesores	Tiempos		Costes	
			Normal	Quiebre	Normal	Quiebre
Excavación	A	----	15	10	1000	1200
Sub-Base	B	A	7	6	3000	3500
Compactación	C	B	2	2	700	700
Base	D	C	4	2	1200	2400
Compactación	E	D	1	1	700	700
Canaletas	F	C	6	3	1500	2700
Pegante	G	A , E	1	1	1100	1100
Capa asfalto	H	F, G	3	2	4700	5200
Compactación	I	H	1	1	800	800
Pruebas Base	J	E	2	1	400	1100
Pruebas Asfalto	K	I	2	1	900	1300

a) Construir una red de proyectos incluyendo un análisis de tiempo/coste
b) Analizar el proyecto hasta el día 26 de ejecución.
c) El contrato con la empresa establece que si finaliza el proyecto antes 30 días recibe 2500 dólares por día anticipado, mientras que si lo termina después de este tiempo tiene una sanción de 5.000 dólares por día incumplido. ¿Cuándo deberían finalizar las actividades a mínimo costo?

PERT / CPM: Problem Specification - CPM



Normal Time: Permite especificar el tiempo normal de cada actividad.
Crash Time: Tiempo mínimo en que se podría reducir una actividad.

Normal Cost: Costo para realizar una actividad ejecutada en un tiempo normal, este costo es presupuestado

Universidad Autónoma de Madrid

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

Actual Cost: Costo de una actividad real.

Percent Complete: Realiza un análisis de costos y tiempos de forma parcial o total a un proyecto que ha sido ejecutado.

a) Ruta crítica con los tiempos normales: Solve and Analyze / Solve Critical Path Using Normal Time

PERT/CPM

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

QUINTANA

Activity Number	Activity Name	Immediate Predecessor (list number/name, separated by ',')	Normal Time	Crash Time	Normal Cost	Crash Cost
1	A		15	10	1000	1200
2	B	A	7	6	3000	3500
3	C	B	2	2	700	700
4	D	C	4	2	1200	2400
5	E	D	1	1	700	700
6	F	C	6	3	1500	2700
7	G	A,E	1	1	1100	1100
8	H	F,G	3	2	4700	5200
9	I	H	1	1	800	800
10	J	E	2	1	400	1100
11	K	I	2	1	900	1300

	Activity Name	On Critical Path	Activity Time	Earliest Start	Earliest Finish	Latest Start	Latest Finish	Slack (LS-ES)
1	Excavación	Yes	15	0	15	0	15	0
2	Sub-Base	Yes	7	15	22	15	22	0
3	Compactación	Yes	2	22	24	22	24	0
4	Base	Yes	4	24	28	24	28	0
5	Compactación	Yes	1	28	29	28	29	0
6	Canaletas	Yes	6	24	30	24	30	0
7	Pegante	Yes	1	29	30	29	30	0
8	Capa asfalto	Yes	3	30	33	30	33	0
9	Compactación	Yes	1	33	34	33	34	0
10	Pruebas Base	no	2	29	31	34	36	5
11	Pruebas Asfalto	Yes	2	34	36	34	36	0
	Project	Completion	Time	=	36	dias		
	Total	Cost of	Project	=	$16.000	(Cost on	CP =	$15.600)
	Number of	Critical	Path(s)	=	3			

On Critical Path: Actividades críticas de la red

Earliest Start - Earliest Finish: Tiempos más próximos de inicio y finalización

Latest Start y Latest Finish: Tiempos tardíos

Slack: Tiempos de holgura

Project Completion Time: Tiempo de duración total del proyecto

Number of Critical Path: 3 rutas críticas

UAM Universidad Autónoma de Madrid

Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....

Rutas Críticas: Results / Show Critical Path

A – B – C – D – E – G – H – I – K

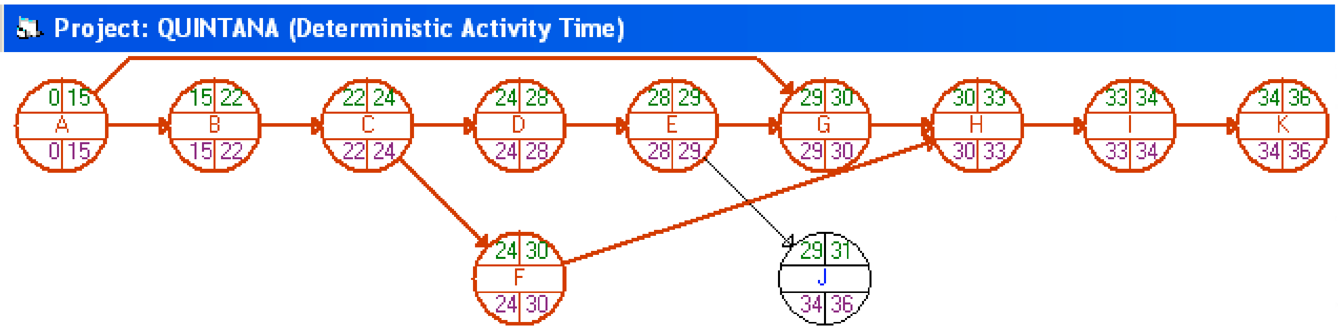
A – B – C – F – H – I – K

A – G – H – I – K

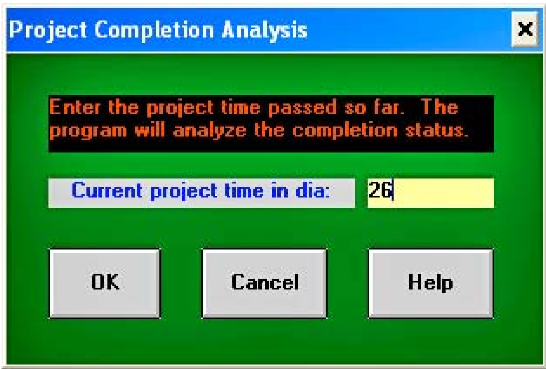
Critical Path(s) for QUINTANA (Using Normal Time)

	Critical Path 1	Critical Path 2	Critical Path 3
1	A	A	A
2	B	B	G
3	C	C	H
4	D	F	I
5	E	H	K
6	G	I	
7	H	K	
8	I		
9	K		
Completion Time	36	36	36

Gráfico rutas críticas: Results / Graphic Activity Analysis



b) Con el análisis del estado del proyecto (Results / Project Completion Analysis) se pueden analizar las actividades que han sido ejecutadas o que se encuentran en ejecución una vez pasado cierto tiempo.



Completion Analysis at dia 26 for QUINTANA (Using Normal Time)

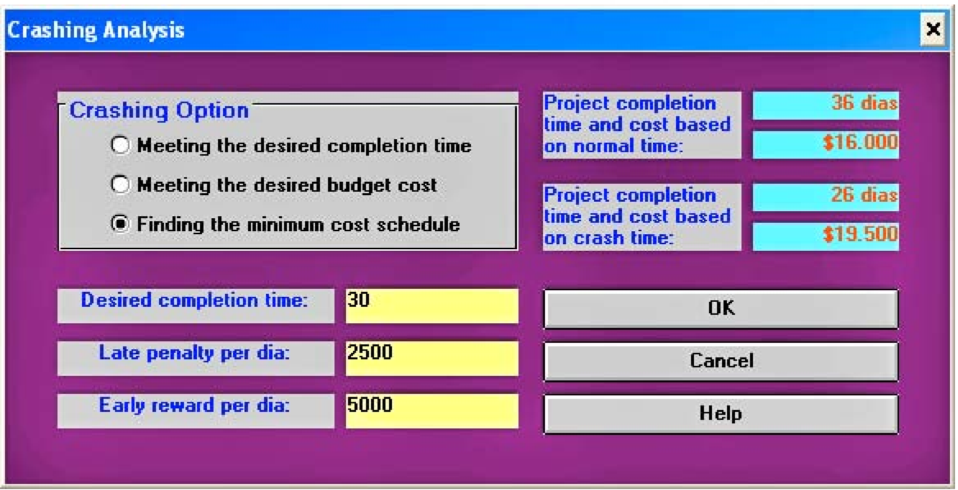
	Activity Name	On Critical Path	Activity Time	Latest Start	Latest Finish	Planned % Completion
1	A	Yes	15	0	15	100
2	B	Yes	7	15	22	100
3	C	Yes	2	22	24	100
4	D	Yes	4	24	28	50
5	E	Yes	1	28	29	0
6	F	Yes	6	24	30	33,3333
7	G	Yes	1	29	30	0
8	H	Yes	3	30	33	0
9	I	Yes	1	33	34	0
10	J	no	2	34	36	0
11	K	Yes	2	34	36	0
	Overall	Project:		0	36	72,2222

Hasta el día 26 de ejecución del proyecto las actividades 1, 2 y 3 se encuentran terminadas.

La actividad 4 se encuentra terminada al 50%, y la actividad 6 está completa en un 33,33%.

La ejecución total del proyecto se encuentra finalizado en un 72,22%.

c) Para analizar las costos sobre el proyecto: Results / Perform Crashing Analysis



Opciones para el Análisis:

- Meeting the Desired Completion Time: Fijado el tiempo deseado para finalizar el proyecto determinar la secuencia de ejecución así como el coste estimado.
  Desired Completion Time: Fijado el coste del proyecto determinar la secuencia y duración.
  Late Penalty per Día: Multa por retraso
  Early Reward per Día: Recompensa si finaliza antes
- Meeting the Desired Budget Cost: Conociendo el presupuesto deseado
  Desired Budget Cost: Costo deseado presupuestado
  Modifica tiempo de las actividades (normal, quiebre)
- Finding the Minimun Cost Schedule: Determinar la secuencia de mínimo coste.

