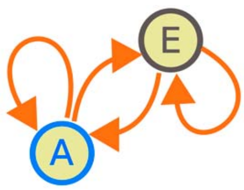
Universidad Autónoma de Madrid

Instrumentos Estadísticos Avanzados
Facultad Ciencias Económicas y Empresariales
Departamento de Economía Aplicada
Profesor: Santiago de la Fuente Fernández

CADENAS DE MARKOV TIEMPO CONTINUO



CADENAS DE MARKOV FINITAS

- Cadenas de Markov en tiempo discreto (CMTD)
- Cadenas de Markov en tiempo continuo (CMTC)
- Procesos de Poisson

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

CADENAS DE MARKOV FINITAS

- Cadenas de Markov en tiempo discreto (CMTD)
- Cadenas de Markov en tiempo continuo (CMTC)
- Procesos de Poisson

Universidad Autónoma de Madrid

Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....

CADENA DE MARKOV EN TIEMPO CONTINUO (CMTC)

Un proceso estocástico en tiempo continuo, $X(t)\,,\ t\geq 0$, con espacio de estados S es una cadena de Markov en tiempo continuo si

$$P\Big[X(t)=j\,\Big|\,X(s)=i,\,X(t_{n-1})=i_{n-1},\ \cdots\ ,X(t_1)=i_1\Big]=P\Big[X(t)=j\,\Big|\,X(s)=i\Big]$$

donde $0\leq t_1\leq t_2\leq\ \cdots\ \leq t_{n-1}$ es cualquier secuencia no decreciente de $(n+1)$ tiempos e $(i_1,i_2,\ \cdots\ ,i_{n-1},i,j)\in S$ son $(n+1)$ estados cualesquiera del conjunto S

Las cadenas de Markov en tiempo continuo (CMTC) verifican que dado el proceso en un conjunto de tiempos anteriores al instante t, la distribución del proceso en el instante t depende sólo del instante de tiempo anterior más próximo a t.

CADENA MARKOV HOMOGÉNEDA: Una cadena de Markov en tiempo continuo es homogénea si para cada $s\leq t$ y cada estado $i,j\in S$, se tiene:

$$P\Big[X(t)=j\,\Big|\,X(s)=i\Big]=P\Big[X(t-s)=j\,\Big|\,X(0)=i\Big]$$

No todas las cadenas de Markov en tiempo continuo tienen que ser homogéneas, aunque se consideraran únicamente las homogéneas.

Por HOMOGENEIDAD: Cuando el proceso entra en el estado i, la forma de evolucionar en probabilidad desde este punto es la misma que si el proceso comenzase en el estado i en el instante 0.

Al tiempo de permanencia del proceso en el estado i se denota como T_i, se distribuye exponencialmente. La distribución T_i tiene la propiedad de pérdida de memoria, lo que implica que es exponencial.

CADENA DE MARKOV ENCAJADA EN TIEMPO CONTINUO

Un proceso estocástico en tiempo continuo $X(t)\,,\ t\geq 0$ es una cadena de Markov en tiempo continuo sí:

- Cuando entra en un estado i, el tiempo que permanece en él se distribuye exponencialmente con media $\dfrac{1}{v_i}$
- Cuando abandona el estado i, entra en el estado j con probabilidad de transición p_{ij}, con $p_{ii}=0$ y $\sum_j p_{ij}=1$

La matriz P formada con las probabilidades p_{ij} es una matriz estocástica y, por tanto, la matriz de transición en un paso de la cadena de Markov encajada.

Una cadena de Markov en tiempo continuo se comporta como una cadena de Markov encajada, con intervalos de tiempo de permanencia en cada estado distribuidos exponencialmente e independientemente.

Ejemplos se tienen en el Proceso de Poisson de tasa 1, Proceso de Yule y Sistema de dos procesadores secuenciales.

FUNCIÓN DE PROBABILIDAD CADENA DE MARKOV EN TIEMPO CONTINUO

En las cadenas de Markov en tiempo discreto (CMTD) se analizaron las probabilidades de transición en n pasos, $p_{ij}^{(n)}$. El homólogo en las cadenas de Markov en tiempo continuo (CMTC) es la función de probabilidad de transición:

$$p_{ij}(t) = P\big[X(t) = j \,\big|\, X(0) = i\big]$$

Es decir, la probabilidad de que estando inicialmente en el estado i, después de t unidades de tiempo se entre en el estado j.

