CADENAS DE MARKOV EN TIEMPO CONTINUO

CADENA DE MARKOV EN TIEMPO CONTINUO (CMTC)

Un proceso estocástico en tiempo continuo, $X(t)\,,\, t \geq 0$, con espacio de estados *S* es una cadena de Markov en tiempo continuo si

$$P\Big[X(t)=j \,\Big|\, X(s)=i, X(t_{n-1})=i_{n-1}, \cdots, X(t_1)=i_1\Big] = P\Big[X(t)=j \,\Big|\, X(s)=i\Big]$$

donde $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_{n-1}$ es cualquier secuencia no decreciente de $(n+1)$ tiempos e $(i_1, i_2, \cdots, i_{n-1}, i, j) \in S$ son $(n+1)$ estados cualesquiera del conjunto S

Las cadenas de Markov en tiempo continuo (CMTC) verifican que dado el proceso en un conjunto de tiempos anteriores al instante t, la distribución del proceso en el instante t depende sólo del instante de tiempo anterior más próximo a t.

- Una cadena de Markov en tiempo continuo es homogénea si para cada $s \leq t$ y cada estado $i, j \in S$, se tiene:

$$P\Big[X(t)=j \,\Big|\, X(s)=i\Big] = P\Big[X(t-s)=j \,\Big|\, X(0)=i\Big]$$

No todas las cadenas de Markov en tiempo continuo tienen que ser homogéneas, aunque consideraremos únicamente las CMTC homogéneas.

Por homogeneidad: Cuando el proceso entra en el estado i, la forma de evolucionar probabilísticamente desde este punto es la misma que si el proceso comenzase en el estado i en el instante 0.

- Al tiempo de permanencia del proceso en el estado i se denota como T_i, se distribuye exponencialmente. La distribución T_i tiene la propiedad de pérdida de memoria, lo que implica que es exponencial.

OTRA DEFINICIÓN DE CADENA DE MARKOV EN TIEMPO CONTINUO

Un proceso estocástico en tiempo continuo $X(t)\,,\, t \geq 0$ es una cadena de Markov en tiempo continuo sí:

- Cuando entra en un estado i, el tiempo que permanece en él se distribuye exponencialmente con media $\dfrac{1}{v_i}$

- Cuando abandona el estado i, entra en el estado j con probabilidad de transición p_{ij}, con $p_{ii} = 0$ y $\sum_j p_{ij} = 1$

La matriz P formada con las probabilidades p_{ij} es una matriz estocástica y, por tanto, la matriz de transición en un paso de la cadena de Markov encajada.

Una cadena de Markov en tiempo continuo se comporta como una cadena de Markov encajada, con intervalos de tiempo de permanencia en cada estado distribuidos exponencialmente e independientemente.

Ejemplos se tienen en el Proceso de Poisson de tasa 1, Proceso de Yule y Sistema de dos procesadores secuenciales.

En las cadenas de Markov en tiempo discreto (CMTD) se analizaron las probabilidades de transición en *n* pasos, $p_{ij}^{(n)}$. El homólogo en las cadenas de Markov en tiempo continuo (CMTC) es la **función de probabilidad de transición**:

$$p_{ij}(t) = P\left[X(t) = j \mid X(0) = i\right]$$

Es decir, la probabilidad de que estando inicialmente en el estado i, después de t unidades de tiempo se entre en el estado j.

- En las cadenas de Markov en tiempo continuo (CMTC) no se puede hablar de pasos. Para cada par de estados $(i, j) \in S$ la función de probabilidad de transición $p_{ij}(t)$ es una función continua de t.

En general, es díficil determinar la función de probabilidad de transición, si bien en casos sencillos se puede calcular. En los Procesos de Poisson para $i \leq j$ la función de probabilidad de transición es:

$$p_{ij}(t) = P\left[N(t) = j - i\right] = \frac{(\lambda\, t)^{j-i}}{(j-i)!}\, e^{-\lambda t}$$

ECUACIONES DE CHAPMAN-KOMOGOROV

Las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov proporcionan un método para calcular la función de probabilidad de transición. Sea la cadena de Markov en tiempo continuo $\{X(t)\,,\, t \geq 0\}$ con espacio de estados S, se tiene:

$$p_{ij}(t+s) = \sum_{k \in S} p_{ik}(t)\; p_{kj}(s) \qquad \forall\, s, t > 0$$

TASAS INSTANTÁNEAS DE TRANSICIÓN

Los valores fundamentales que especificaban las cadenas de Markov encajadas (CMTD) eran las probabilidades de transición p_{ij}. En tiempo continuo son las tasas instantáneas de transición

$$q_{ij} = v_i \, p_{ij}$$

que representa la tasa a la que hacen restricciones de *i* a *j*, determinando la cadena, puesto que:

$$v_i = \sum_j v_i \, p_{ij} = \sum_j q_{ij} \qquad p_{ij} = \frac{q_{ij}}{\sum_j q_{ij}}$$