Se genera una tabla donde aparece el tiempo ideal en que se deben ejecutar las actividades.

Crashing Analysis for QUINTANA

	Activity Name	Critical Path	Normal Time	Crash Time	Suggested Time	Additional Cost	Normal Cost	Suggested Cost
1	Excavación	Yes	15	10	10	$200	$1.000	$1.200
2	Sub-Base	Yes	7	6	6	$500	$3.000	$3.500
3	Compactación	Yes	2	2	2	0	$700	$700
4	Base	Yes	4	2	2	$1.200	$1.200	$2.400
5	Compactación	Yes	1	1	1	0	$700	$700
6	Canaletas	Yes	6	3	4	$800	$1.500	$2.300
7	Pegante	Yes	1	1	1	0	$1.100	$1.100
8	Capa asfalto	Yes	3	2	2	$500	$4.700	$5.200
9	Compactación	Yes	1	1	1	0	$800	$800
10	Pruebas Base	no	2	1	2	0	$400	$400
11	Pruebas Asfalto	Yes	2	1	1	$400	$900	$1.300
	Early	Reward:						($20.000)
	Overall	Project:			26	$3.600	$16.000	($400)

Si el proyecto termina en 26 días hay un ahorro de 20.000 euros.

Universidad Autónoma de Madrid

Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

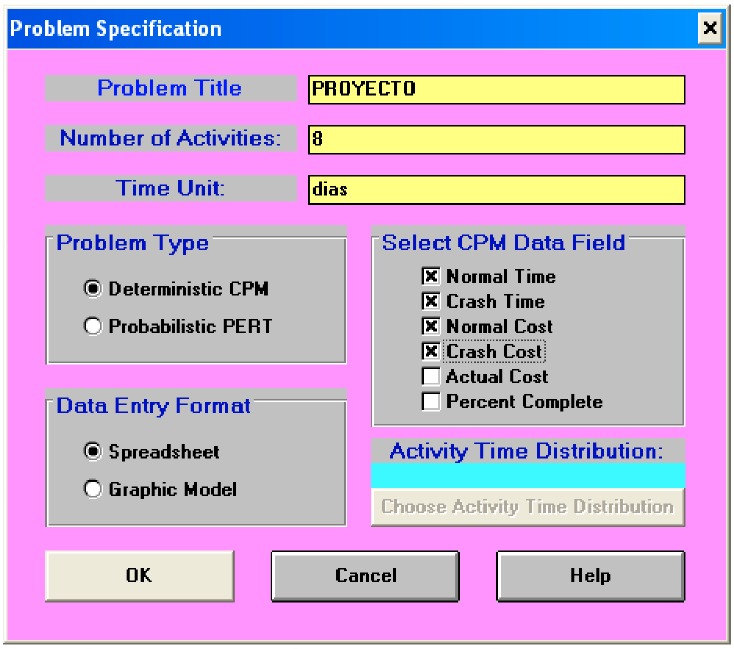
Ejercicio del día ....

Un proyecto aeroportuario está formado por 8 actividades, en la tabla adjunta aparece el orden en que deben ejecutarse, donde los tiempos necesarios se reflejan en días y los costes en miles de euros.

Asignación	Predecesores	Tiempos		Costes	
		Normal	Quiebre	Normal	Quiebre
A	----	5	5	3	3
B	----	6	5	7	8
C	A , B	2	1	9	12
D	A , B	9	6	5	8
E	C	4	4	6	6
F	C , D	6	4	3	6
G	C , D	8	8	7	7
H	F , G	1	1	8	8

a) Calcular las rutas crítica y el diagrama de Gantt
b) Analizar el proyecto a los 19 días del comienzo de la actividad
c) Obtener un gráfico y una tabla con la evolución de los costes a lo largo del proyecto

PERT / CPM: Problem Specification - CPM



Normal Time: Permite especificar el tiempo normal de cada actividad.

Crash Time: Tiempo mínimo en que se podría reducir una actividad.

Normal Cost: Costo para realizar una actividad ejecutada en un tiempo normal, este costo es presupuestado.

Actual Cost: Costo de una actividad real.

Percent Complete: Realiza un análisis de costos y tiempos de forma parcial o total a un proyecto que ha sido ejecutado.

UAM
Universidad Autónoma de Madrid

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

PERT/CPM

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

PROYECTO

Activity Number	Activity Name	Immediate Predecessor (list number/name, separated by ',')	Normal Time	Crash Time	Normal Cost	Crash Cost
1	A		5	5	3	3
2	B		6	5	7	8
3	C	A,B	2	1	9	12
4	D	A,B	9	6	5	8
5	E	C	4	4	6	6
6	F	C,D	6	4	3	6
7	G	C,D	8	8	7	7
8	H	F,G	1	1	8	8

a) **Activity Analysis for PROYECTO (Using Normal Time)**

	Activity Name	On Critical Path	Activity Time	Earliest Start	Earliest Finish	Latest Start	Latest Finish	Slack (LS-ES)
1	A	no	5	0	5	1	6	1
2	B	Yes	6	0	6	0	6	0
3	C	no	2	6	8	13	15	7
4	D	Yes	9	6	15	6	15	0
5	E	no	4	8	12	20	24	12
6	F	no	6	15	21	17	23	2
7	G	Yes	8	15	23	15	23	0
8	H	Yes	1	23	24	23	24	0
	Project	Completion	Time	=	24	dias		
	Total	Cost of	Project	=	$48	(Cost on	CP =	$27)
	Number of	Critical	Path(s)	=	1			

Earliest Start → Tiempo más temprano en el que puede comenzar una actividad

Earliest Finish $=$ Earliest Start $+\ t_{ij}$ → Tiempo más temprano en que puede terminar la actividad

Latest Start $= TT - t_{ij}$ → Tiempo más tardío en el que puede comenzar la actividad

Latest Finish → Tiempo más tardío en el que puede terminar la actividad

Slack → Holgura

La duración del proyecto es de 24 días y solo existe una ruta crítica.

Critical Path(s) for PROYECTO (Using Normal Time)

	Critical Path 1
1	B
2	D
3	G
4	H
Completion Time	24

Ruta crítica: Results / Show Critical Path

B – D – G – H (24 días)

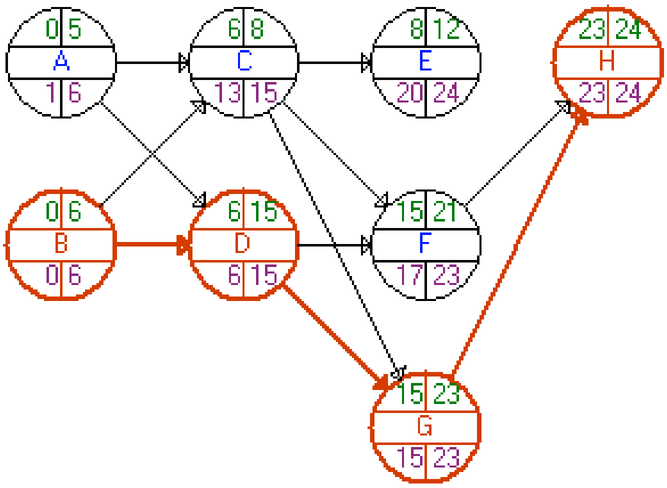
UNICAMENTE PARA USO ESCOLAR (IMPRESO EN PAPEL RECICLADO)

UAM
Universidad Autónoma de Madrid

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

Gráfico de la red:

