CADENAS DE MARKOV: PROCESOS DE POISSON

PROCESOS DE POISSON

Ollin Tonatiuh (dios del Sol): Movimientos de los astros y algunos ciclos en donde los meses duraban veinte días, los años dieciocho meses y los siglos 52 años, renovándose.

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

- **DISTRIBUCIÓN UNIFORME DISCRETA**

Una variable aleatoria discreta X que toma valores enteros $1, 2, \ldots, n$ con probabilidades $P(X=k)=\dfrac{1}{n}$ $\quad k=1, 2, \ldots, n$ recibe el nombre de variable uniforme discreta.

$$\mu=\frac{n+1}{2} \qquad \sigma^2=\frac{n^2-1}{12} \qquad \sigma=\sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$$

- **DISTRIBUCIÓN UNIFORME CONTINUA**

Una variable aleatoria continua X sigue una distribución uniforme en el intervalo $[a, b]$, es decir, $X \sim U[a, b]$ cuando su función de densidad es:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & x<a \\ \dfrac{1}{b-a} & a \le x \le b \\ 0 & x>b \end{cases} \quad \rightarrow \quad \text{Función de distribución: } F(x)=\begin{cases} 0 & x<a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a \le x \le b \\ 1 & x>b \end{cases}$$

Función generadora de los momentos $M_x=E(e^{tx})=\dfrac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)}$

$$m_k=E(X^k)=\sum_{i=0}^{k} a^i b^{k-i} \quad \rightarrow \quad m_1=E(X)=\mu=\frac{a+b}{2} \qquad m_2=E(X^2)=\frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

$$\sigma^2=\frac{(b-a)^2}{12} \qquad \sigma=\frac{b-a}{\sqrt{12}}$$

- **DISTRIBUCIÓN DE POISSON**

Una variable aleatoria $X \sim P(\lambda)$ si puede tomar todos los valores enteros $0, 1, 2, \cdots, n, \cdots$ con probabilidades $P(X=k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \quad \forall \lambda>0$

$$X \sim P(\lambda) \quad \rightarrow \quad E(X)=\lambda \qquad V(X)=\lambda$$

RELACIÓN ENTRE UNA DISTRIBUCIÓN DISCRETA Y CONTINUA

La relación entre dos distribuciones, la distribución discreta de Poisson y la disribución continua Gamma, se efectúa al incluir la distribución de Erlang, y su caso especial, la distribución Exponencial.

- ## DISTRIBUCIÓN GAMMA

La distribución gamma $X \sim \Gamma(n,\lambda)$ es una función de distribución continua con dos parámetros n y λ, cuya función de densidad es:

$$f(t) = \frac{(\lambda\, t)^{n-1}}{(n-1)!}\lambda\, e^{-\lambda t} = \frac{\lambda^n\, t^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{-\lambda t} \quad \forall\, t,\ n > 0$$

La función gamma $\Gamma(p) = \int_0^{\infty} t^{p-1}\, e^{-t}\, dt \quad \Gamma(p) = (p-1)! \quad \forall\, p > 0$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \qquad \Gamma(p)\,\Gamma(p-1) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi}$$

$$X \sim \Gamma(n,\lambda) \quad \rightarrow \quad E(X) = \frac{n}{\lambda} \quad V(X) = \frac{n}{\lambda^2}$$

- ## DISTRIBUCIÓN ERLANG

Para describir el tiempo de espera hasta el suceso número *n* en un proceso de Poisson se toma la distribución de Erlang con un parámetro $\theta = \frac{1}{\lambda}$ cuya función de densidad es $f(x) = \frac{(\lambda\, x)^{n-1}}{(n-1)!}\lambda\, e^{-\lambda x} \quad \forall\, x,\ n > 0$

$$E(X) = \frac{n}{\lambda} \quad V(X) = \frac{n}{\lambda^2}$$

- ## DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL

La distribución exponencial $X \sim Exp(\lambda)$ es un caso particular de la distribución gamma para $n = 1$, cuya función de densidad es $f(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda x} & \text{para } x \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

Su función de distribución es: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

$$X \sim Exp(\lambda) \quad \rightarrow \quad E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

La suma de variables aleatorias que siguen una misma distribución exponencial es una variable aleatoria expresable en términos de la distribución gamma.

PROPIEDADES DE LA DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL

- Una propiedad que caracteriza de manera única a la distribución exponencial dentro del conjunto de distribuciones continuas es que satisface la **pérdida de memoria**, esto es, sí $X \sim \exp(\lambda)$ para cualquiera tiempos $s, t \geq 0$ se cumple la igualdad $P(X > t + s \mid X > s) = P(X > t)$

o, equivalentemente,

$$P(X > t + s \mid X > s) = \frac{P\left[(X > t + s) \cap (X > s)\right]}{P(X > s)} = \frac{P(X > t + s)}{P(X > s)} = P(X > t)$$

por tanto, $P(X > t + s) = P(X > t)\, P(X > s)$

En consecuencia, la distribución exponencial $\exp(\lambda)$ carece de memoria y es la única distribución continua con tal propiedad, ya que

$$P(X > t + s) = e^{-\lambda(t+s)} = e^{-\lambda t}\, e^{-\lambda s} = P(X > t)\, P(X > s)$$

- La segunda propiedad es la **reproductividad**, que hace referencia a que la suma de distribuciones exponenciales independientes e idénticamente distribuidas sigue una distribución **gamma** $\Gamma(n, \lambda)$

En efecto, si $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ son n variables independientes distribuidas exponencialmente, $X_i \sim \exp(\lambda)\ \forall i$, entonces $X_1 + X_2 + \cdots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma(n, \lambda)$,

cuya función de densidad es $f(t) = \dfrac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}\lambda\, e^{-\lambda t} = \dfrac{\lambda^n\, t^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{-\lambda t} \quad \forall t,\ n > 0$

$$X \sim \Gamma(n, \lambda) \quad \rightarrow \quad E(X) = \frac{n}{\lambda} \qquad V(X) = \frac{n}{\lambda^2}$$

- Si $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ son n variables aleatorias independientes con distribución exponencial $X_i \sim \exp(\lambda)\ \forall i$, entonces $X = \min(X_1, X_2, \cdots, X_n) \sim \exp\left(\sum_i \lambda_i\right)$, es decir, el mínimo de n variables aleatorias exponenciales independientes se distribuye exponencialmente.

$$P(X > x) = P\left[\min(X_1, X_2, \cdots, X_n) > x\right] = P(X_i > x, \forall i) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i > x) = \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda_i x} =$$

$$= e^{-\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) x}$$

- Sean X_1 y X_2 dos variables aleatorias independientes con distribución exponencial de parámetros λ_1 y λ_2 respectivamente, por el teorema de probabilidad total, se tiene: $P(X_1 < X_2) = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$

En efecto,

$$P(X_1 < X_2) = \int_0^{\infty} P(X_1 < X_2 \mid X_2 = x)\, \lambda_2\, e^{-\lambda_2 x}\, dx = \int_0^{\infty} P(X_1 < x)\, \lambda_2\, e^{-\lambda_2 x}\, dx =$$

$$= \int_0^{\infty} (1 - e^{-\lambda_1 x})\, \lambda_2\, e^{-\lambda_2 x}\, dx = 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \int_0^{\infty} (\lambda_1 + \lambda_2)\, e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)x}\, dx = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