Con el objetivo de proporcionar un sistema de ecuaciones diferenciales para calcular $p_{ij}(t)$

$$p'_{ij} = \lim_{h \to 0} \frac{p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}(t)\, p_{kj}(h) - p_{ij}(t)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sum_{k \neq j}^{\infty} p_{ik}(t)\, p_{kj}(h) - p_{ij}(t)\left[1 - p_{jj}(h)\right]}{h} = \sum_{k \neq j}^{\infty} p_{ik}(t) \lim_{h \to 0} \frac{p_{kj}(h)}{h} - p_{ij}(t) \lim_{h \to 0} \frac{1 - p_{jj}(h)}{h}$$

Operando se obtiene:

$$p'_{ij}(t) = \sum_{k \neq j}^{\infty} p_{ik}(t) \lim_{h \to 0} \frac{p_{kj}(h)}{h} - p_{ij}(t) \lim_{h \to 0} \frac{1 - p_{jj}(h)}{h} = \sum_{k \neq j}^{\infty} p_{ik}(t)\; q_{kj} - p_{ij}(t)\; v_j$$

- Ecuaciones diferenciales hacia atrás de Komogorov, bajo condiciones adecuadas, $\forall\, i, j, t \geq 0$

$$p'_{ij}(t) = \sum_{k \neq j}^{\infty} p_{ik}(t)\; q_{kj} - p_{ij}(t)\; v_j$$

✓ En el Proceso de Poisson de tasa λ las ecuaciones diferenciales atrás de Kolmogorv, como $q_{i,i+1} = v_i \, p_{i,i+1} = v_i = \lambda$ y $q_{ij} = v_i \, p_{ij} = 0 \quad \forall\, j \neq i+1$, son:

$$p'_{ij}(t) = p_{i\,j-1}(t)\,\lambda - p_{ij}(t)\,\lambda$$

✓ En el Proceso de Yule, como $q_{i,i+1} = v_i \, p_{i,i+1} = i\lambda$ y $q_{ij} = v_i \, p_{ij} = 0 \quad \forall\, j \neq i+1$, las ecuaciones diferenciales hacia atrás de Kolmogorov son:

$$p'_{ij}(t) = p_{i\,j-1}(t)\,(j-1)\lambda - p_{ij}(t)\, j\lambda$$

Las ecuaciones diferenciles hacia atrás de Kolmogorov tienen la forma matricial:

$$P_0(t) = G\,P(t)$$

donde $P(t)$ y $P_0(t)$ son las matrices formadas por los elementos $p_{ij}(t)$ y $p'_{ij}(t)$, respectivamente, y G (generador o generador infenitesimal) en la que los elementos (i,i) tienen valor $(-v_i)$ y los elementos (i,j) con $i \neq j$ el valor q_{ij}.

Si al obtener las ecuaciones diferenciales, se hubiera condicionado a $X(t)$ en lugar de a $X(s)$, se habría obtenido otro conjunto de ecuaciones diferenciales llamadas ecuaciones diferenciales hacia adelante de Kolmogorov, que escritas en forma matricial son:

$$P_0(t) = P(t)\,G$$

Para ambas ecuaciones, se tiene la condición límite $P(0) = I$, donde I es la matriz identidad.

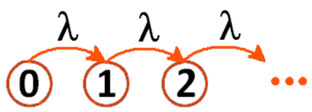
Las ecuaciones diferenciales hacia atrás y hacia adelante, con la condición límite mencionada, tienen la misma solución:

$$P(t) = e^{tG} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tG)^n}{n!} = 1 + tG + \frac{(tG)^2}{2!} + \frac{(tG)^3}{3!} + \cdots$$

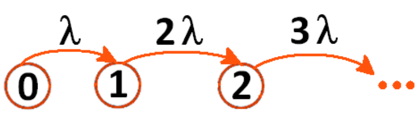
DIAGRAMA DE TRANSICIÓN

Las cadenas de Markov a tiempo continuo se pueden representar mediante un diagrama de transición, grafo en el que los nodos representan estados, y un arco entre i y j describe la probabilidad de transición de i a j y q_{ij} representa el arco correspondiente.