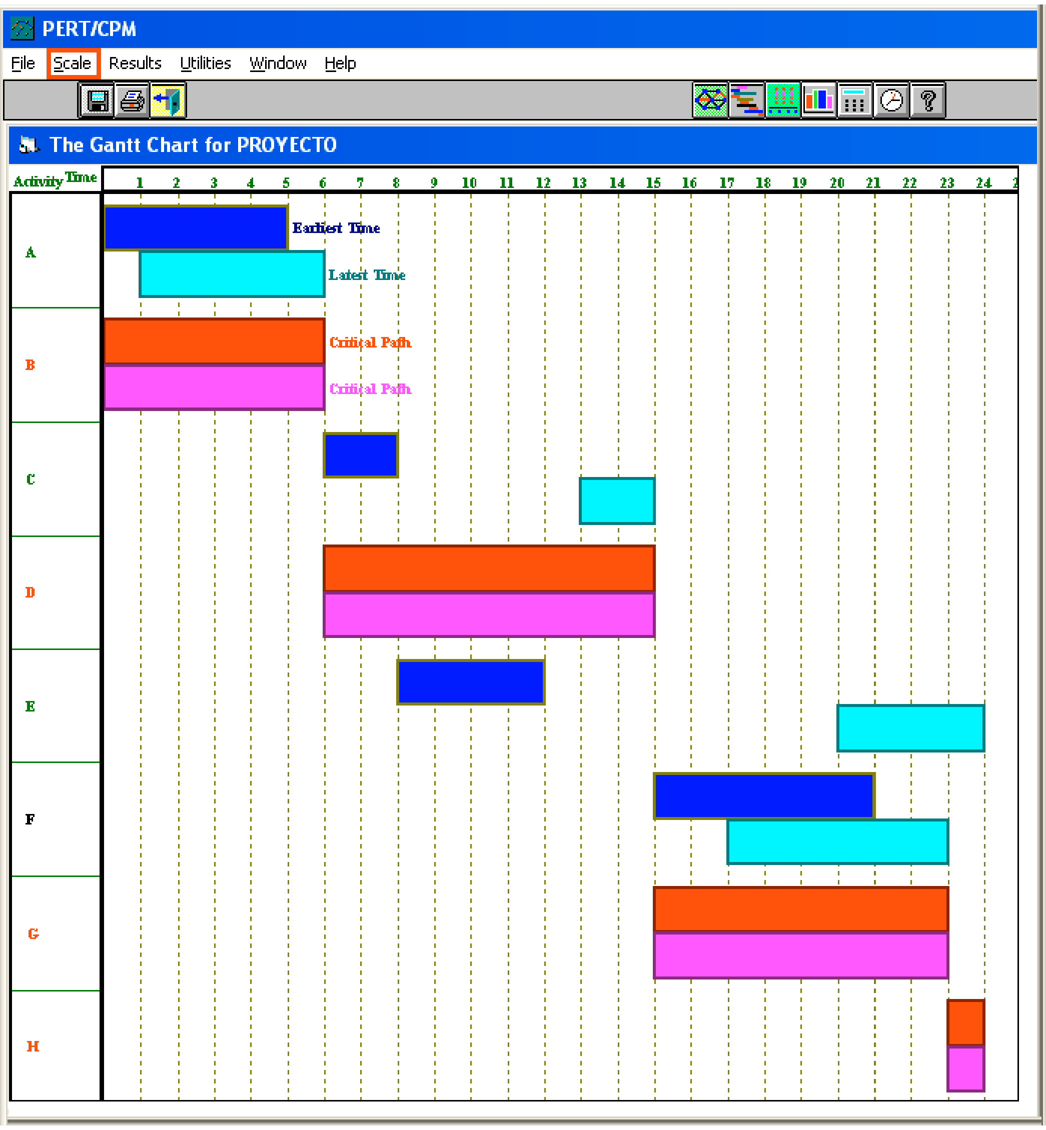
Solve and Analyze / Solve Critical Path
Results / Graphics Activity Analisys



La ruta crítica (B – D – G – H) está formada por las actividades con holgura cero, cuya demora produciría un aumento en la duración del proyecto.

El gráfico de Gantt se utiliza para calcular la duración y el control del proyecto, en el eje de ordenadas se representan las actividades del proyecto y en el de abscisas el tiempo.

Results/ Gantt Chart



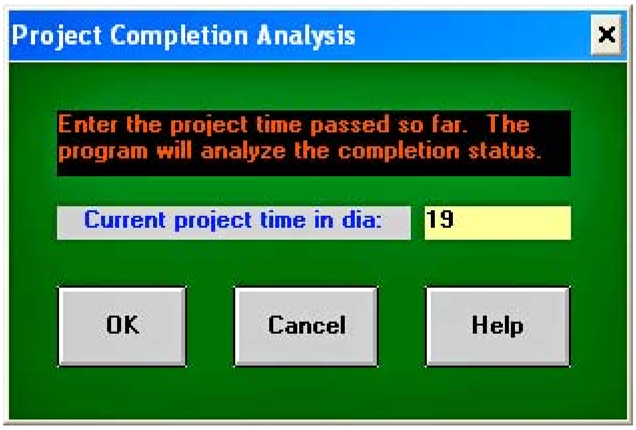
UAM
Universidad Autónoma de Madrid

Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....

b) Con el análisis del estado del proyecto (Results / Project Completion Analysis) se pueden analizar las actividades que han sido ejecutadas o que se encuentran en ejecución una vez pasado cierto tiempo.



Completion Analysis at dia 19 for PROYECTO (Using Normal Time)

	Activity Name	On Critical Path	Activity Time	Latest Start	Latest Finish	Planned % Completion
1	A	no	5	1	6	100
2	B	Yes	6	0	6	100
3	C	no	2	13	15	100
4	D	Yes	9	6	15	100
5	E	no	4	20	24	0
6	F	no	6	17	23	33,3333
7	G	Yes	8	15	23	50
8	H	Yes	1	23	24	0
	Overall	Project:		0	24	79,1667

El día 19 de ejecución del proyecto las actividades 1, 2 , 3 y 4 se encuentran terminadas, la actividad 6 se encuentra realizada en un 33,33%, y la actividad 7 se encuentra realizada en un 50%.

La ejecución total del proyecto se encuentra finalizado en un 79,17%.

c) Para obtener la evolución de los costes a lo largo del proyecto, bien en formato tabla o gráfico, se recurre a la opción: Results / PERT / Cost - Table o Results / PERT / Cost - Graphic

PERT/Cost Analysis for PROYECTO (Using Normal Time)

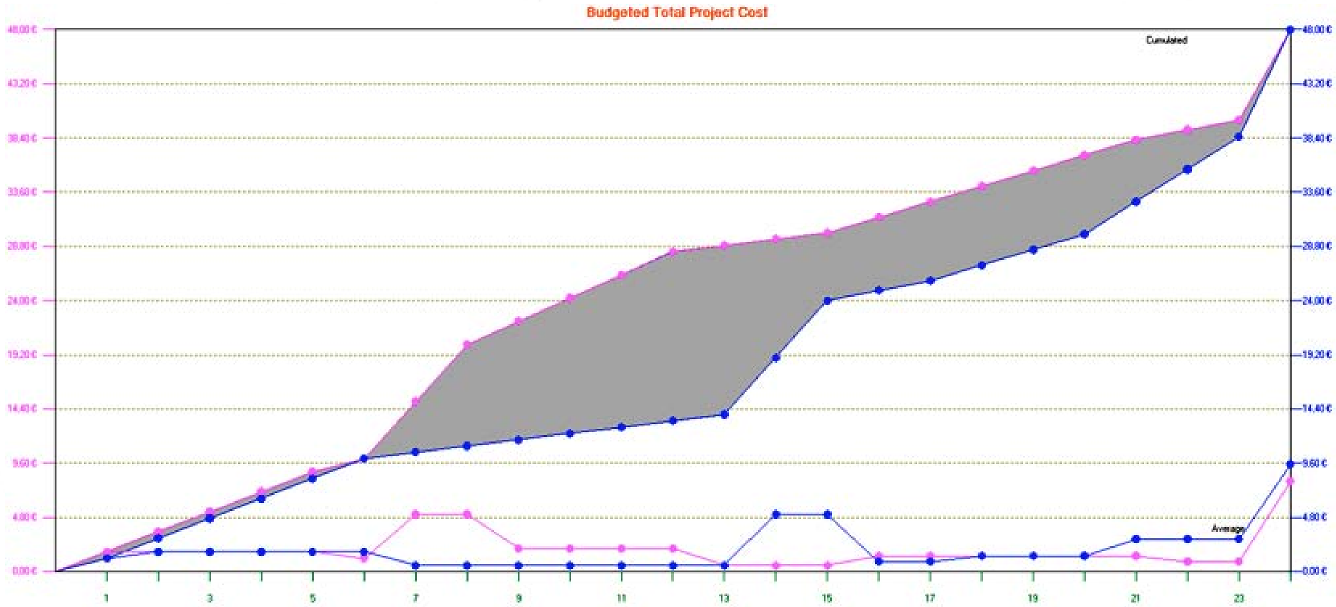
	Project Time in dia	Cost Schedule Based on ES	Cost Schedule Based on LS	Total Cost Based on ES	Total Cost Based on LS
1	1	1,77 €	1,17 €	1,77 €	1,17 €
2	2	1,77 €	1,77 €	3,53 €	2,93 €
3	3	1,77 €	1,77 €	5,30 €	4,70 €
4	4	1,77 €	1,77 €	7,07 €	6,47 €
5	5	1,77 €	1,77 €	8,83 €	8,23 €
6	6	1,17 €	1,77 €	$10	10,00 €
7	7	5,06 €	0,56 €	15,06 €	10,56 €
8	8	5,06 €	0,56 €	20,11 €	11,11 €
9	9	2,06 €	0,56 €	22,17 €	11,67 €
10	10	2,06 €	0,56 €	24,22 €	12,22 €
11	11	2,06 €	0,56 €	26,28 €	12,78 €
12	12	2,06 €	0,56 €	28,33 €	13,33 €
13	13	0,56 €	0,56 €	28,89 €	13,89 €
14	14	0,56 €	5,06 €	29,44 €	18,94 €
15	15	0,56 €	5,06 €	30,00 €	24,00 €
16	16	1,38 €	0,88 €	31,37 €	24,87 €
17	17	1,38 €	0,88 €	32,75 €	25,75 €
18	18	1,38 €	1,38 €	34,13 €	27,12 €
19	19	1,38 €	1,38 €	35,50 €	28,50 €
20	20	1,38 €	1,38 €	36,88 €	29,87 €
21	21	1,38 €	2,88 €	38,25 €	32,75 €
22	22	0,88 €	2,88 €	39,13 €	35,63 €
23	23	0,88 €	2,88 €	$40	38,50 €
24	24	$8	9,50 €	$48	$48

Universidad Autónoma de Madrid

Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....