RELACIÓN ENTRE LA DISTRIBUCIÓN DE POISSON Y LA DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL

- Si el tiempo de llegadas consecutivas sigue una distribución exponencial $\text{Exp}(\lambda)$, entonces el número de llegadas en un intervalo de tiempo t sigue una distribución de Poisson $P(\lambda t)$
- Si el número de llegas en una hora sigue una distribución de Poisson $P(\lambda)$, entonces el número de horas entre dos llegadas consecutivas sigue una distribución exponencial $\text{Exp}(\lambda)$

La duración de vida de una pieza de un motor sigue una distribución exponencial, sabiendo que la probabilidad de que sobrepase las 100 horas de uso es 0,9. Se pide:

a) Probabilidad de que sobrepase las 200 horas de uso.

b) ¿Cuántas horas se mantiene funcionando con probabilidad 0,95?

Solución:

a) Sea v.a. X = "tiempo de vida de la pieza del motor" , donde $X \sim \text{Exp}(\lambda)$

Respectivamente, la función de densidad y la función de distribución:

$$f(x) = \lambda . e^{-\lambda x} \qquad F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad \forall x > 0$$

Siendo $P\left[X > 100\right] = 1 - P\left[X \le 100\right] = 1 - F(100) = 1 - \left[1 - e^{-100\lambda}\right] = e^{-100\lambda} = 0,9$

$$e^{-100\lambda} = 0,9 \quad \mapsto \quad -100\lambda = \text{Ln}\,0,9 \Rightarrow -100\lambda = -0,105 \Rightarrow \lambda = 0,00105$$

Por tanto, $X \sim \text{Exp}(0,00105) \qquad f(x) = 0,00105 . e^{-0,00105 . x} \qquad F(x) = 1 - e^{-0,00105 . x} \quad \forall x > 0$

$$P\left[X > 200\right] = 1 - P\left[X \le 200\right] = 1 - F(200) = 1 - \left[1 - e^{-0,00105 . 200}\right] = 0,81$$

o bien, $P\left[X>200\right]=\int_{200}^{\infty} f(x)\,dx=\int_{200}^{\infty} 0{,}00105.e^{-0{,}00105.x}\,dx=-\left[e^{-0{,}00105.x}\right]_{200}^{\infty}=0{,}81$

b) $P\left[X>t\right]=0{,}95 \quad \mapsto \quad P\left[X>t\right]=1-P\left[X\leq t\right]=1-F(t)=e^{-0{,}00105.t}=0{,}95$

$e^{-0{,}00105.t}=0{,}95 \quad \mapsto \quad -0{,}00105\,t=\text{Ln}\,0{,}95 \Rightarrow -0{,}00105\,t=-0{,}05129 \Rightarrow t=48{,}85$

En una tela las fallas siguen un proceso de Poisson a razón de 1 falla cada 10 metros. ¿Cuál es la probabilidad de que la distancia entre la cuarta y quinta falla sea mayor a un metro?

Solución:

En un proceso de Poisson el intervalo entre dos eventos consecutivos es una varible exponencial $\text{Exp}(\lambda)$ con $\lambda=1/10=0{,}1$

$$P(X>1)=\int_{1}^{\infty}\lambda\,e^{-\lambda x}\,dx=\int_{1}^{\infty}0{,}1\,e^{-0{,}1x}\,dx=-e^{-0{,}1x}\Big|_{1}^{\infty}=0{,}9048$$

$$P(X>1)=1-P(X\leq 1)=1-F(1)=1-(1-e^{-0{,}1\times 1})=e^{-0{,}1}=0{,}9048$$

La ciudad de Segovia se comunica con UAM mediante 3 autobuses por hora, distribuidos según un proceso de Poisson. ¿Cuál es la probabilidad de tener que esperar un autobús más de 20 minutos?

Solución:

Sea la variable aleatoria $X\equiv$ tiempo de espera a un autobús donde $X\sim\text{Exp}(\lambda)$

$$\lambda=\frac{3\ \text{autobuses}}{\text{hora}}=\frac{3\ \text{autobuses}}{60\ \text{minutos}}=0{,}05 \quad \text{por tanto} \quad X\sim\text{Exp}(0{,}05)$$

$$P(X>20)=\int_{20}^{\infty}\lambda\,e^{-\lambda x}\,dx=\int_{20}^{\infty}0{,}05\,e^{-0{,}05x}\,dx=-e^{-0{,}05x}\Big|_{20}^{\infty}=0{,}3678$$

$$P(X>1)=1-P(X\leq 20)=1-F(20)=1-(1-e^{-0{,}05\times 20})=e^{-1}=0{,}3678$$

🖫 **El promedio de clientes que llegan a solicitar servicio a un banco es de cinco por minuto. ¿Cuál es la probabilidad de que dos clientes tarden entre 30 a 45 segundos en solicitar servicio?**

Solución:

El número de clientes que llegan por minuto a solicitar servicio bancario es una variable aleatoria discreta de Poisson de parámetro λ

El tiempo que tardan *n* clientes en llegar a solicitar servicio al banco es una variable aleatoria continua Gamma $\Gamma(n,\ 1/\lambda)$

$$\lambda = \frac{5 \text{ clientes}}{\text{minuto}} = \frac{5 \text{ clientes}}{60 \text{ segundos}} = \frac{1}{12}$$

$X \sim \Gamma(2,12)$ con función de densidad $f(x) = \dfrac{\lambda^n\, x^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{-\lambda x} \quad n=2 \quad \lambda = 1/12$

con lo cual, $P(30 \le X \le 45) = \displaystyle\int_{30}^{45} \frac{(1/12)^2}{(2-1)!}\, x^{2-1}\, e^{-x/12}\, dx = \frac{1}{12^2}\int_{30}^{45} x\, e^{-x/12}\, dx = 0{,}17558$

$$\frac{1}{12^2}\int_{30}^{45} x\, e^{-x/12}\, dx \underset{u=x \quad dv=e^{-x/12}dx}{\overset{\text{integración partes}}{=}} -\left(\frac{x}{12}+1\right) e^{-x/12}\Big|_{30}^{45} = -0{,}11171 + 0{,}28729 = 0{,}17558$$

🖫 **El número promedio de recepción de solicitudes en una ventanilla de atención al cliente es de tres al día.**
a) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo antes de recibir una solicitud exceda cinco días?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo antes de recibir una solicitud sea menor de diez días?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo antes de recibir una solicitud sea menor de diez días, si ya han pasado cinco días sin recibir solicitudes?