En las cadenas de Markov en tiempo continuo (CMTC) no se puede hablar de pasos. Para cada par de estados $(i, j) \in S$ la función de probabilidad de transición $p_{ij}(t)$ es una función continua de t.

En general, es difícil determinar la función de probabilidad de transición, si bien en casos sencillos se puede calcular. En los Procesos de Poisson para $i \leq j$ la función de probabilidad de transición es:

$$p_{ij}(t) = P\big[N(t) = j - i\big] = \frac{(\lambda\,.t)^{j-i}}{(j-i)\,!}\;.\,e^{-\lambda t}$$

ECUACIONES DE CHAPMAN-KOLMOGÓROV

Las ecuaciones de Chapman-Kolmogórov proporcionan un método para calcular la función de probabilidad de transición.
Sea la cadena de Markov en tiempo continuo $\{X(t)\,,\, t \geq 0\}$ con espacio de estados S, se tiene:

$$p_{ij}(t+s) = \sum_{k \in S} p_{ik}(t)\; p_{kj}(s) \qquad \forall s, t > 0$$

TASAS INSTANTÁNEAS DE TRANSICIÓN

Los valores fundamentales que especificaban las cadenas de Markov encajadas (CMTD) eran las probabilidades de transición p_{ij}. En tiempo continuo son las tasas instantáneas de transición $q_{ij} = v_i\,.p_{ij}$

La fórmula $q_{ij} = v_i\,.p_{ij}$ representa la tasa a la que hacen restricciones de i a j, determinando la cadena,

puesto que $v_i = \sum_j v_i\, p_{ij} = \sum_j q_{ij}$; $p_{ij} = \dfrac{q_{ij}}{\sum_j q_{ij}}$

Con el objetivo de proporcionar un sistema de ecuaciones diferenciales para calcular $p_{ij}(t)$

$$p'_{ij} = \lim_{h\to 0} \frac{p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}(t)\,.\,p_{kj}(h) - p_{ij}(t)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{k\neq j}^{\infty} p_{ik}(t)\,.\,p_{kj}(h) - p_{ij}(t)\left[1-p_{jj}(h)\right]}{h} = \sum_{k\neq j}^{\infty} p_{ik}(t)\,.\,\lim_{h\to 0}\frac{p_{kj}(h)}{h} - p_{ij}(t)\,.\,\lim_{h\to 0}\frac{1-p_{jj}(h)}{h}$$

Operando: $p'_{ij}(t) = \sum_{k\neq j}^{\infty} p_{ik}(t)\,.\,\lim_{h\to 0}\frac{p_{kj}(h)}{h} - p_{ij}(t)\,.\,\lim_{h\to 0}\frac{1-p_{jj}(h)}{h} = \sum_{k\neq j}^{\infty} p_{ik}(t)\,.\,q_{kj} - p_{ij}(t)\,.\,v_j$

- Ecuaciones diferenciales hacia atrás de Kolmogórov, bajo condiciones adecuadas, $\forall\, i, j, t \geq 0$

$$p'_{ij}(t) = \sum_{k\neq j}^{\infty} p_{ik}(t)\,.\,q_{kj} - p_{ij}(t)\,.\,v_j$$

- En el Proceso de Poisson de tasa λ las ecuaciones diferenciales atrás de Kolmogórov, como $q_{i,i+1} = v_i\,.\,p_{i,i+1} = v_i = \lambda$ y $q_{ij} = v_i\,.\,p_{ij} = 0 \quad \forall\, j \neq i+1$, son:

$$p'_{ij}(t) = p_{ij-1}(t)\,.\,\lambda - p_{ij}(t)\,.\,\lambda$$

- En el Proceso de Yule, como $q_{i,i+1} = v_i\,.\,p_{i,i+1} = i\,.\,\lambda$ y $q_{ij} = v_i\,.\,p_{ij} = 0 \quad \forall\, j \neq i+1$, las ecuaciones diferenciales hacia atrás de Kolmogórov son:

$$p'_{ij}(t) = p_{ij-1}(t)\,.\,(j-1)\,.\,\lambda - p_{ij}(t)\,.\,j\,.\,\lambda$$

Las ecuaciones diferenciales hacia atrás de Kolmogórov tienen la forma matricial: $P_0(t) = G\,.\,P(t)$

donde $P(t)$ y $P_0(t)$ son las matrices formadas por los elementos $p_{ij}(t)$ y $p'_{ij}(t)$, respectivamente, y G (generador o generador infinitesimal) en la que los elementos (i, i) tienen valor $(-v_i)$ y los elementos (i, j) con $i \neq j$ el valor q_{ij}.