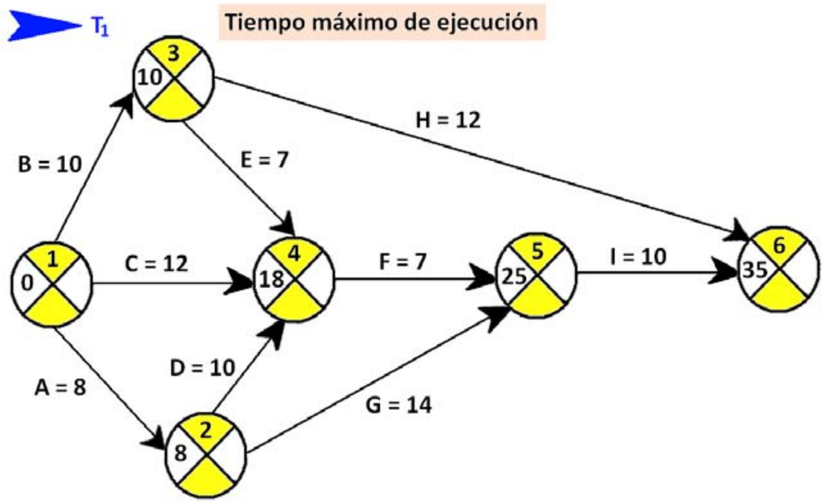
Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

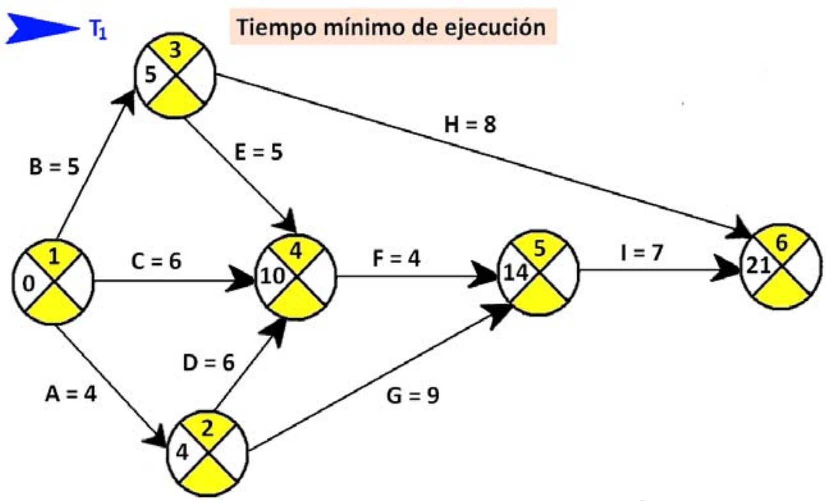
ALGORITMO DE ACKOFF Y SASIENI: SIMULACIÓN DE MICROCOMPUTADOR

Calcular la duración mínima de un proyecto de nueve actividades aeronáuticas (A , B , C , D , E , F , G , H , I) con tiempos de ejecución a un coste mínimo.
En la tabla se presentan las actividades, los días de ejecución y el coste unitario en euros de reducción.

Actividad	Tiempo normal (máximo)	Tiempo tope (mínimo)	Coste unitario reducción
1 - 2	8	4	2
1 - 3	10	5	4
1 - 4	12	6	3
2 - 4	10	6	4
2 - 5	14	9	3
3 - 4	7	5	5
3 - 6	12	8	2
4 - 5	7	4	5
5 - 6	10	7	1

Los tiempos Early de los diferentes sucesos, calculados con los tiempos máximos de ejecución, presentan una duración máxima del proyecto de 35 días.





Los tiempos Early de los diferentes sucesos, calculados con los tiempos mínimos de ejecución, tienen una duración mínima del proyecto de 21 días

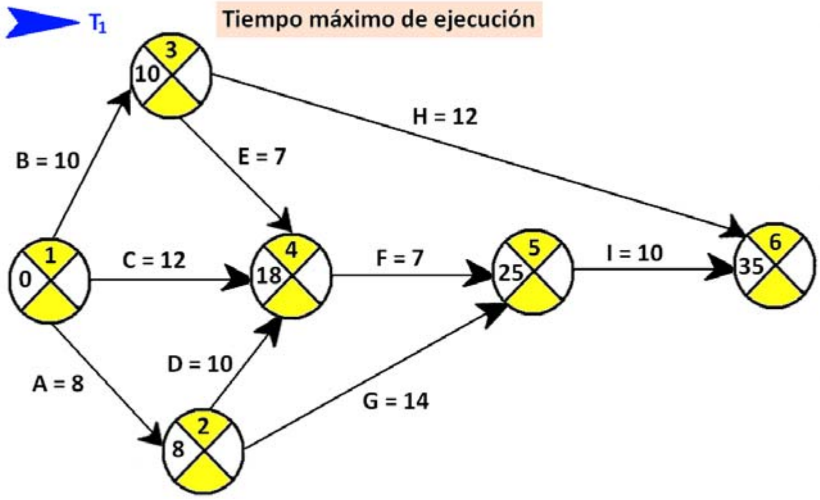
Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

Se deduce que es posible elegir cualquier duración del proyecto entre 21 y 35 unidades de tiempo.

El Algoritmo de Ackoff y Sasieni partiendo de los tiempos Early del grafo Pert, calculados con los tiempos máximo de ejecución, optimiza la duración de las diferentes actividades a un coste mínimo.

Determina el tiempo de ejecución de las diferentes actividades, de forma que el coste suplementario correspondiente en concepto de reducción del tiempo sea mínimo.

Hay nueve actividades N = 9, cinco caminos M = 5.



Las actividades correspondientes a cada uno de los caminos:

Caminos	Orden de las actividades	Número de actividades
I	1 – 3 , 3 – 6	2
II	1 – 3 , 3 – 4 , 4 – 5 , 5 – 6	4
III	1 – 4 , 4 – 5 , 5 – 6	3
IV	1 – 2 , 2 – 4 , 4 – 5 , 5 – 6	4
V	1 – 2 , 2 – 5 , 5 – 6	3

Se calcula la longitud de cada camino, fijándose en el tiempo normal (máximo) de cada actividad que compone dicho camino.

Camino I: 1 - 3 , 3 - 6 $\rightarrow$ 10 + 12 = 22

Camino II: 1 - 3 , 3 - 4 , 4 - 5 , 5 - 6 $\rightarrow$ 10 + 7 + 7 + 10 = 34

Camino III: 1 - 4 , 4 - 5 , 5 - 6 $\rightarrow$ 12 + 7 + 10 = 29

Camino IV: 1 - 2 , 2 - 4 , 4 - 5 , 5 - 6 $\rightarrow$ 8 + 10 + 7 + 10 = 35

Camino V: 1 - 2 , 2 - 5 , 5 - 6 $\rightarrow$ 8 + 14 + 10 = 32

El tiempo a reducir de cada actividad es la diferencia entre el tiempo normal (máximo) y el tiempo tope (mínimo).

Actividad	Tiempo normal (máximo)	Tiempo tope (mínimo)	Tiempo a reducir	Coste unitario reducción
1 - 2	8	4	4	2
1 - 3	10	5	5	4
1 - 4	12	6	6	3
2 - 4	10	6	4	4
2 - 5	14	9	5	3
3 - 4	7	5	2	5
3 - 6	12	8	4	2
4 - 5	7	4	3	5
5 - 6	10	7	3	1

Con estos datos se elabora la Matriz B (M, N), a partir de donde comienza el análisis de los posibles acortamientos. La matriz se rellena con los datos proporcionados para el Coste unitario de reducción.

MATRIZ B (M, N) Actividades

Caminos	1 - 2	1 - 3	1 - 4	2 - 4	2 - 5	3 - 4	3 - 6	4 - 5	5 - 6
I		4					2		
II		4				5		5	1
III			3					5	1
IV	2			4				5	1
V	2				3				1

- <u>Primer Acortamiento</u>

Se crea un vector C (M, 1), siendo M el número de caminos del grafo, que contiene los tiempos máximos de realización del proyecto para cada camino, esto es, la longitud.

Posteriormente, se forma el vector F (N, 1), siendo N el número de actividades, donde cada elemento indica las posibles unidades de tiempo en que se pueden reducir las actividades del proyecto.

Del análisis del vector C (M, 1), pueden resultar uno o varios caminos críticos, que serán aquellos que tienen una longitud máxima, y, por tanto, el valor máximo en el vector C.

Vector C(M, 1)

Caminos	Longitud
I	22
II	34
III	29
IV	35
V	32

Vector F(N,1)

Actividades	Tiempo a reducir
1 – 2	4
1 – 3	5
1 – 4	6
2 – 4	4
2 – 5	5
3 – 4	2
3 – 6	4
4 – 5	3
5 – 6	3

En el vector C (M, 1) sólo hay un camino crítico (IV) de longitud 35 unidades de tiempo.

Se realiza un análisis de las actividades que componen el Camino IV de la matriz B(M, N):
1 – 2 , 2 – 4 , 4 – 5 , 5 – 6, con valores respectivos 4 , 4 , 3 , 3 en el vector F (N, 1)

Como no hay ningún valor 0, todas estas actividades se analizarán para poder ser acortadas.

* Se genera la matriz Q con una columna, referente al camino IV, y cuatro filas (al encontrarse cuatro actividades con posibilidad de acortarse).
* El vector P recoge los costes unitarios de reducción correspondientes a las actividades de la matriz Q.
* En el vector R se reflejan las unidades de tiempo posibles a reducir de esas mismas actividades, tomadas en el vector F.