Solución:

a) X = "días antes de recibir una solicitud", $X \sim \text{Exp}(\lambda = 3)$

$f(x) = 3e^{-3x} \qquad F(x) = P(X \le x) = 1 - e^{-3x}$

$P(X > 5) = 1 - P(X \le 5) = 1 - F(5) = 1 - (1 - e^{-3.5}) = e^{-15}$

b) $P(X < 10) = F(10) = 1 - e^{-3.10} = 1 - e^{-30}$

c)

$$P(X<10 \mid X>5)=\frac{P(5<X<10)}{P(X>5)}=\frac{F(10)-F(5)}{1-F(5)}=\frac{1-e^{-30}-(1-e^{-15})}{e^{-15}}=\frac{e^{-15}-e^{-30}}{e^{-15}}=1-e^{-15}$$

Adviértase que $P(X<10 \mid X>5)=P(X\leq 5)$ lo que significa que la variable aleatoria exponencial no tiene memoria.

Sea X la variable aleatoria que describe el número de clientes que llega a un supermercado durante un día (24 horas). Sabiendo que la probabilidad de que llegue un cliente en un día es equivalente a 100 veces la que no llegue ningún cliente en un día, se pide:

a) Probabilidad de que lleguen al menos 3 clientes al día.

b) Si acaba de llegar un cliente, calcular la probabilidad que pase más de 25 minutos hasta que llegue el siguiente cliente (o hasta que llegue el primer cliente).

c) En dos semanas, ¿cuál es la probabilidad aproximada de que lleguen como mucho 1300 clientes al supermercado?

Solución:

a) Se trata de una distribución de Poisson: $P(X=k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

$$P(X=1)=100\,.\,P(X=0) \quad\rightarrow\quad \frac{\lambda}{1!}e^{-\lambda}=100\,.\,\frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda} \quad\rightarrow\quad \lambda\,.\,e^{-\lambda}=100\,.\,e^{-\lambda} \quad\rightarrow\quad \lambda=100$$

$$P(X\geq 3)=P\left[z\geq\frac{3-100}{10}\right]=P(z\geq -9,7)=P(z\leq 9,7)\approx 1$$

b) Es una función exponencial, es decir, el tiempo de espera hasta que ocurre un suceso (que llegue el siguiente cliente), donde λ es el número de sucesos de Poisson por unidad de tiempo. $X\sim \text{Exp}(\lambda)$

Para calcular el parámetro λ se establece una proporción:

$$\frac{100}{24\,.\,60}=\frac{\lambda}{25} \quad\rightarrow\quad \lambda=\frac{10\cancel{0}\,.\,25}{24\,.\,6\cancel{0}}=\frac{250}{144}=1,736$$

$$P(X\leq x)=F(x)=1-e^{-\lambda\,.\,x} \quad\rightarrow\quad P(X\leq 1)=F(1)=1-e^{-1,736\,.\,1}=0,8238$$

c) $P(X\leq 1300)=P\left[z\leq\dfrac{1300-1400}{\sqrt{1400}}\right]=P(z\leq -2,67)=P(z\geq 2,67)=0,00379$

El tiempo de revisión del motor de un avión sigue aproximadamente una distribución exponencial, con media 22 minutos.

a) Hallar la probabilidad de que el tiempo de la revisión sea menor de 10 minutos.

b) El costo de la revisión es de 200 euros por cada media hora o fracción. ¿Cuál es la probabilidad de que una revisión cueste 400 euros?

c) Para efectuar una programación sobre las revisiones del motor, ¿cuánto tiempo se debe asignar a cada revisión para que la probabilidad de que cualquier tiempo de revisión mayor que el tiempo asignado sea solo de 0,1?

Solución:

a) Sea X = "tiempo de revisión del motor de un avión en minutos"

$$\mu_x = E(X) = \frac{1}{\lambda} = 22 \text{ minutos} \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{1}{22} \qquad X \sim \text{Exp}\left[1/22\right]$$

Función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{22}\, e^{-x/22} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Función distribución:

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 1 - e^{-x/22} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$P\left[X < 10\right] = F(10) = 1 - e^{-10/22} = 1 - e^{-5/11} = 0,365$$

o bien,

$$P\left[X < 10\right] = \int_0^{10} f(x)\,dx = \int_0^{10} \left[\frac{1}{22}\, e^{-x/22}\right] dx = -\left[\, e^{-x/22}\,\right]_0^{10} = -e^{-10/22} + 1 = 1 - e^{-5/11} = 0,365$$

b) Como el costo de la revisión del motor es de 200 euros por cada media hora o fracción, para que la revisión cueste 400 euros la duración de la revisión debe de ser inferior o igual a 60 minutos. Es decir, se tendrá que calcular $P\left[30 < X \leq 60\right]$

$$P\left[30 < X \leq 60\right] = F(60) - F(30) = \left[1 - e^{-60/22}\right] - \left[1 - e^{-30/22}\right] = e^{-30/22} - e^{-60/22} =$$
$$= e^{-15/11} - e^{-30/11} = 0,19$$

o bien,

$$P\left[30 < X \leq 60\right] = \int_{30}^{60} f(x)\,dx = \int_{30}^{60} \left[\frac{1}{22}\, e^{-x/22}\right] dx = -\left[\, e^{-x/22}\,\right]_{30}^{60} = -e^{-60/22} + e^{-30/22} =$$
$$= e^{-15/11} - e^{-30/11} = 0,19$$

c) Sea t = "tiempo que se debe asignar a la revisión", verificando $P\left[X > t\right] = 0,1$

$$P\left[X > t\right] = \int_t^{\infty} f(x)\,dx = \int_t^{\infty} \left[\frac{1}{22}\, e^{-x/22}\right] dx = -\left[\, e^{-x/22}\,\right]_t^{\infty} = 0 + e^{-t/22} = 0,1$$

$$e^{-t/22} = 0,1 \quad \mapsto \quad -t/22 = \text{Ln}(0,1) \quad \mapsto \quad -t/22 = -2,30 \quad \Rightarrow \quad t = 50,6 \approx 51 \text{ minutos}$$

Un sistema esta formado con dos procesadores, los procesadores 1 y 2 funcionan correctamente durante un tiempo exponencial de media de 5 y 6 años, respectivamente. Se pide:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que ambos procesadores funcionen correctamente más de 4 años?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el procesador 1 deje de funcionar correctamente antes que el procesador 2?

Solución:

a) Sea $X_i \equiv$ tiempo de funcionamiento correcto del procesor i-ésimo , $X_i \sim Exp(\lambda_i)$ con $\lambda_1 = \frac{1}{5}$ y $\lambda_2 = \frac{1}{6}$

$$P(X>4) = P\left[\min(X_1, X_2) > 4\right] = \prod_{i=1}^{2} e^{-\lambda_i 4} = e^{-\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)4} = e^{-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)4} = 0,2307$$

b) $P(X_1 < X_2) = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \quad \rightarrow \quad P(X_1 < X_2) = \dfrac{1/5}{1/5 + 1/6} = 0,545$

PROCESOS ESTOCÁSTICOS

Un modelo estocástico es todo esquema abstracto de naturaleza probabilística susceptible de representar algún fenómeno real. En la medida en que los modelos plasman lo observado, permiten preveer las consecuencias de ciertas situaciones, permitiendo la posibilidad de efectuar elecciones razonadas.