Si al obtener las ecuaciones diferenciales, se hubiera condicionado a $X(t)$ en lugar de a $X(s)$, se habría obtenido otro conjunto de ecuaciones diferenciales llamadas ecuaciones diferenciales hacia adelante de Kolmogórov, que escritas en forma matricial son: $P_0(t) = P(t)\,.\,G$

Para ambas ecuaciones, se tiene la condición límite $P(0) = I$, donde I es la matriz identidad.

Las ecuaciones diferenciales hacia atrás y hacia adelante, con la condición límite mencionada, tienen la misma solución:

$$P(t) = e^{t.G} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t.G)^n}{n!} = 1 + t.G + \frac{(t.G)^2}{2!} + \frac{(t.G)^3}{3!} + \cdots$$

Asignatura .... Grupo ....

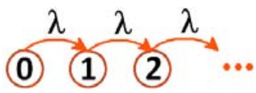
Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....

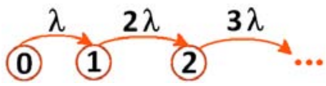
DIAGRAMA DE TRANSICIÓN

Las cadenas de Markov a tiempo continuo se pueden representar mediante un diagrama de transición, grafo en el que los nodos representan estados, y un arco entre i y j describe la probabilidad de transición de i a j y q_{ij} representa el arco correspondiente.

Proceso de Poisson de tasa λ



Proceso de Yule



COMPORTAMIENTO ESTACIONARIO

Sea $\{X(t)\,,\, t \geq 0\}$ una cadena de Markov en tiempo continuo, con matriz de funciones de probabilidad de transición $P(t)$. Un vector π, con $\pi_i \geq 0 \ \forall i$ y $\sum_i \pi_i = 1$, se dice que es una distribución estacionaria si

$\pi = \pi . P(t)\,,\ \forall t \geq 0$

El generador G se utiliza para determinar la distribución estacionaria:

$$\pi \text{ es estacionaria} \Leftrightarrow \pi = \pi\,.\,P(t)\,,\forall t \geq 0 \Leftrightarrow \pi = \pi\,.\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t.G)^n}{n!}\,,\forall t \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\,\pi\,.G^n,\forall t \geq 0 \Leftrightarrow 0 = \pi\,.G^n,\forall n \geq 1$$

$$\Leftrightarrow 0 = \pi\,.G$$

La condición $\pi = \pi.P(t)\,,\ \forall t \geq 0$ que es difícil de resolver se reduce a otra mucha más simple $\pi.G = 0$.

En consecuencia, si existe la distribución estacionaria π se obtiene resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} \pi.G = 0 \\ \sum_i \pi_i = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -v_j.\pi_j + \sum_{i \neq j} q_{ij}.\pi_i = 0 \\ \sum_i \pi_i = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_j.\pi_j = \sum_{i \neq j} q_{ij}.\pi_i \\ \sum_i \pi_i = 1 \end{cases}$$

donde,

$\pi_j \equiv$ Proporción de tiempo a largo plazo que el proceso está en el estado j, mientras que v_j es la tasa de abandono del estado j cuando el proceso está en él.

$v_j.\pi_j \equiv$ Tasa a largo plazo de dejar el estado j

$q_{ij} \equiv$ Tasa de ir al estado j cuando el proceso está en el estado i.

$q_{ij} \,.\, \pi_i \equiv$ Tasa a largo plazo de ir del estado i al estado j

$\sum_{i \neq j} q_{ij} \,.\, \pi_i \equiv$ Tasa a largo plazo de ir al estado j

En consecuencia, la tasa a largo plazo de salida del estado j coincide con la tasa de entrada en el estado j, y por esta razón las ecuaciones $\pi . G = 0$ se denominan ecuaciones de equilibrio global o simplemente ecuaciones de equilibrio.