Caminos M	Actividades a recortar Q	Coste unitario reducción P	Tiempo a reducir R
IV	1 – 2	2	4
	2 – 4	4	4
	4 – 5	5	3
	5 – 6	1	3

El mínimo valor de P (1 euro/día) corresponde a la actividad (5 – 6), que puede acortarse 3 días.
En consecuencia, el primer acortamiento consiste en acortar 3 días en los caminos en los que intervenga la actividad (5 – 6).

Con ello se obtiene un nuevo valor del vector C y del vector F:

Vector C(M, 1)

$$\begin{pmatrix} \text{Caminos} & \text{Longitud} \\ \text{I} & 22 \\ \text{II} & 31 = 34 - 3 \\ \text{III} & 26 = 29 - 3 \\ \text{IV} & 32 = 35 - 3 \\ \text{V} & 29 = 32 - 3 \end{pmatrix}$$

Vector F(N,1)

$$\begin{pmatrix} \text{Actividades} & \text{Tiempo a reducir} \\ 1-2 & 4 \\ 1-3 & 5 \\ 1-4 & 6 \\ 2-4 & 4 \\ 2-5 & 5 \\ 3-4 & 2 \\ 3-6 & 4 \\ 4-5 & 3 \\ 5-6 & 0 = 3-3 \end{pmatrix}$$

El Camino IV no ha dejado de ser crítico, se realiza este acortamiento, que supondrá un incremento en el coste del proyecto de: 3 días x 1 (euro/día) = 3 euros

- <u>Segundo Acortamiento</u>

Las actividades que componen el camino crítico IV son: $1-2$, $2-4$, $4-5$, $5-6$.

Los respectivos valores en el vector F son: 4 , 4 , 3 , 0.

Sólo se analizarán las tres primeras actividades, que son las que tienen posibilidad de reducirse.

Los vectores Q , P , R serán:

Caminos M	Actividades a recortar Q	Coste unitario reducción P	Tiempo a reducir R
IV	$1-2$	2	4
	$2-4$	4	4
	$4-5$	5	3

El mínimo valor de P (2 euros/día) corresponde a la actividad (1 – 2), que puede acortarse 4 días.

Camino IV: $1-2$, $2-4$, $4-5$, $5-6$

Camino V: $1-2$, $2-5$, $5-6$

Se adjuntan los nuevos valores vector C acortando los caminos en los que interviene esta actividad.

Vector $C(M,1)$

$$\begin{pmatrix} \text{Caminos} & \text{Longitud} \\ \text{I} & 22 \\ \text{II} & 31 \\ \text{III} & 26 \\ \text{IV} & 28 = 32-4 \\ \text{V} & 25 = 29-5 \end{pmatrix}$$

El Camino IV ha dejado de ser crítico ya que aparece el Camino II después del acortamiento con una longitud de 31 días.

Para evitarlo, sólo se acorta 1 día la actividad (1 – 2), resultando un C rectificado, así el Camino IV continúa siendo crítico.

Valor rectificado del vector C y nuevo valor del vector F

Vector $C(M,1)$

$$\begin{pmatrix} \text{Caminos} & \text{Longitud} \\ \text{I} & 22 \\ \text{II} & 31 \\ \text{III} & 26 \\ \text{IV} & 31 = 32-1 \\ \text{V} & 28 = 29-1 \end{pmatrix}$$

Vector $F(N,1)$

$$\begin{pmatrix} \text{Actividades} & \text{Tiempo a reducir} \\ 1-2 & 3 = 4-1 \\ 1-3 & 5 \\ 1-4 & 6 \\ 2-4 & 4 \\ 2-5 & 5 \\ 3-4 & 2 \\ 3-6 & 4 \\ 4-5 & 3 \\ 5-6 & 0 \end{pmatrix}$$

El incremento de coste del proyecto será: 1 día x 2 (euros/día) = 2 euros

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

- Tercero Acortamiento

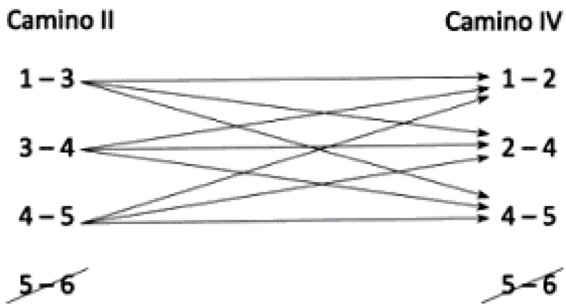
Hay dos caminos críticos (II y IV), por lo que el vector M tendrá dos filas:

Camino II: 1 – 3 , 3 – 4 , 4 – 5 , 5 – 6

Camino IV: 1 – 2 , 2 – 4 , 4 – 5 , 5 – 6

La matriz Q tendrá dos columnas (una para cada camino crítico) y contendrá las distintas combinaciones que se pueden formar con las actividades que la componen con posibilidad de acortamiento.

Está combinación se realizará juntando las actividades de un Camino con las del otro, pero no con las propias del mismo Camino crítico:



El vector P es el resultado de sumar el coste unitario de cada actividad. En el vector R se elige la menor unidad de tiempo de entre las dos actividades que conforman cada combinación.

Caminos M	Actividades a recortar Q		Coste unitario reducción P		Tiempo a reducir R	
	1 – 3	1 – 2	(4 + 2)	6	(5 y 3)	3
II	1 – 3	2 – 4	(4 + 4)	8	(5 y 4)	4
	1 – 3	4 – 5	(4 + 5)	9	(5 y 3)	3
	3 – 4	1 – 2	(5 + 2)	7	(2 y 3)	2
IV	3 – 4	2 – 4	(5 + 4)	9	(2 y 4)	2
	3 – 4	4 – 5	(5 + 5)	10	(2 y 3)	2
	4 – 5	1 – 2	(5 + 2)	7	(3 y 3)	3
	4 – 5	2 – 4	(5 + 4)	9	(3 y 4)	3
	4 – 5	4 – 5	(5)	5	(3)	3

El mínimo valor de P es 5 euros/día que corresponde acortar 3 días los Caminos (II - III - IV) en que interviene la actividad (4 – 5)

Camino I: 1 - 3 , 3 - 6

Camino II: 1 - 3 , 3 - 4 , 4 - 5 , 5 - 6

Camino III: 1 - 4 , 4 - 5 , 5 - 6

Camino IV: 1 - 2 , 2 - 4 , 4 - 5 , 5 - 6

Camino V: 1 - 2 , 2 - 5 , 5 - 6

El nuevo valor de los vectores C y F serán:

Vector $C(M,1)$

$$\begin{pmatrix} \text{Caminos} & \text{Longitud} \\ \text{I} & 22 \\ \text{II} & 28 = 31 - 3 \\ \text{III} & 23 = 26 - 3 \\ \text{IV} & 28 = 31 - 3 \\ \text{V} & 28 \end{pmatrix}$$

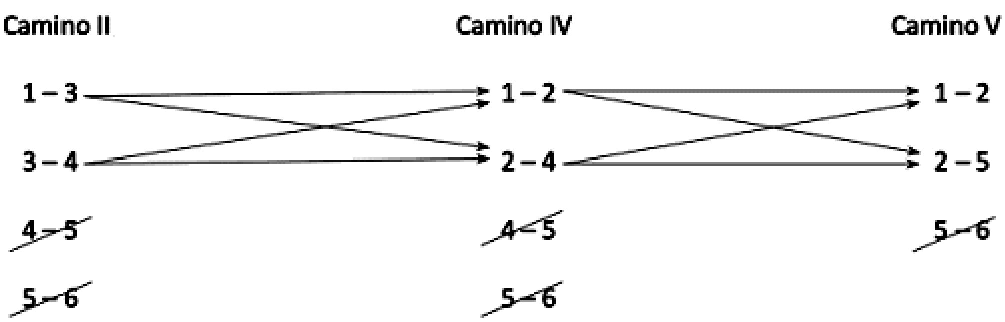
Vector $F(N,1)$

$$\begin{pmatrix} \text{Actividades} & \text{Tiempo a reducir} \\ 1-2 & 3 \\ 1-3 & 5 \\ 1-4 & 6 \\ 2-4 & 4 \\ 2-5 & 5 \\ 3-4 & 2 \\ 3-6 & 4 \\ 4-5 & 0 = 3-3 \\ 5-6 & 0 \end{pmatrix}$$

Los Caminos II y IV continúan siendo críticos, por lo que es válido el acortamiento.
Se suma el Camino V como camino crítico.
El incremento del coste del proyecto será: 3 días x 5 (euros/día) = 15 euros

- <u>Cuarto Acortamiento</u>

Hay tres caminos críticos (II, IV, V) por lo que el vector M tendrá tres filas.
Camino II: $1-3$, $3-4$, $4-5$, $5-6$
Camino IV: $1-2$, $2-4$, $4-5$, $5-6$
Camino V: $1-2$, $2-5$, $5-6$
Las combinaciones que se pueden formar con las actividades que los componen y tienen posibilidad de acortamiento son:



El vector P el resultado de sumar el coste unitario de cada actividad y el vector R la menor unidad de tiempo de entre las dos actividades que conforman cada combinación.