En un modelo aleatorio se reconocen los siguientes elementos:

a) **Un conjunto de estos posibles del sistema S**
b) **Un conjunto de eventos elementales posibles Ω**
c) **Una distribución de probabilidades sobre Ω**

Los modelos aleatorios que son funciones aleatorias en el tiempo se denominan Procesos Estocásticos o Aleatorios. El objetivo de este tipo de modelos es conocer cómo el futuro de un sistema está ligado (correlacionado) con su pasado y presente.

- **Se dice que $\{X_t\}_{t\in T}$ es un proceso estocástico en S sí X_t es una variable aleatoria con valores en S para cualquier t.**

Un proceso estocástico es, entonces, un conjunto de variabless aleatorias, donde los valores $t\in T$ se interpretan como instantes de tiempo. El conjunto S corresponde al conjunto de estados posibles para el sistema en estudio. De este modo, X_t puede interpretarse como el estado de un sistema en el instante t, estado que, visto desde un instante anterior a t, es una variable aleatoria.

El proceso estocástico (colección completa de variables X_t) corresponde a la evolución aleatoria del sistema.

La realización de un proceso estocástico es un conjunto de valores del sistema S, valores observados para el estado del sistema en cada instante del tiempo. Es decir, la realización de un proceso estocástico puede contemplarse como una función de T en S, de forma que a cada $t\in T$ asocia el valor observado para el estado del sistema en t.

Un proceso estocástico se puede describir en probabilidad cuando se puede construir la función de distribución conjunta para cualquier subconjunto de él, es decir, se debe conocer $F_X(x,t)$, $\forall n\in N, \forall x\in S^n, \forall t\in T^n$ tal que $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$

$$F_X(x,t) = P(X_{t_1} \le x_1, X_{t_2} \le x_2, \cdots, X_{t_n} \le x_n)$$

PROCESOS DE CONTEO

Un proceso estocástico $\{N(t), t \geq 0\}$ es un proceso de conteo sí $N(t)$ representa el número total de sucesos de algún fenómeno aleatorio que han ocurrido hasta el instante t.

Sea el contador que registra el número de visitas en una pagina web, con cada visita el contador se incrementa en una unidad, denotando por $N(t)$ el número que marca el contador en el instante t, $N(t)$ es una variable aleatoria, dado que las personas visitan la web en tiempos aleatorios y no en intervalos fijados.

Ejemplos de procesos de conteo son: las ventas de un producto en un supermercado, las llegadas de camiones a puntos de carga, el número de accidentes en la carretera a lo largo de un año, etc.

Un proceso de conteo debe verificar:

- $N(t) \geq 0$
- **$N(t)$ toma valores enteros**
- **Sí $s < t \;\rightarrow\; N(s) \leq N(t)$**
- **Sí $s < t \;\rightarrow\; N(t) - N(s) \equiv$ número de sucesos ocurridos en el intervalo (s, t)**

INCREMENTOS INDEPENDIENTES: Un proceso de conteo se dice de incrementos independientes si el número de sucesos que ocurren en intervalos de tiempos disjuntos es independiente, es decir, el número de sucesos en el intervalo (t_1, t_2), que se denota por $N(t_2) - N(t_1)$, es independiente del número de sucesos en el intervalo (t_3, t_4), $N(t_4) - N(t_3)$, $\forall t_1, t_2, t_3, t_4$ con $(t_1, t_2) \cap (t_3, t_4) = \phi$

Un ejemplo de proceso de conteo con incrementos independientes es el número de trabajos que llegan a una impresora, puesto que los trabajos que llegan en un inervalo de tiempo no tienen por qué influir en los trabajos que llegan en otro intervalo de tiempo que sea disjunto con el primero.

INCREMENTOS ESTACIONARIOS: Un proceso de conteo se dice de incrementos estacionarios si la distribución del número de sucesos que ocurren en un intervalo de tiempo depende sólo del tamaño del intervalo, esto es, el número de sucesos que se dan en el intervalo $(t_1 + s, t_2 + s)$, $N(t_2 + s) - N(t_1 + s)$, tiene la misma distribución que el número de sucesos en el intervalo (t_1, t_2), $N(t_2) - N(t_1)$, para cualquier $t_1 < t_2, s \geq 0$

El ejemplo del número de trabajos que llegan a una impresora puede que no sea estacionario ya que es de esperar que el número de trabajos que lleguen en el intervalo de tiempo de nueve a diez de la mañana no coincida con los que llegan entre las dos a tres de la tarde.

PROCESO DE POISSON

El proceso de conteo $\{N(t), t \geq 0\}$ es un proceso de Poisson de tasa, $\lambda > 0$, si verifica:

- **$N(0) = 0$**
- **Tiene incrementos independientes**
- **El número de sucesos en un intervalo de tiempo de longitud t sigue una distribución de Poisson de media (λt), es decir:**

$$P\left[N(t+s) - N(s) = n\right] = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \quad , \; n = 0, 1, 2, \cdots$$

(λt) es el promedio de observaciones o registros del evento en el intervalo $[0, t]$, así cuanto mayor es la longitud del intervalo de observación, mayor es el promedio de observaciones realizadas, y mayor también la incertidumbre del número de observaciones.

DEFINICIÓN ALTERNATIVA DE UN PROCESO DE POISSON

Un proceso de Poisson de parámetro λ se puede definir como un proceso estocástico $\{N(t), t \geq 0\}$ tal que:

- **Tiene incrementos independientes**
- **$N(t+s) - N(t)$ es independiente de s $\forall s, t \geq 0$**
- **Para h próximo a 0, la probabilidad de que en el intervalo de tiempo [0, h] se dé exactamente una ocurrencia del fenómeno es $\lambda h + o(h)$**
- **Para h próximo a 0, la probabilidad de que en el intervalo de tiempo [0, h] haya dos o más ocurrencias del fenómeno es $o(h)$**

Con lo cual, el número medio de ocurrencias por unidad de tiempo será

$$\lim_{h \to 0} \frac{\lambda h + o(h)}{h} = \lambda$$

motivo por el que el parámetro λ del proceso de Poisson se denomina en ocasiones *intensidad* o *tasa* del proceso.

PROCESO DE POISSON HOMOGÉNEO

Una colección de variables aleatorias $\{N(t), t \geq 0\}$ se llama un Proceso de Poisson homogéneo con intensidad $\lambda > 0$ si satisface las propiedades:

- **$P\big[N(0) = 0\big] = 1 \quad \to \quad N(0) = 0$ siempre**
- **Es no decreciente: si $s < t \quad \to \quad N(s) \leq N(t)$**
- **$N(t)$ tiene incrementos independientes. En este sentido, se tiene que $N(t_1)$, $N(t_2) - N(t_1)$, $N(t_3) - N(t_2)$, ... , $N(t_{n-1}) - N(t_n)$ $\quad 0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ con $n \geq 1$ son variables independientes entre sí.**
- **$N(t)$ tiene incrementos estacionarios. En esta línea, para $0 \leq s < t$, $N(t) - N(s)$ sigue una distribución de Poisson de parámetro $\lambda\,(t - s)$**

Una persona estaciona ilegalmente en un aeropuerto dos veces al día por periodo de una hora cada vez. Si la pasada de la Policia Municipal es un Proceso de Poisson con un promedio de λ pasadas a la hora, ¿cuál es la probabilidad de que no le pongan una multa?