Proceso de Poisson de tasa λ



Proceso de Yule



COMPORTAMIENTO ESTACIONARIO

Sea $\{X(t)\,,\, t \geq 0\}$ una cadena de Markov en tiempo continuo, con matriz de funciones de probabilidad de transición $P(t)$. Un vector π, con $\pi_i \geq 0\ \forall i$ y $\sum_i \pi_i = 1$, se dice que es una distribución estacionaria si $\pi = \pi\, P(t)\,,\ \forall t \geq 0$

El generador G se utiliza para determinar la distribución estacionaria:

$$\pi \text{ es estacionaria} \Leftrightarrow \pi = \pi\, P(t)\,, \forall t \geq 0 \Leftrightarrow \pi = \pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\,G)^n}{n!}\,, \forall t \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\, \pi\, G^n\,, \forall t \geq 0 \Leftrightarrow 0 = \pi\, G^n\,, \forall n \geq 1$$

$$\Leftrightarrow 0 = \pi\, G$$

La condición $\pi = \pi\, P(t)\,,\ \forall t \geq 0$ que es díficil de resolver se reduce a otra mucha más simple $\pi\, G = 0$.

En consecuencia, si existe la distribución estacionaria π se obtiene resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} \pi\, G = 0 \\ \sum_i \pi_i = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -v_j\, \pi_j + \sum_{i \neq j} q_{ij} \pi_i = 0 \\ \sum_i \pi_i = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_j\, \pi_j = \sum_{i \neq j} q_{ij} \pi_i \\ \sum_i \pi_i = 1 \end{cases}$$

donde,

$\pi_j \equiv$ Proporción de tiempo a largo plazo que el proceso está en el estado j, mientras que v_j es la tasa de abandono del estado j cuando el proceso está en él.

$v_j\, \pi_j \equiv$ Tasa a largo plazo de dejar el estado j

$q_{ij} \equiv$ Tasa de ir al estado j cuando el proceso está en el estado i.
$q_{ij}\, \pi_i \equiv$ Tasa a largo plazo de de ir del estado i al estado j
$\sum_{i \neq j} q_{ij} \pi_i \equiv$ Tasa a largo plazo de ir al estado j

En consecuencia, la tasa a largo plazo de salida del estado j coincide con la tasa de entrada en el estado j, y por esta razón las ecuaciones $\pi\, G = 0$ se denominan ecuaciones de equilibrio global o simplemente ecuaciones de equilibrio.

- **En una cadena de Markov en tiempo continuo, si existe una distribución estacionaria π es única, verificando:**

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = \pi_j \quad \forall i$$

- **Las ecuaciones de equilibrio para un proceso de Poisson de tasa λ son:**

$$\begin{cases} \lambda\,\pi_j = \lambda\,\pi_{j-1} \quad \forall j \\ \sum_i \pi_i = 1 \end{cases} \qquad \text{que no tienen solución}$$

- **Las ecuaciones de equilibrio para un proceso de Yule de tasa λ son:**

$$\begin{cases} j\lambda\,\pi_j = (j-1)\lambda\,\pi_{j-1} \quad \forall j \\ \sum_i \pi_i = 1 \end{cases} \qquad \text{que no tienen solución}$$

PROCESOS DE NACIMIENTO Y MUERTE

Describen sistemas que en cada instante representan al mismo número de individuos en el estado. Los procesos de nacimiento y muerte se enmarcan dentro de la teoría de colas.

En el estado *n* se producen llegadas con tasa exponencial λ_n y salidas con tasa exponencial μ_n de forma independiente.

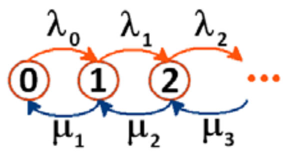
Un proceso de nacimiento y muerte con tasas de llegada (nacimiento) $\equiv \{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ y tasas de saldida (muerte) $\equiv \{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una cadena de Markov en tiempo continuo con espacio de estados $\{0,1,\dots\}$, tasas de permanencia $\begin{cases} v_0 = \lambda_0 \\ v_i = \lambda_i + \mu_i \end{cases}$ $i > 0$ y probabilidades de transición:

$$\begin{cases} p_{01} = 1 & p_{0i} = 0 \ \text{ para } \ i \neq 1 \\ p_{i,i+1} = \dfrac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} & p_{i,i-1} = \dfrac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} \\ p_{ij} = 0 \quad j \neq i+1, i-1 \ \text{ para } i \neq 0 & \end{cases}$$

- **El proceso de Poisson es un proceso de nacimiento y muerte con $\lambda_n = \lambda$ y $\mu_n = 0$ para $\forall n$**

- **El proceso de Yule es un proceso de nacimiento y muerte con $\lambda_n = n\lambda$ y $\mu_n = 0$ para $\forall n$**