La matriz Q (actividades a recortar) será:

Caminos M	Actividades a recortar Q			Coste unitario reducción P		Tiempo a reducir R	
II	1 – 3	1 – 2	1 – 2	(4 + 2)	6	(5 y 3)	3
	1 – 3	1 – 2	2 – 5	(4 + 2 + 3)	9	(5 y 3 y 5)	3
	1 – 3	2 – 4	1 – 2	(4 + 4 + 2)	10	(5 y 4 y 3)	3
IV	1 – 3	2 – 4	2 – 5	(4 + 4 + 3)	11	(5 y 4 y 5)	4
	3 – 4	1 – 2	1 – 2	(5 + 2)	7	(2 y 3)	2
	3 – 4	1 – 2	2 – 5	(5 + 2 + 3)	10	(2 y 3 y 5)	2
V	3 – 4	2 – 4	1 – 2	(5 + 4 + 2)	11	(2 y 4 y 3)	2
	3 – 4	2 – 4	2 – 5	(5 + 4 + 3)	12	(2 y 4 y 5)	2

El mínimo valor de P es 6 euros/día que corresponde acortar 3 días los Caminos (I - II - IV - V) en que intervienen las actividades (1 – 3) y (1 – 2).

Camino I: 1 - 3 , 3 - 6
Camino II: 1 - 3 , 3 - 4 , 4 - 5 , 5 - 6
Camino III: 1 - 4 , 4 - 5 , 5 - 6
Camino IV: 1 - 2 , 2 - 4 , 4 - 5 , 5 - 6
Camino V: 1 - 2 , 2 - 5 , 5 - 6

El nuevo valor de los vectores C y F serán:

Vector C(M, 1)

$$\begin{pmatrix} \text{Caminos} & \text{Longitud} \\ \text{I} & 19 = 22 - 3 \\ \text{II} & 25 = 28 - 3 \\ \text{III} & 23 \\ \text{IV} & 25 = 28 - 3 \\ \text{V} & 25 = 28 - 3 \end{pmatrix}$$

Vector F(N,1)

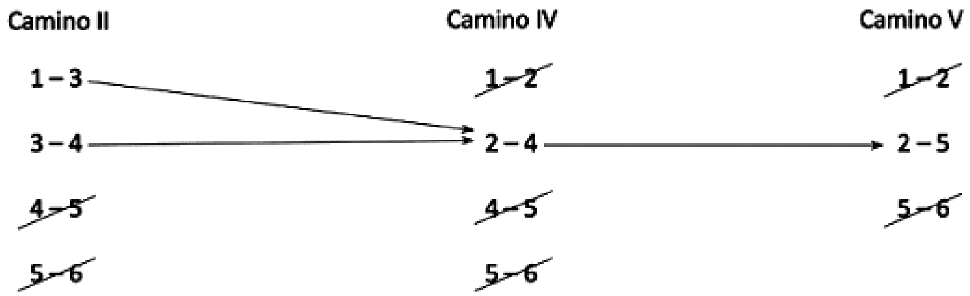
$$\begin{pmatrix} \text{Actividades} & \text{Tiempo a reducir} \\ 1-2 & 0 = 3 - 3 \\ 1-3 & 2 = 5 - 3 \\ 1-4 & 6 \\ 2-4 & 4 \\ 2-5 & 5 \\ 3-4 & 2 \\ 3-6 & 4 \\ 4-5 & 0 \\ 5-6 & 0 \end{pmatrix}$$

Los caminos II, IV y V continúan siendo críticos por lo que es válido el acortamiento.

El incremento del coste del proyecto será: 3 días x 6 (euros/día) = 18 euros

- Quinto Acortamiento

Hay tres caminos críticos (II, IV, V) por lo que el vector M tendrá tres filas.
Camino II: $1-3$, $3-4$, $4-5$, $5-6$
Camino IV: $1-2$, $2-4$, $4-5$, $5-6$
Camino V: $1-2$, $2-5$, $5-6$
Las combinaciones que se pueden formar con las actividades que los componen y tienen posibilidad de acortamiento son:



Siendo el vector P el resultado de sumar el coste unitario de cada actividad y el vector R la menor unidad de tiempo de entre las dos actividades que conforman cada combinación.
La matriz Q (actividades a recortar) será:

Caminos M	Actividades a recortar Q	Coste unitario reducción P	Tiempo a reducir R
II IV V	$1-3$ $2-4$ $2-5$	$(4+4+3)$ 11	(2 y 4 y 5) 2
	$3-4$ $2-4$ $2-5$	$(5+4+3)$ 12	(2 y 5 y 5) 2

El mínimo valor de P es 11 euros/día, que corresponde acortar 2 días los Caminos (I - II - IV - V) en los que intervienen las actividades $(1-3)$, $(2-4)$ y $(2-5)$.

El nuevo valor de los vectores C y F serán:

Vector $C(M,1)$

Caminos	Longitud
I	$17=19-2$
II	$23=25-2$
III	23
IV	$23=25-2$
V	$23=25-2$

Vector $F(N,1)$

Actividades	Tiempo a reducir
$1-2$	0
$1-3$	$0=2-2$
$1-4$	6
$2-4$	$2=4-2$
$2-5$	$3=5-2$
$3-4$	2
$3-6$	4
$4-5$	0
$5-6$	0

Los Caminos II, IV y V continúan siendo críticos, por lo que es válido el acortamiento.
Se añade el Camino III como crítico.
El incremento del coste del proyecto será: 2 días x 11 (euros/día) = 22 euros

- <u>Sexto Acortamiento</u>

Hay cuatro caminos críticos (II, III, IV, V) por lo que el vector M tendrá cuatro filas.

Camino II: 1 – 3 , 3 – 4 , 4 – 5 , 5 – 6
Camino III: 1 – 4 , 4 – 5 , 5 – 6
Camino IV: 1 – 2 , 2 – 4 , 4 – 5 , 5 – 6
Camino V: 1 – 2 , 2 – 5 , 5 – 6

Las combinaciones que se pueden formar con las actividades que los componen y tienen posibilidad de acortamiento son:

Camino II	Camino III	Camino IV	Camino V
~~1 – 3~~	1 – 4	~~1 – 2~~	~~1 – 2~~
3 – 4	~~4 – 5~~	2 – 4	2 – 5
~~4 – 5~~	~~5 – 6~~	~~4 – 5~~	~~5 – 6~~
~~5 – 6~~		~~5 – 6~~	

Siendo el vector P el resultado de sumar el coste unitario de cada actividad y el vector R la menor unidad de tiempo de entre las dos actividades que conforman cada combinación.
La matriz Q (actividades a recortar) será:

Caminos M	Actividades a recortar Q	Coste unitario reducción P	Tiempo a reducir R
II - III IV - V	3 – 4 1 – 4 2 – 4 2 – 5	(5 + 3 + 4 + 3) 15	(2 y 6 y 2 y 3) 2

El mínimo y único valor de P es 15 euros/día, corresponde a acortar 2 días los Caminos (II - III - IV - V) en los que intervienen las actividades (3 – 4) , (1 – 4) , (2 – 4) y (2 – 5).

El nuevo valor de los vectores C y F serán:

Vector C(M, 1)

Caminos	Longitud
I	17
II	$21 = 23 - 2$
III	$21 = 23 - 2$
IV	$21 = 23 - 2$
V	$21 = 23 - 2$

Vector F(N,1)

Actividades	Tiempo a reducir
$1-2$	0
$1-3$	0
$1-4$	$4 = 6 - 2$
$2-4$	$0 = 2 - 2$
$2-5$	$1 = 3 - 2$
$3-4$	$0 = 2 - 2$
$3-6$	4
$4-5$	0
$5-6$	0

Los Caminos II, III, IV y V continúan siendo críticos, por lo que es válido el acortamiento.

El incremento del coste del proyecto será: 2 días x 15 (euros/día) = 30 euros

- <u>Séptimo Acortamiento</u>

Observando al vector C hay cuatro caminos críticos (II, III, IV, V).

Camino II: 1 – 3 , 3 – 4 , 4 – 5 , 5 – 6
Camino III: 1 – 4 , 4 – 5 , 5 – 6
Camino IV: 1 – 2 , 2 – 4 , 4 – 5 , 5 – 6
Camino V: 1 – 2 , 2 – 5 , 5 – 6

Las combinaciones que se pueden formar con las actividades que los componen y tienen posibilidad de acortamiento son:

Camino II	Camino III	Camino IV	Camino V
~~1 – 3~~	1 – 4	~~1 – 2~~	~~1 – 2~~
~~3 – 4~~	~~4 – 5~~	~~2 – 4~~	2 – 5
~~4 – 5~~	~~5 – 6~~	~~4 – 5~~	~~5 – 6~~
~~5 – 6~~		~~5 – 6~~	

Las actividades de los Caminos II y IV han sido reducidas a su unidad de tiempo mínima, por lo que no pueden combinarse.

Los Caminos III y V tienen las dos únicas actividades posibles de acortamiento: (1 – 4) y (2 – 5)

En caso de acortar alguno de los caminos III y V, seguirían quedando otros dos Caminos críticos II y IV, por lo que no se conseguiría reducir la duración total del proyecto.

Por tanto, se da por concluido el Algoritmo.

El proyecto queda reducido a 21 días, con un acortamiento (3 + 1 + 3 + 3 + 2 + 2) de 14 días (35 – 21).

El incremento de coste es: 3 x 1 + 1 x 2 + 3 x 5 + 3 x 6 + 2 x 11 + 2 x 15 = 90 euros.