Solución

No se conoce a que hora se estaciona, solo que se estaciona en dos segmentos de una hora cada uno. Se conoce que el suceso de tener multa es un proceso de Poisson, por lo se trata de incrementos independientes, lo que suceda en una hora es independiente de lo que pase en el otro intervalo de tiempo.

$N(t) \equiv$ número de partes en el intervalo $[0, t]$

Sea $t_1 = 1$ el intervalo de la primera hora y $t_2 = 1$ el intervalo de la segunda hora.

La probabilidad solicitada es:

$$P\Big[\big(N(t_1) = 0\big) \cap \big(N(t_2) = 0\big)\Big] = P\big[N(t_1) = 0\big] \times P\big[N(t_2) = 0\big] = e^{-\lambda} \times e^{-\lambda} = e^{-2\lambda}$$

🖫 **Los defectos de un cable submarino siguen un proceso de Poisson de parámetro $\lambda = 0,1$ por km. Se pide:**
a) ¿ Probabilidad de que no haya defectos en los dos primeros kilómetros de cable?
b) Si no hay defectos en los dos primeros kilómetros de cable, ¿cuál es la probabilidad de que tampocos los haya en el tercer kilómetro?

Solución

a) $N(t) \equiv$ **número de kilómetros de cable en el intervalo** $[0, t]$

$N(2)$ **tiene una ditribución de Poisson de parámetro** $n\lambda = 2(0,1) = 0,2$

$$P\left[N(2) = 0\right] = e^{-0,2} = 0,8187$$

b) $N(3) - N(2)$ **y** $N(2) - N(0) = N(2)$ **son independientes, de modo que,**

$$P\left[N(3) - N(2) = 0 \,\middle|\, N(2) = 0\right] = P\left[N(3) - N(2) = 0\right] = e^{-0,1} = 0,9048$$

DISTRIBUCIÓN DE TIEMPOS DE UN PROCESO DE POISSON

Sea el proceso de Poisson $\{N(t), t \geq 0\}$ **de tasa** λ**, las variables aleatorias por** T_i**, tiempo transcurrido entre el suceso** $(i-1)$ **y el suceso** (i) **con** $i = 1, 2, \ldots$ **, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución exponencial de tasa** λ**, esto es,** $T_i \sim Exp(\lambda)$

El tiempo de ocurrencia del suceso n-ésimo es: $S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i \sim \Gamma(n, \lambda)$ **siendo** $n \geq 1$

suma de los primeros n tiempos entre llegadas, por lo que S_n **sigue una distribución Gamma de parámetros n y** λ**,** $S_n \sim \Gamma(n, \lambda) \;\rightarrow\; E(S_n) = \dfrac{n}{\lambda} \quad V(S_n) = \dfrac{n}{\lambda^2}$

🖫 **En el aeropuerto de Madrid Barajas Adolfo Suárez aterrizan aviones según un proceso de Poisson de tasa** $\lambda = 30$ **aviones a la hora. Se pide:**
a) ¿Cuál es el tiempo esperado hasta que aterriza el décimo avión?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo que transcurre entre el aterrizaje del avión 10 y el avión 11 exceda 5 minutos?

Solución:

a) Tasa $\lambda = 30$ **aviones/hora** $\rightarrow$ $\lambda = \dfrac{1}{2}$ **aviones/minuto**

El tiempo hasta que aterriza el 10 avión es $E(S_{10}) = \dfrac{n}{\lambda} = \dfrac{10}{1/2} = 20$ **minutos**

b) $T_{11} \equiv$ tiempo transcurrido entre el aterrizaje 10 y 11

$$P\left[T_{11} > 5\right] = e^{-\frac{5}{2}} = 0,082$$

DISTRIBUCIONES ASOCIADAS AL PROCESO DE POISSON

- **PROCESO UNIFORME DE POISSON**

Si (a, b) es un intervalo de tiempo dado sobre el que ocurren *n* eventos en los instantes $(a \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n \leq b)$, entonces los *n* eventos se reparten uniformemente en el intervalo (a, b). Es decir, la función de distribución conjunta de los $(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ instantes viene dada por:

$$f(t_1, t_2, \cdots, t_n) = \frac{n!}{(b-a)^n} \qquad a \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n \leq b$$

- **DISTRIBUCIÓN BINOMIAL A PARTIR DEL PROCESO DE POISSON**

Durante el intervalo de tiempo $[0, t]$ se han observado *n* ocurrencias del evento de interés, es decir, el evento $(X_t = n)$ ha ocurrido. Los eventos que ocurren en el subintervalo $[0, s]$ siguen una distribución Binomial $B(n, s/t)$

Sean s y t tiempos tales que $0 < s < t$ y sean k y n enteros tales que $0 \leq k \leq n$, entonces:

$$P\left[X_s = k \mid X_t = n\right] = \binom{n}{k} \left(\frac{s}{t}\right)^k \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-k}$$

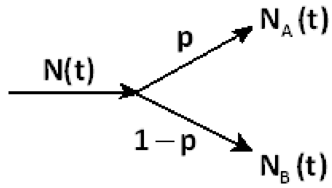
- Sean $X_1(t)$ y $X_2(t)$ dos procesos de Poisson independientes con parámetros λ_1 y λ_2 respectivamente, y sean k y n enteros tales que $0 \leq k \leq n$, entonces:

$$P\left[X_1(t) = k \mid X_1(t) + X_2(t) = n\right] = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^{n-k}$$

DIVISIÓN DE UN PROCESO UNIFORME DE POISSON

Sea $N(t)$ un proceso uniforme de Poisson de tasa λ, tal que los eventos asociados a $N(t)$ pueden clasificarse en dos categorías, A y B. La probabilidad de un evento $N(t)$ de tipo A es p, y la de tipo B es $(1-p)$

De este modo, a partir del proceso $N(t)$ pueden definirse dos procesos $N_A(t)$ y $N_B(t)$, que representan el número de eventos tipo A y tipo B que se han producido hasta t.



Los procesos $N_A(t)$ y $N_B(t)$, son dos procesos uniformes de Poisson independientes de tasas $\lambda_A = p\lambda$ y $\lambda_B = (1-p)\,\lambda$

Los clientes entran a una agencia de viajes de acuerdo a un proceso de Poisson con intensidad de 10 por hora. De forma independiente, cada cliente adquiere un paquete de viajes con probabilidad 0,3. ¿Cuál es la probabilidad de que durane la primera hora nueve clientes entren a la tienda y que tres de estos clientes adquiera un paquete de viajes?.