- En una cadena de Markov en tiempo continuo, si existe una distribución estacionaria π es única, verificando: $\lim_{t \to \infty} p_{ij}(t) = \pi_j \quad \forall i$

- Las ecuaciones de equilibrio para un proceso de Poisson de tasa λ son:

$$\begin{cases} \lambda \,.\, \pi_j = \lambda \,.\, \pi_{j-1} & \forall j \\ \sum_i \pi_i = 1 \end{cases}$$

que no tienen solución

- Las ecuaciones de equilibrio para un proceso de Yule de tasa λ son:

$$\begin{cases} j . \lambda . \pi_j = (j-1) . \lambda . \pi_{j-1} & \forall j \\ \sum_i \pi_i = 1 \end{cases}$$

que no tienen solución

PROCESOS DE NACIMIENTO Y MUERTE

Describen sistemas que en cada instante representan al mismo número de individuos en el estado. Los procesos de nacimiento y muerte se enmarcan dentro de la Teoría de Colas.

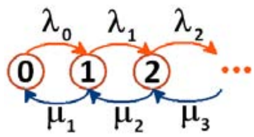
En el estado n se producen llegadas con tasa exponencial λ_n y salidas con tasa exponencial μ_n de forma independiente.

Un proceso de nacimiento y muerte con tasas de llegada (nacimiento) $\equiv \{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ y tasas de salida (muerte) $\equiv \{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una cadena de Markov en tiempo continuo con espacio de estados $\{0, 1, \dots\}$, tasas de permanencia $\begin{cases} v_0 = \lambda_0 \\ v_i = \lambda_i + \mu_i \end{cases}$ $i > 0$ y probabilidades de transición:

$$\begin{cases} p_{01} = 1 & p_{0i} = 0 \ \text{ para } \ i \neq 1 \\ p_{i,i+1} = \dfrac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} & p_{i,i-1} = \dfrac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} \\ p_{ij} = 0 \quad j \neq (i+1), (i-1) \ \text{ para } i \neq 0 & \end{cases}$$

- El proceso de Poisson es un proceso de nacimiento y muerte con $\lambda_n = \lambda$ y $\mu_n = 0$ para $\forall n$
- El proceso de Yule es un proceso de nacimiento y muerte con $\lambda_n = n.\lambda$ y $\mu_n = 0$ para $\forall n$

ECUACIONES DE EQUILIBRIO EN PROCESOS DE NACIMIENTOS Y MUERTE

Diagrama de transición de un proceso de nacimiento y muerte: 

Tasas de transición $\begin{cases} q_{01} = \lambda_0 \\ q_{i,i+1} = \lambda_i \\ q_{i,i-1} = \mu_i \\ 0 \ \text{ el resto} \end{cases}$

Con lo que el sistema de ecuaciones diferenciales de Kolgomórov es:

$$\begin{cases} p'_{i0}(t) = p_{i1}(t).\,\mu_1 - p_{i0}(t).\,\lambda_0 \\ p'_{ij}(t) = p_{i\,j+1}(t).\,\mu_{j+1} + p_{i\,j-1}(t).\,\lambda_{j-1} - p_{ij}(t).\,(\lambda_j + \mu_j) \end{cases}$$

que conducen al sistema en equilibrio $\begin{cases} \lambda_0 . \pi_0 = \mu_1 . \pi_1 \\ (\lambda_j + \mu_j) . \pi_j = \mu_{j+1} . \pi_{j+1} + \lambda_{j-1} . \pi_{j-1} \qquad j = 1, 2, \ldots \\ \sum_j \pi_j = 1 \end{cases}$

o bien al sistema de sistema en equilibrio de tasas de salida y de entrada en cada estado:

$$\begin{cases} \lambda_0 . \pi_0 = \mu_1 . \pi_1 \\ (\lambda_1 + \mu_1) . \pi_1 = \mu_2 . \pi_2 + \lambda_0 . \pi_0 \\ (\lambda_2 + \mu_2) . \pi_2 = \mu_3 . \pi_3 + \lambda_1 . \pi_1 \\ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \\ (\lambda_n + \mu_n) . \pi_n = \mu_{n+1} . \pi_{n+1} + \lambda_{n-1} . \pi_{n-1} \\ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \\ \sum_{n=1}^{\infty} \pi_n = 1 \end{cases}$$