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

Resumen para cada acortamiento:

Acorta mientos	Actividades acortadas	Coste/ unidad tiempo	Tiempo acortado	Tiempo acortado acumulado	Duración total proyecto	Coste acortamiento	Coste acumulado
1	5 – 6	1	3	3	32	3	3
2	1 – 2	2	1	4	31	2	5
3	4 – 5	5	3	7	28	15	20
4	1 – 3 1 – 2	6	3	10	25	18	38
5	1 – 3 2 – 4 2 – 5	11	2	12	23	22	60
6	3 – 4 1 – 4 2 – 4 2 – 5	15	2	14	21	30	90

Resumen de los cambios efectuados en el vector F:

		Acortamientos						
		Inicio	Primero	Segundo	Tercero	Cuarto	Quinto	Sexto
Actividades	1 – 2	4	4	3	3	0	0	0
	1 – 3	5	5	5	5	2	0	0
	1 – 4	6	6	6	6	6	6	4
	2 – 4	4	4	4	4	4	2	0
	2 – 5	5	5	5	5	5	3	1
	3 – 4	2	2	2	2	2	2	0
	3 – 6	4	4	4	4	4	4	4
	4 – 5	3	3	3	0	0	0	0
	5 – 6	3	0	0	0	0	0	0

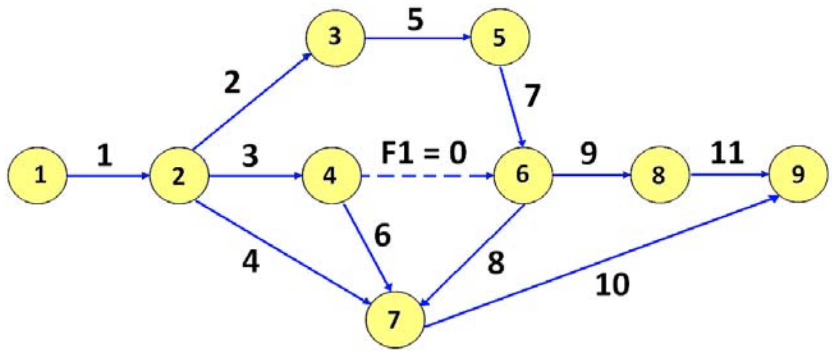
ALGORITMO DE ACKOFF Y SASIENI: SIMULACIÓN DE MICROCOMPUTADOR

Un proyecto aeronáutico se compone de las especificaciones recogidas en la tabla adjunta. Determinar el coste del proyecto en el mínimo tiempo posible.

Actividad	Precedentes	Tiempo normal ejecución (días) máximo	Tiempo tope ejecución (días) mínimo	Coste unitario de reducción (euros)
1	----	10	10	0
2	1	10	10	0
3	1	40	40	0
4	1	28	20	10
5	2	8	8	0
6	3	10	6	40
7	5	30	10	180
8	7 , 3	20	8	50
9	7 , 3	24	14	65
10	4, 6, 8	10	6	80
11	9	12	8	30

Grafo PERT del proyecto:

Hay doce actividades $N = 12$, con seis caminos $M = 6$.



Las actividades correspondientes a cada uno de los Caminos:

Caminos	Orden de las actividades	Número actividades
I	1 - 2 - 5 - 7 - 8 - 10	6
II	1 - 2 - 5 - 7 - 9 - 11	6
III	1 - 3 - F1 - 8 - 10	5
IV	1 - 3 - F1 - 9 - 11	5
V	1 - 3 - 6 - 10	4
VI	1 - 4 - 10	3

Para calcular la longitud de cada Camino se elige el tiempo normal de ejecución, considerando los días a reducir (Tiempo normal - Tiempo tope)

Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....

Actividad	Precedentes	Tiempo normal ejecución (máximo)	Tiempo tope ejecución (mínimo)	Días a reducir
1	----	10	10	0
2	1	10	10	0
3	1	40	40	0
4	1	28	20	8
5	2	8	8	0
6	3	10	6	4
7	5	30	10	20
8	7 , 3	20	8	12
9	7 , 3	24	14	10
10	4, 6, 8	10	6	4
11	9	12	8	4

Camino I: $1 - 2 - 5 - 7 - 8 - 10 \rightarrow 10+10+8+30+20+10=88$

Camino II: $1 - 2 - 5 - 7 - 9 - 11 \rightarrow 10+10+8+30+24+12=94$

Camino III: $1 - 3 - F1 - 8 - 10 \rightarrow 10+40+0+20+10=80$

Camino IV: $1 - 3 - F1 - 9 - 11 \rightarrow 10+40+0+24+12=86$

Camino V: $1 - 3 - 6 - 10 \rightarrow 10+40+10+10=70$

Camino VI: $1 - 4 - 10 \rightarrow 10+28+10=48$

Se forma la matriz $B(M, N)$, a partir de donde comienza el análisis de los posibles acortamientos.

- <u>Primer Acortamiento</u>

Actividades

Caminos	1 - 2 (1)	2 - 3 (2)	2 - 4 (3)	2 - 7 (4)	3 - 5 (5)	4 - 7 (6)	5 - 6 (7)	6 - 7 (8)	6 - 8 (9)	7 - 9 (10)	8 - 9 (11)	4 - 6 F1
I	0	0			0		180	50		80		
II	0	0			0		180		65		30	
III	0		0					50		80		0
IV	0		0						65		30	0
V	0		0			40				80		
VI	0			10						80		

Se crea un vector $C(M,1)$, siendo M el número de caminos del grafo, que contiene los tiempos máximos de realización del proyecto para cada camino.

Posteriormente, se forma el vector $F(N, 1)$, siendo N el número de actividades, donde cada elemento indica los posibles días en que se pueden reducir las actividades del proyecto.

Del análisis del vector $C(M,1)$ pueden resultar uno o varios caminos críticos, que serán aquellos que tienen longitud máxima y, por tanto, el valor máximo en el vector $C(M,1)$.

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

Vector $F(N,1)$

Actividad	Días a reducir
1	0
2	0
3	0
4	8
5	0
6	4
7	20
8	12
9	10
10	4
11	4

Vector $C(M,1)$

Caminos	Longitud
I	88
II	94
III	80
IV	86
V	70
VI	48

En el vector $C(M,1)$ solo hay un Camino crítico (II) de longitud 94 días.

Se utiliza un vector $M(I,1)$ dimensionado, según el número máximo de caminos críticos simultáneos posibles, siendo este valor el número total de caminos M. La función del vector $M(I,1)$ consiste en almacenar el número de orden de los caminos críticos.

Con un solo camino crítico: $M(1,1) \equiv$ número de orden del Camino crítico $= 2$

Se realiza un análisis de las actividades que se pueden acortar en el Camino II de la matriz

$B(M,N)$: 1 2 5 7 9 11 siendo los respectivos valores de la matriz

$F(N,1)$: 0 0 0 20 10 4

Se genera la matriz Q con una columna (referente al Camino II) y tres filas (al encontrarse tres actividades con posibilidad de acortarse).

El vector P (de las mismas dimensiones) archiva los costes unitarios de reducción correspondientes a las actividades archivadas en la matriz Q, y que son extraídas de la fila 2 (Camino 2) de la matriz $B(M,N)$.

El vector R almacena los posibles días a reducir de esas mismas actividades, tomados del vector F.

Actividades a recortar Q	Costes unitarios de reducción P	Tiempo a reducir R
7	180	20
9	65	10
11	30	4

El mínimo valor de P (30 euros/día) corresponde a la actividad 11, que puede acortarse 4 días.

En consecuencia, en principio, el primer acortamiento consiste en acortar los Caminos (II - IV) en los que interviene la actividad 11 en cuatro días.

El nuevo vector C y F, acortando 4 días a la actividad 11:

Vector $F(N,1)$

Actividad	Días a reducir
1	0
2	0
3	0
4	8
5	0
6	4
7	20
8	12
9	10
10	4
11	$0 = 4 - 4$

Vector $C(M,1)$

Caminos	Longitud
I	88
II	$90 = 94 - 4$
III	80
IV	$82 = 86 - 4$
V	70
VI	48

El Camino II no ha dejado de ser crítico, se realiza este acortamiento, que supone un incremento en el coste del proyecto de: $4 \text{ días} \times 30 \text{ (euros/día)} = 120 \text{ euros}$

- <u>Segundo Acortamiento</u>

El Camino crítico II tiene una duración de 90 días.
$M(1,1) \equiv$ número de orden del camino crítico $= 2$
Los vectores Q, P y R serán:

Actividades a recortar Q	Costes unitarios de reducción P	Tiempo a reducir R
7	180	20
9	65	10

El mínimo valor de P (65 euros/día) corresponde a la actividad 9, que puede acortarse 10 días.
El nuevo valor de C acortando 10 días a la actividad 9:

Vector $C(M,1)$

Caminos	Longitud
I	88
II	80
III	80
IV	72
V	70
VI	48

El camino II ha dejado de ser crítico, ya que aparece el camino I después del acortamiento con una longitud de 88 días.

Para evitar esto, sólo se acorta en 2 días la actividad 9, resultando un valor rectificado de C.

Universidad Autónoma de Madrid

Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....