Solución:

Sea $N_1 = N_1(1)$ el número de clientes que realizan una compra durante la primera hora y $N_0 = N_0(1)$ el número de clientes que no compran ningún paquete de viajes. N_1 y N_0 son variables aleatorias independientes de Poisson con parámetros respectivos $\lambda_1 = p\lambda = 0,3 \times 10 = 3$ y $\lambda_2 = p\lambda = 0,7 \times 10 = 7$

En consecuencia, $P\left[N_1 = 3\right] = \dfrac{3^3}{3!}\,e^{-3} = 0,224 \qquad P\left[N_0 = 6\right] = \dfrac{7^6}{6!}\,e^{-6} = 0,149$

$$P\left[(N_0 = 6) \cap (N_1 = 3)\right] = P(N_0 = 6) \times P(N_1 = 3) = 0,149 \times 0,224 = 0,0334$$

MEZCLA DE PROCESOS UNIFORMES DE POISSON

Sean $\left\{N_1(t),\, t \geq 0\right\}$ y $\left\{N_2(t),\, t \geq 0\right\}$ dos procesos uniformes de Poisson independientes con tasas λ_1 y λ_2 respectivamente. El proceso $\left\{N(t) = N_1(t) + N_2(t),\, t \geq 0\right\}$ es un proceso uniforme de Poisson de tasa $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$

Si se mezclan *c* clases los resultados se pueden extender de forma directa:

La suma de *c* procesos de conteo independientes es un proceso de Poisson, siendo c suficientemente grande y las tasas de los procesos individuales deben de ser pequeñas en relación a c.

Por otra parte, sea S_n^1 el tiempo de ocurrencia del suceso n-ésimo del tipo 1 y S_m^2 el

tiempo de ocurrencia del suceso m-ésimo del tipo 2.

La probabilidad de que ocurran n sucesos del tipo 1 antes que m sucesos del tipo 2:

$$P(S_n^1 < S_m^2) = \sum_{k=n}^{n+m-1} \binom{n+m-1}{k} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n+m-1-k}$$

Dos equipos en una carrera, independientes uno de otro, siguen un proceso de Poisson, ¿cuál es la probabilidad de que haya 6 llegadas del equipo 1 antes que 4 llegadas del equipo 2?

Solución:

El equipo 1 sigue un proceso de Poisson de parámetro λ_1, mientras que el equipo 2 sigue un proceso de Poisson de parámetro λ_2. El marco general es un proceso de Poisson de parámetro $(\lambda_1 + \lambda_2)$.

La probabilidad de llegada del equipo 1 es $p = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$

La probabilidad solicitada es $P(S_6^1 < S_4^2) = \displaystyle\sum_{k=6}^{9} \binom{9}{k} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{9-k}$

Suponiendo que los dos equipos siguen un proceso de Poisson de la misma intensidad $(\lambda_1 = \lambda_2)$, la probabilidad de llegada del equipo 1 es $p = \dfrac{1}{2}$

La probabilidad solicitada sería:

$$P(S_6^1 < S_4^2) = \sum_{k=6}^{9} \binom{9}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{9-k} = \sum_{k=6}^{9} \binom{9}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \left(\frac{1}{2}\right)^9 \sum_{k=6}^{9} \binom{9}{k} =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^9 \sum_{k=6}^{9} \binom{9}{k} = \frac{1}{512}\left[\binom{9}{6} + \binom{9}{7} + \binom{9}{8} + \binom{9}{9}\right] = \frac{130}{512} = 0{,}2539$$

DISTRIBUCIÓN CONDICIONADA DE TIEMPOS DE LLEGADA

Cuando se ha producido un suceso de un proceso de Poisson hasta el instante t y se desea saber en qué instante se ha producido este suceso.

$$P(T_1 < s \mid N(t)=1) = \frac{P\left[(T_1 < s) \cap (N(t)=1)\right]}{P\left[N(t)=1\right]} = \frac{s}{t}$$

Al ser los procesos de Poisson de incrementos independientes y estacionarios, se puede suponer que cada intervalo en $\left[0, t\right]$ de igual longitud tenga la misma probabilidad de contener el suceso.
Es decir, se puede suponer que el tiempo de ocurrencia del suceso esta distribuido uniformenete en $\left[0, t\right]$

$$P(T_1 < s \mid N(t)=1) = \frac{P\left[(T_1 < s) \cap (N(t)=1)\right]}{P\left[N(t)=1\right]} = \frac{P\left[1 \text{ suceso en } [0, s) \cap 0 \text{ sucesos en } [s, t]\right]}{P\left[N(t)=1\right]} =$$

$$= \frac{P\left[1 \text{ suceso en } [0, s)\right] \times P\left[0 \text{ sucesos en } [s, t]\right]}{P\left[N(t)=1\right]} = \frac{\lambda s e^{-\lambda s}\, e^{-\lambda(t-s)}}{\lambda t e^{-\lambda t}} = \frac{s}{t}$$

🖫 **El número de fallos de la componente de una avión es un proceso de Poisson de tasa λ, que falla en promedio una vez de cada 500 horas. Por especificaciones de la fábrica, cada componente dura un máximo de 2500 horas. Sí la componente ha actuado correctamente durante 500 horas. Se pide:**
a) Probabilidad de que la componente dure 1000 horas en total.
b) Probabilidad de que la componente dure 1500 horas más.
c) Valor esperado de la vida de la componente.

Solución 1:

a) No considerando de manera directa las especificaciones de la fábrica, sea

$T_i \equiv$ **tiempo entre el fallo i-ésimo y el anterior , donde** $T_i = Exp(\lambda = 1/500)$

$$P(T_1 \geq 1000 \mid T_1 \geq 500) = \frac{P\left[(T_1 \geq 1000) \cap (T_1 \geq 500)\right]}{P\left[T_1 \geq 500\right]} = \frac{P\left[T_1 \geq 1000\right]}{P\left[T_1 \geq 500\right]} = \frac{e^{-1000\lambda}}{e^{-500\lambda}} =$$

$$= e^{-500\lambda} = e^{-500\frac{1}{500}} = e^{-1} = 0{,}3678$$

b) $P(T_1 \geq 1500) = e^{-1500\lambda} = e^{-1500\frac{1}{500}} = e^{-3} = 0{,}04978$

c) $E\left[T\right] = \dfrac{1}{\lambda} + 500 = 500 + 500 = 1000 \text{ horas}$

Solución 2:

a') Considerando las especificaciones de la fábrica, se tiene que ocurre al menos un fallo entre las 500 horas y las 2500 horas con igual probabilidad.

$$T_i \sim U(500\,,\ 2500) \text{ con función de distribución } F(t)=\begin{cases} 0 & t<500 \\ \dfrac{t-500}{2500-500} & 500\le t\le 2500 \\ 1 & t>2500 \end{cases}$$

$$P(T_1 \ge 1000 \mid 500\le T_1 \le 2500)=\frac{P\left[(T_1\ge 1000)\cap\ (500\le T_1\le 2500)\right]}{P\left[T_1\ge 500\right]}=P(T_1\ge 1000)=$$

$$=1-P(T_1\le 1000)=1-F(1000)=1-\frac{1000-500}{2500-500}=1-\frac{500}{2000}=\frac{1500}{2000}=0,75$$

b') $$P(T_1 \ge 1500 \mid 500\le T_1 \le 2500)=\frac{P\left[(T_1\ge 1500)\cap\ (500\le T_1\le 2500)\right]}{P\left[T_1\ge 500\right]}=P(T_1\ge 1500)=$$

$$=1-P(T_1\le 1500)=1-F(1500)=1-\frac{1500-500}{2500-500}=1-\frac{1000}{2000}=\frac{1000}{2000}=0,5$$

c') $$E\left[T\right]=\frac{500+2500}{2}=1500\text{ horas}$$

🖫 Un estudiante compra un PC que se bloquea frecuentemente, deduciendo que el número de veces que se bloquea sigue un proceso de Poisson con una media de tres bloqueos a la hora. Se pide:

a) Probabilidad de que el PC siga funcionando sin bloquearse durante al menos una hora después de encenderlo.

b) Si el PC no se ha bloqueado después de una hora, ¿cuál será la probabilidad de que no se bloquee después de $(t+2)$ horas.