Sistema que queda simplificado al sumar las dos primeras ecuaciones, las tres primeras ecuaciones, así sucesivamente.
Resulta:

$$\begin{cases} \lambda_0 . \pi_0 = \mu_1 . \pi_1 \quad \rightarrow \quad \pi_1 = \dfrac{\lambda_0}{\mu_1} . \pi_0 \\ \lambda_1 . \pi_1 = \mu_2 . \pi_2 \quad \rightarrow \quad \pi_2 = \dfrac{\lambda_1}{\mu_2} . \pi_1 = \dfrac{\lambda_1 . \lambda_0}{\mu_2 . \mu_1} . \pi_0 \\ \lambda_2 . \pi_2 = \mu_3 . \pi_3 \quad \rightarrow \quad \pi_3 = \dfrac{\lambda_2}{\mu_3} . \pi_2 = \dfrac{\lambda_2 . \lambda_1 . \lambda_0}{\mu_3 . \mu_2 . \mu_1} . \pi_0 \\ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \\ \lambda_n . \pi_n = \mu_{n+1} . \pi_{n+1} \quad \rightarrow \quad \pi_n = \dfrac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} . \pi_{n-1} = \dfrac{\lambda_{n-1} \cdots \lambda_2 . \lambda_1 . \lambda_0}{\mu_n \cdots \mu_3 . \mu_2 . \mu_1} . \pi_0 = \prod_{j=1}^{n} \left(\dfrac{\lambda_{j-1}}{\mu_j} \right) . \pi_0 \\ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \\ \sum_{n=1}^{\infty} \pi_n = 1 \end{cases}$$

con lo cual,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \pi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j} \right) \right] . \pi_0 = 1 \quad \rightarrow \quad \pi_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j} \right) \right]} \quad \rightarrow \quad \pi_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \pi_n}$$

DISTRIBUCIÓN ESTACIONARIA

Una condición necesaria, y se comprueba que también es suficiente, para que exista la distribución estacionaria, es que se verifique:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n-1} \cdots \lambda_2 . \lambda_1 . \lambda_0}{\mu_n \cdots \mu_3 . \mu_2 . \mu_1} < \infty$$

Denotando por T_i el tiempo que tarda el sistema en pasar del estado i al estado $(i+1)$, se verifica:

$$E(T_i) = \frac{1}{\lambda_i} + \frac{\mu_i}{\lambda_i} . E(T_{i-1})$$

Se tiene un sistema en dos niveles, en el primer nivel de usuarios se conectan a un sistema de apuestas computacionales. El número de personas que se conectan sigue una distribución de Poisson de tasa λ un/h. Cada persona mientras está conectada realiza apuestas a un segundo nivel. Cada persona genera apuestas con distribución exponencial de tasa β apuestas/hora. Las personas conectadas permanecen un tiempo exponencial con tasa μ un/h. Las apuestas se demoran en ser atendidas un tiempo exponencial de tasa α un/h.
Calcular la distribución de probabilidades del número de entidades en el nivel más alto.

Solución:

El proceso $\{X(t) : \text{Número de usuarios conectados en t}, t \geq 0\}$ es un proceso de Nacimiento y Muerte.

Tasa de Nacimiento: $\lambda(j) = \lambda \quad j \geq 0$

Tasa de Muerte: $\mu(j) = j . \mu \quad j \geq 0$

Cálculo de probabilidades: $\pi_n = \pi_0 . \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j}\right) \quad n \geq 1$

$$\pi_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} . \pi_0 = \frac{\lambda(0)}{\mu(1)} . \pi_0 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) . \pi_0$$

$$\pi_2 = \frac{\lambda_1 . \lambda_0}{\mu_2 . \mu_1} . \pi_0 = \frac{\lambda(1) . \lambda(0)}{\mu(2) . \mu(1)} . \pi_0 = \frac{\lambda . \lambda}{2 . \mu . \mu} . \pi_0 = \frac{1}{2} . \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 . \pi_0$$

$$\pi_3 = \frac{\lambda_2 . \lambda_1 . \lambda_0}{\mu_3 . \mu_2 . \mu_1} . \pi_0 = \frac{\lambda(2) . \lambda(1) . \lambda(0)}{\mu(3) . \mu(2) . \mu(1)} . \pi_0 = \frac{\lambda . \lambda . \lambda}{3 . \mu . 2 . \mu . \mu} . \pi_0 = \frac{1}{2 . 3} . \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 . \pi_0$$