- El diagrama de transición de un proceso de nacimiento y muerte es:



Tasas de transición son $\begin{cases} q_{01} = \lambda_0 \\ q_{i,i+1} = \lambda_i \\ q_{i,i-1} = \mu_i \\ 0 \ \text{el resto} \end{cases}$

Con lo que el sistema de ecuaciones diferenciales de Kolgomorov es:

$$\begin{cases} p'_{i0}(t) = p_{i1}(t)\mu_1 - p_{i0}(t)\lambda_0 \\ p'_{ij}(t) = p_{i\,j+1}(t)\mu_{j+1} + p_{ij-1}(t)\lambda_{j-1} - p_{ij}(t)(\lambda_j + \mu_j) \end{cases}$$

que conducen al sistema en equilibrio:

$$\begin{cases} \lambda_0\pi_0 = \mu_1\pi_1 \\ (\lambda_j + \mu_j)\pi_j = \mu_{j+1}\pi_{j+1} + \lambda_{j-1}\pi_{j-1} \qquad j = 1, 2, \ldots \\ \sum_j \pi_j = 1 \end{cases}$$

o bien al sistema de sistema en equilibrio de tasas de salida y de entrada en cada estado:

$$\begin{cases} \lambda_0\pi_0 = \mu_1\pi_1 \\ (\lambda_1 + \mu_1)\pi_1 = \mu_2\pi_2 + \lambda_0\pi_0 \\ (\lambda_2 + \mu_2)\pi_2 = \mu_3\pi_3 + \lambda_1\pi_1 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ (\lambda_n + \mu_n)\pi_n = \mu_{n+1}\pi_{n+1} + \lambda_{n-1}\pi_{n-1} \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \sum_{n=1}^{\infty} \pi_n = 1 \end{cases}$$

Sistema que queda simplificado al sumar las dos primeras ecuaciones, las tres primeras ecuaciones, así sucesivamente, resulta:

$$\begin{cases}
\lambda_0\pi_0 = \mu_1\pi_1 \quad \to \quad \pi_1 = \dfrac{\lambda_0}{\mu_1}\pi_0 \\
\lambda_1\pi_1 = \mu_2\pi_2 \quad \to \quad \pi_2 = \dfrac{\lambda_1}{\mu_2}\pi_1 = \dfrac{\lambda_1\lambda_0}{\mu_2\mu_1}\pi_0 \\
\lambda_2\pi_2 = \mu_3\pi_3 \quad \to \quad \pi_3 = \dfrac{\lambda_2}{\mu_3}\pi_2 = \dfrac{\lambda_2\lambda_1\lambda_0}{\mu_3\mu_2\mu_1}\pi_0 \\
\cdots \; \cdots \; \cdots \; \cdots \; \cdots \; \cdots \; \cdots \; \cdots \; \cdots \; \cdots \\
\lambda_n\pi_n = \mu_{n+1}\pi_{n+1} \quad \to \quad \pi_n = \dfrac{\lambda_{n-1}}{\mu_n}\pi_{n-1} = \dfrac{\lambda_{n-1}\cdots\lambda_2\lambda_1\lambda_0}{\mu_n\cdots\mu_3\mu_2\mu_1}\pi_0 \\
\cdots \; \cdots \; \cdots \; \cdots \; \cdots \; \cdots \; \cdots \; \cdots \; \cdots \; \cdots \\
\sum_{n=1}^{\infty}\pi_n
\end{cases}$$

con lo cual,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\pi_n = \sum_n \frac{\lambda_{n-1}\cdots\lambda_2\lambda_1\lambda_0}{\mu_n\cdots\mu_3\mu_2\mu_1}\pi_0 = 1 \quad \to \quad \pi_0 = \frac{1}{1+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{n-1}\cdots\lambda_1\lambda_0}{\mu_n\cdots\mu_2\mu_1}}$$

por tanto, $\pi_n = \dfrac{\lambda_{n-1}\cdots\lambda_1\lambda_0}{\mu_n\cdots\mu_1\left(1+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{n-1}\cdots\lambda_1\lambda_0}{\mu_n\cdots\mu_2\mu_1}\right)}$

Una condición necesaria, y se comprueba que también es suficiente, para que exista la distribución estacionaria, es qie se verifique:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{n-1}\cdots\lambda_1\lambda_0}{\mu_n\cdots\mu_2\mu_1} < \infty$$

Denotando por T_i el tiempo que tarda el sistema en pasar del estado i al estado $(i+1)$, se verifica:

$$E(T_i) = \frac{1}{\lambda_i} + \frac{\mu_i}{\lambda_i}E(T_{i-1})$$


ACCESO NORTE