Solución:

a) Sea $X \equiv$ Número de veces que se bloquea en una hora , $X\sim P(3)$

Que el PC siga funcionando sin bloquearse después de una hora significa que en el intervalo desde que se ha encendido hasta que pase una hora no se ha bloqueado, por tanto:

$$P[X=0]=\frac{3^0}{0!}e^{-3}=e^{-3}=0,04978$$

Si se define la variable $T \equiv$ Tiempo en horas hasta que se bloquea , $T \sim \text{Exp}(3)$ con $E(T) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{3}$ y función de distribución $F(t) = 1 - e^{-\lambda t} = 1 - e^{-3t}$, teniendo entonces:

$$P[T > 1] = 1 - P[T \le 1] = 1 - F(1) = 1 - (1 - e^{-3t}) = e^{-3t} = 0,04978$$

b) $$P[T > t+2 \mid T > 1] = \frac{P\big([T > t+2] \cap [T > 1]\big)}{P[T > 1]} = \frac{P[T > t+2]}{P[T > 1]} = \frac{1 - P[T \le t+2]}{1 - P[T \le 1]} =$$

$$= \frac{1 - F(t+2)}{1 - F(1)} = \frac{1 - [1 - e^{-3(t+2)}]}{1 - [1 - e^{-3}]} = \frac{e^{-3(t+2)}}{e^{-3}} = e^{-3(t+1)} = P[T > t+1]$$

Los clientes que llegan al puesto de información de un aeropuerto sigue una distribución de Poisson. Entre $9:00$ y $10:00$ han llegado cuatro clientes. Calcular la probabilidad de que el tercer cliente haya llegado entre $9:20$ y $9:30$, y el tiempo esperado de llegada de este cliente.

Solución:

Se calcula la distribución condicional de tiempo de llegada del tercer cliente S_3, sabiendo que han llegado 4 clientes en una hora.

$P(S_3 < x \mid N(1) = 4)$ es la probabilidad de que lleguen 3 clientes en el intervalo $(0, x)$ y un cliente en $(x, 1)$ o que lleguen los cuatro clientes en el intervalo $(0, x)$ y ninguno en $(x, 1)$.

Se calcula la función de distribución $F(x)$

Sí $0 \le x < 1$

$$F(x) = P(S_3 < x \mid N(1) = 4) = \frac{P\big[(S_3 < x) \cap (N(1) = 4)\big]}{P\big[N(1) = 4\big]} =$$

$$= \frac{P\big[N(x) = 3\big]\, P\big[N(1-x) = 1\big] + P\big[N(x) = 4\big]\, P\big[N(1-x) = 0\big]}{P\big[N(1) = 4\big]} =$$

$$= \frac{1}{\frac{\lambda^4}{4!} e^{-\lambda}} \left[\frac{(\lambda x)^3}{3!} e^{-\lambda x}\, \lambda\,(1-x)\, e^{-\lambda(1-x)} + \frac{(\lambda x)^4}{4!} e^{-\lambda x}\, e^{-\lambda(1-x)} \right] =$$

$$= \frac{4!\, e^{\lambda}}{\lambda^4} \left[\frac{(\lambda x)^3}{3!} e^{-\lambda x}\, \lambda\,(1-x)\, e^{-\lambda(1-x)} + \frac{(\lambda x)^4}{4!} e^{-\lambda x}\, e^{-\lambda(1-x)} \right] =$$

$$= \frac{4!\, e^{\lambda}}{\lambda^4} \left[\frac{\lambda^3 x^3}{3!} \lambda\,(1-x)\, e^{-\lambda} + \frac{\lambda^4 x^4}{4!} e^{-\lambda} \right] =$$

$$= 4x^3(1-x) + x^4 = 4x^3 - 3x^4$$

Sí $x \geq 1$ $F(x) = 1$ porque llegan 4 clientes en una hora.

$$F(x) = \begin{cases} 4x^3 - 3x^4 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases} \qquad \text{función de densidad } f(x) = \begin{cases} 12x^2 - 12x^3 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & x \geq 1 \end{cases}$$

- **La probabilidad de que el tercer cliente haya llegado entre $9:20$ y $9:30$, será:**

$$F\left(\frac{30}{60}\right) - F\left(\frac{20}{60}\right) = F\left(\frac{1}{2}\right) - F\left(\frac{1}{3}\right) = \left[4\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^4\right] - \left[4\left(\frac{1}{3}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{3}\right)^4\right] =$$

$$= \frac{4}{8} - \frac{3}{16} - \frac{4}{27} + \frac{3}{81} = \frac{29}{144} = 0{,}2013$$

- **El tiempo esperado de llegada del tercer cliente, dado que han llegado 4 clientes entre las $9:20$ y $9:30$, viene dado por la esperanza condicional de S_3:**

$$E(S_3 \mid N(1) = 4) = \int_0^1 x\, f(x)\, dx = \int_0^1 x\,(12x^2 - 12x^3)\, dx = \int_0^1 (12x^3 - 12x^4)\, dx =$$

$$= \frac{3}{5} \text{ hora} \equiv 36 \text{ minutos}$$

Así, el tiempo esperado de llegada del tercer cliente es $9:36$ horas

PROCESOS DE POISSON COMPUESTOS

Un proceso estocástico $\{X(t), t \geq 0\}$ es un proceso de Poisson compuesto si se puede expresar como $X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$

siendo $\{N(t), t \geq 0\}$ un proceso de Poisson e $\{Y_i, i \geq 1\}$ una familia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas y además independientes de $\{N(t), t \geq 0\}$

- Media de $X(t)$: $E\big[X(t) \,\big|\, N(t)=n\big] = E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i \,\Big|\, N(t)=n\right] = E\left(\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i\right) = n\,E(Y_1)$

  es decir, $E\big[X(t) \,\big|\, N(t)\big] = N(t)\,E(Y_1)$

  en consecuencia, $E\big[X(t)\big] = E\Big(E\big[X(t) \,\big|\, N(t)=n\big]\Big) = E\big[N(t)\,E(Y_1)\big] = \lambda\, t\, E(Y_1)$