....

$$\pi_n = \frac{1}{n!} . \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n . \pi_0 \quad , \quad \forall n > 0$$

Obtención de π_0:

$$\pi_0 = \frac{1}{1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\cdot\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\cdot\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n} = \frac{1}{e^{\lambda/\mu}} = e^{-\lambda/\mu}$$

Finalmente, la distribución de probabilidades: $\pi_n = \frac{1}{n!}\cdot\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n . \, e^{-\lambda/\mu} \quad , \quad \forall n \geq 0$

En un club de verano las personas pasan el tiempo entrando y saliendo de la piscina para capear el calor. Los bañistas entran a la piscina según un proceso de Poisson con tasa promedio de 4 clientes por minuto y su permanencia en la piscina se ajusta a una distribución exponencial con un tiempo promedio de 10 minutos. Suponiendo que la piscina tiene una capacidad infinita para recibir a todas las personas que quieran entrar. Encontrar la probabilidad de que la piscina esté vacía.

Solución:

El proceso $\{X(t):$ Número de bañistas dentro de la piscina en el instante t, $t \geq 0\}$ es un proceso de Nacimiento y Muerte.

Tasa de Nacimiento: $\lambda(j) = 4 \quad j \geq 0$ personas/minuto

Tasa de Muerte: $\mu(j) = \frac{1}{10}. \, j \quad j \geq 0$

Cálculo de probabilidades: $\pi_n = \pi_0 . \prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j}\right) \quad n \geq 1$

$$\pi_1 = \frac{\lambda(0)}{\mu(1)}.\,\pi_0 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right).\,\pi_0 = \left(\frac{4}{0,1}\right).\,\pi_0 = (40)\,.\,\pi_0$$

$$\pi_2 = \frac{\lambda(1).\,\lambda(0)}{\mu(2).\,\mu(1)}.\,\pi_0 = \frac{\lambda.\,\lambda}{2.\,\mu.\,\mu}.\,\pi_0 = \frac{1}{2}.\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2.\,\pi_0 = \frac{1}{2!}.\,(40)^2.\,\pi_0$$

$$\pi_3 = \frac{\lambda(2).\,\lambda(1).\,\lambda(0)}{\mu(3).\,\mu(2).\,\mu(1)}.\,\pi_0 = \frac{\lambda.\,\lambda.\,\lambda}{3.\,\mu.\,2.\,\mu.\,\mu}.\,\pi_0 = \frac{1}{2.3}.\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3.\,\pi_0 = \frac{1}{3!}.\,(40)^3.\,\pi_0$$

....

$$\pi_n = \frac{1}{n!}.\,(40)^n.\,\pi_0 \quad , \quad \forall n \geq 1$$

La probabilidad de que la piscina se encuentre vacía, es decir, que haya 0 bañistas en la piscina:

$$\pi_0 = \frac{1}{1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}.\,(40)^n} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.\,(40)^n} = \frac{1}{e^{40}} = e^{-40}$$

Con lo cual, $\pi_n = \frac{1}{n!}.\,(40)^n.\,e^{-40}$ una distribución de Poisson de tasa media 40.

Hoja nº ....

UAM
Universidad Autónoma de Madrid

Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....

(IMPRESO EN PAPEL RECICLADO)

UNICAMENTE PARA USO ESCOLAR

Universidad Autónoma de Madrid

Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....

UNICAMENTE PARA USO ESCOLAR (IMPRESO EN PAPEL RECICLADO)

Instrumentos Estadísticos Avanzados
Facultad Ciencias Económicas y Empresariales
Departamento de Economía Aplicada
Profesor: Santiago de la Fuente Fernández