(IMPRESO EN PAPEL RECICLADO)

UNICAMENTE PARA USO ESCOLAR

El nuevo vector C y F, acortando 2 días a la actividad 9:

Vector C(M, 1)

Caminos	Longitud
I	88
II	88
III	80
IV	80
V	70
VI	48

Vector F(N, 1)

Actividad	Días a reducir
1	0
2	0
3	0
4	8
5	0
6	4
7	20
8	12
9	8
10	4
11	0

El incremento de coste del proyecto será:
2 días x 65 (euros/día) = 130 euros

- Tercer Acortamiento

Hay dos caminos críticos (I y II) , por lo que el vector M tendrá dos filas

$$\begin{cases} \text{Camino I:} & 1 - 2 - 5 - 7 - 8 - 10 \\ \text{Camino II:} & 1 - 2 - 5 - 7 - 9 - 11 \end{cases}$$

La matriz Q tendrá dos columnas (una para camino crítico) y contendrá las distintas combinaciones que se pueden formar con las actividades que la componen con posibilidad de acortamiento.

Actividades a recortar Q	Costes unitarios de reducción P	Tiempo a reducir R
7 7	180	20
7 9	180 + 65 = 245	8
8 7	50 + 180 = 230	12
8 9	50 + 65 = 115	8
10 7	80 + 180 = 260	4
10 9	80 + 65 = 145	4

El mínimo valor de P es 115 euros/día, que corresponde a acortar las actividades 8 y 9 en ocho días cada una.

El nuevo vector C y F acortando 8 días las actividades 8 y 9:

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

Vector $C(M,1)$

$$\begin{pmatrix} \text{Caminos} & \text{Longitud} \\ \text{I} & 80 \\ \text{II} & 80 \\ \text{III} & 72 \\ \text{IV} & 72 \\ \text{V} & 70 \\ \text{VI} & 48 \end{pmatrix}$$

Vector $F(N,1)$

$$\begin{pmatrix} \text{Actividad} & \text{Días a reducir} \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 3 & 0 \\ 4 & 8 \\ 5 & 0 \\ 6 & 4 \\ 7 & 20 \\ 8 & 4 \\ 9 & 0 \\ 10 & 4 \\ 11 & 0 \end{pmatrix}$$

El camino I y II continúan siendo críticos, por lo que es válido el acortamiento.

El incremento del coste del proyecto será:
8 días x 115 (euros/día) $=$ 920 euros

- <u>Cuarto Acortamiento</u>

Hay dos caminos críticos (I y II), las matrices M , P , Q y R son:

$$\begin{cases} \text{Camino I:} & 1-2-5-7-8-10 \\ \text{Camino II:} & 1-2-5-7-9-11 \end{cases}$$

La matriz Q tendrá dos columnas (una para camino crítico) y contendrá las distintas combinaciones que se pueden formar con las actividades que la componen con posibilidad de acortamiento.

M	Actividades a recortar Q		Costes unitarios de reducción P	Tiempo a reducir R
1	7	7	180	20
2	8	7	$50+180=230$	4
	10	7	$80+180=260$	4

El mínimo valor de P es 180 euros/día, que corresponde a acortar la actividad 7, pudiendo reducirse en 20 días. El nuevo vector C acortando 20 días la actividad 7:

Vector $C(M,1)$

$$\begin{pmatrix} \text{Caminos} & \text{Longitud} \\ \text{I} & 80-20=60 \\ \text{II} & 80-20=60 \\ \text{III} & 72 \\ \text{IV} & 72 \\ \text{V} & 70 \\ \text{VI} & 48 \end{pmatrix}$$

Los caminos I y II han dejado de ser críticos.

En consecuencia, sólo se acorta en 8 días la actividad 7, resultando un valor rectificado de C.

El nuevo vector C y F acortando 8 días a la actividad 7:

Caminos	Longitud
I	72
II	72
III	72
IV	72
V	70
VI	48

Vector F(N, 1)

Actividad	Días a reducir
1	0
2	0
3	0
4	8
5	0
6	4
7	12
8	4
9	0
10	4
11	0

El incremento del coste del proyecto será:
8 días x 180 (euros/día) = 1.440 euros

Atendiendo al vector C hay cuatro caminos críticos (I , II , III , IV).

- Camino I: 1 - 2 - 5 - 7 - 8 - 10
- Camino II: 1 - 2 - 5 - 7 - 9 - 11
- Camino III: 1 - 3 - F1 - 8 - 10
- Camino IV: 1 - 3 - F1 - 9 - 11

Analizando estos caminos para analizar un posible acortamiento, no se puede dar ninguna combinación, con las actividades que los componen, que sea susceptible de reducción.

En esta línea, en el $\boxed{\text{Camino IV: 1 - 3 - F1 - 9 - 11}}$ las dos únicas actividades posibles (9 y 11) con posibilidad inicial de acortarse, han sido reducidas a su tiempo mínimo, como puede observarse en el vector F.

En caso de acortar alguno de los otros caminos críticos (I , II , III), quedaría un único camino crítico (IV), con lo que no se reduciría la duración total del proyecto.

El proyecto queda reducido a 72 días, con un acortamiento de $94 - 72 = 22$ días y un incremento del coste de $120 + 130 + 920 + 1.440 = 2610$ euros.

En la tabla adjunta se recogen los resultados para acortamiento, para una interpretación más sencilla.

Acortamientos	Actividades acortadas (1)	Coste/día (2)	Días acortados (3)	Días acortados acumulados (4)	Duración total proyecto (5)	Coste acortamiento (6)	Coste acumulado (7)
1	11	30	4	4	90	120	120
2	9	65	2	6	88	130	250
3	8 , 9	115	8	14	80	920	1.170
4	7	180	8	22	72	1.440	2.610

Adviértase que si tratara de acortar en 10 días la duración del proyecto, observando la columna (4) la situación queda en el 3^0 acortamiento, teniendo que realizar los dos primeros acortamientos, más los 4 días restantes del tercer acortamiento.

La duración del proyecto (columna 5) será de $88 - 4 = 84$ días

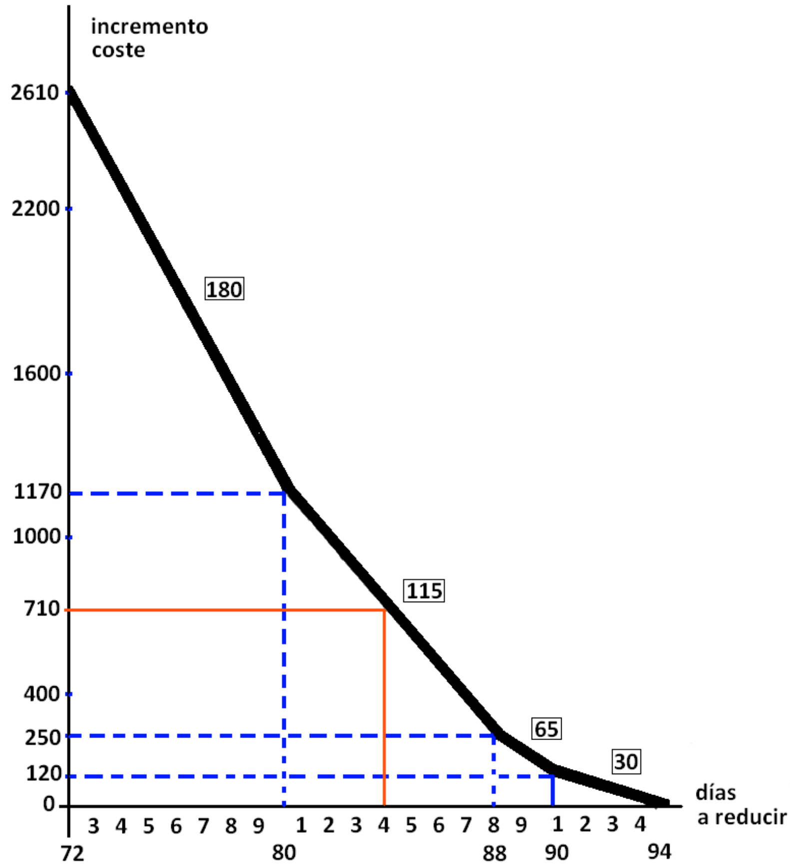
Las actividades acortadas (columnas 1 y 3) serán: $\begin{cases} \text{Actividad 11 (en 4 días)} \\ \text{Actividad 9 (en 2 días)} \\ \text{Actividad 8 (en 4 días)} \end{cases}$

El coste del acortamiento (columna 2 y 3) : $4 \text{x} 30 + 2 \text{x} 65 + 4 \text{x} 115 = 710$ euros

Una vez que se han acortado estas actividades en las cantidades señaladas, se aplican los algoritmos PERT o CPM para calcular las holguras y realizar el control del proyecto.

Con los datos obtenidos en cada uno de estos acortamientos se construye un gráfico, representando en las abscisas los días a reducir y, en las ordenadas, el incremento del coste.

El gráfico tiene la utilidad de visualizar el incremento del coste del proyecto correspondiente a un acortamiento determinado, o bien, conocido un incremento del coste, conocer la duración total del proyecto.



Si se tratara de acortar en 10 días la duración del proyecto, el incremento del coste sería de 710 euros.

Hoja nº ....

Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....

Hoja nº ....

UAM
Universidad Autónoma de Madrid

Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....

Instrumentos Estadísticos Avanzados
Facultad Ciencias Económicas y Empresariales
Departamento de Economía Aplicada
Profesor: Santiago de la Fuente Fernández