- Varianza de $X(t)$: $V\big[X(t) \,\big|\, N(t)=n\big] = V\left[\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i \,\Big|\, N(t)=n\right] = V\left(\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i\right) = n\,V(Y_1)$

  es decir, $V\big[X(t) \,\big|\, N(t)\big] = N(t)\,V(Y_1)$

  con lo cual,

$$V\big[X(t)\big] = E\Big(V\big[X(t) \,\big|\, N(t)\big]\Big) + V\Big(E\big[X(t) \,\big|\, N(t)\big]\Big) = E\big[N(t)\,V(Y_1)\big] + V\big[N(t)\,V(Y_1)\big] =$$

$$= \lambda\, t\, V(Y_1) + \lambda\, t\, E(Y_1)^2 = \lambda\, t\left[V(Y_1) + E(Y_1)^2\right] = \lambda\, t\, E(Y_i^2)$$

En una compañia constructora la cantidad de accidentes mensuales sigue un proceso de Poisson de intensidad 4, mientras que la cantidad de trabajadores daminificados en cada acciente es una variable aleatoria independiente con distribución uniforme U[1, 3] e independiente de la cantidad de accidentes ocurridos. ¿Cuál es la media y la varianza de la cantidad anual de trabajadores daminificados?

Solución

$N(t) \equiv$ "Cantidad de accidentes en t meses"

$Y_i \equiv$ "Número de trabajadores damnificados en el i-ésimo accidente" $\quad Y_i \sim U[1, 3]$

$$m_1 = E(Y_1) = \mu = \frac{a+b}{2} = \frac{1+3}{2} = 2 \qquad m_2 = E(Y_1^2) = \frac{a^2+ab+b^2}{3} = \frac{1+3+9}{3} = \frac{14}{3}$$

Número total trabajadores damnificados al año $\equiv X(12)=\sum_{i=1}^{N(12)} Y_i$

$$E\left[X(t)\,\middle|\,N(t)\right]=N(t)\,E(Y_1) \quad\rightarrow\quad E\left[X(12)\,\middle|\,N(12)\right]=N(12)\,E(Y_1)=4\times 12\times\frac{(1+3)}{2}=96$$

$$V\left[X(t)\,\middle|\,N(t)\right]=\lambda\,t\,E(Y_1^2) \quad\rightarrow\quad V\left[X(12)\,\middle|\,N(12)\right]=4\times 12\times\frac{14}{3}=224$$

PROCESO DE POISSON NO-HOMOGÉNEO

La importancia de los procesos no homogénos, también conocidos como *no estacionarios*, se encuentra en que no se requiere la condición de incrementos estacionarios, por lo que se contempla la posibilidad de que algunos sucesos sean más frecuentes en ciertos periodos.

El proceso de conteo $\{N(t), t \geq 0\}$ es un proceso de Poisson no-homogéneo con función de intensidad $\lambda > 0$ si satisface las propiedades:

- **$P[N(0) = 0] = 1 \quad \rightarrow \quad N(0) = 0$ siempre**
- **Es no decreciente: si $s < t \quad \rightarrow \quad N(s) \leq N(t)$**
- **$N(t)$ tiene incrementos independientes. En este sentido, se tiene que $N(t_1)$, $N(t_2) - N(t_1)$, $N(t_3) - N(t_2)$, ... , $N(t_{n-1}) - N(t_n)$ $\quad 0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ con $n \geq 1$ son variables independientes entre sí.**
- **Para $0 \leq s < t$, $N(t) - N(s)$ sigue una distribución de Poisson de parámetro $\int_s^t \lambda(u)\, du$**

Denotando $m(t) = \int_0^t \lambda(s)\, ds$ resulta que

$$P[N(t+s) - N(t) = n] = \frac{[m(t+s) - m(t)]^n}{n!}\, e^{-[m(t+s)-m(t)]} \qquad n \geq 0$$

$[N(t+s) - N(t)] \sim P[\lambda = m(t+s) - m(t)]$ y $m(t) \equiv$ función de valor medio del proceso

- **Sean $\{N(t), t \geq 0\}$ y $\{M(t), t \geq 0\}$ procesos de Poisson independientes no-homogéneos, con función de intensidad respectivas $\lambda(t)$ y $\mu(t)$ y sea $N^{\bullet}(t) = N(t) + M(t)$, entonces:**

🗎 **$\{N^{\bullet}(t), t \geq 0\}$ es un proceso de Poisson no-homogéneo con función de intensidad $\lambda(t) + \mu(t)$**

🗎 **Dado que un evento del proceso $N^{\bullet}(t)$ ocurre en el instante t, independientemente de lo que haya ocurrido antes de t, un evento en t viene del proceso $N(t)$ con probabilidad $\dfrac{\lambda(t)}{\lambda(t) + \mu(t)}$**

🖫 **A una gasolinera que permanece abierta 24 horas al día llegan clientes de la siguiente forma: Los clientes que llegan desde las $24:00$ hasta las $7:00$ tienen una tasa de 2 clientes/hora, de $7:00$ a $17:00$ la tasa crece linealmente hasta alcanzar los 20 clientes/hora, permaneciendo esta tasa hasta las 22:00, momento en que comienza a decrecer hasta alcanzar los 2 clientes/hora a las $24:00$**
Suponiendo que el número de clientes que llegan a la gasolinera, durante períodos de tiempo disjuntos, son independientes. Se pide:
a) ¿Cuál sería un buen modelo probabilístico?.
b) ¿Cuál es la probabilidad de que llegue un cliente entre la $1:00$ y las $3:00$?
c) ¿Cuál es el numero esperado de llegadas entre las $8:00$ y las $10:00$?

Solución:

a) Un buen modelo probabilístico para la situación sería un Proceso de Poisson no homogéneo, con función de intensidad:

$$\lambda(t)=\begin{cases} 2 & 0\le t\le 7 \\ 1,8t-10,6 & 7\le t\le 17 \\ 20 & 17\le t\le 22 \\ -9t+218 & 22\le t\le 24 \end{cases}$$

$$7:00-17:00 \quad \lambda(t)=at+b\begin{cases} \lambda(7)=7a+b=2 \\ \lambda(17)=17a+b=20 \end{cases} \rightarrow \quad a=1,8 \quad b=-10,6$$

$$22:00-24:00 \quad \lambda(t)=at+b\begin{cases} \lambda(22)=22a+b=20 \\ \lambda(24)=24a+b=2 \end{cases} \rightarrow \quad a=-9 \quad b=218$$

b) El número de llegadas entre la $1:00$ y las $3:00$ sigue una distribución de Poisson con media $\lambda=m(3)-m(1)=\int_1^3 2\,ds=4$

En consecuencia, la probabilidad de que llegue un cliente entre la 1:00 y las 3:00 es:

$$P\left[N(3)-N(1)=1\right]=\frac{4^1}{1!}e^{-4}=0,073$$

c) El número de llegadas entre la $8:00$ y las $10:00$ sigue una distribución de Poisson con media $\lambda=m(10)-m(8)=\int_8^{10}(1,8s-10,6)\,ds=11,2$ llegadas

Por tanto, el número esperado de llegadas en este horario es 11,2


Facultad de Ciencias
Económicas y Empresariales
ACCESO NORTE