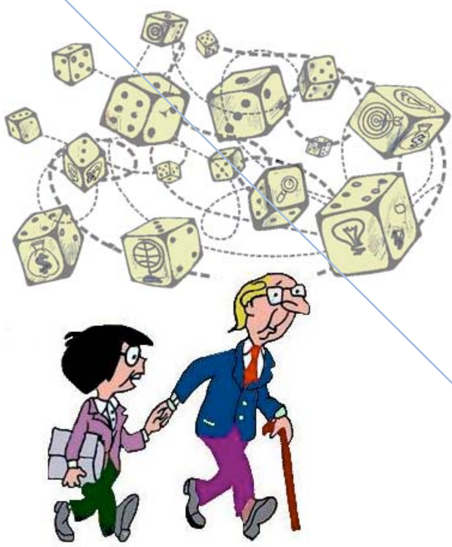
Universidad Autónoma de Madrid

Instrumentos Estadísticos Avanzados
Facultad Ciencias Económicas y Empresariales
Departamento de Economía Aplicada
Profesor: Santiago de la Fuente Fernández

TEORÍA DE JUEGOS - TEORÍA DE LAS SUBASTAS



Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....

TEORÍA DE JUEGOS - TEORÍA DE LAS SUBASTAS

1. Teoría de Juegos: Definiciones
2. Juegos cooperativos y Juegos no ooperativos
3. Juegos estáticos: Estrategias racionalizables. Equilibrio de Nash
4. Juegos dinámicos. Forma extensiva
5. Subjuegos: Equilibrio de Nash perfecto en subjuegos
6. Juegos dinámicos con información completa
7. Juegos dinámicos con información incompleta
8. Teoría de juegos en estrategias mixtas
9. Juegos no cooperativos repetidos: Finitos. Infinitos
10. Juegos repetidos: estrategias con premio y castigo
11. Juegos repetidos en infinitas etapas: Teorema de Friedman
12. Modelo de Cournot: Competencia en cantidades.
    Monopolio. Duopolio. Oligopolio.
13. Modelo de Stackelberg: Competencia en cantidades
14. Modelo de Bertrand: Competencia en precios
15. Contribución voluntaria a un bien público
16. Teoría de las Subastas. Subastas a sobre cerrado: Al primer precio. Al segundo precio.

Hoja nº ....

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

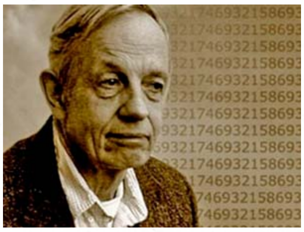
Ejercicio del día ....

UNICAMENTE PARA USO ESCOLAR (IMPRESO EN PAPEL RECICLADO)

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

TEORÍA DE JUEGOS



La Teoría de Juegos es una rama de las Matemáticas y la Economia que se encarga de analizar situaciones denominadas Juegos, en las que dos o más jugadores deben decidir qué decisión tomar en función de las decisiones que puedan tomar los otros.

Se suele considerar que la Teoría de Juegos nació cuando el matemático húngaro John von Neumann y el economista alemán Oskar Morgenstern publicarón en 1944 el libro Theory of Games and Economic Bahavior (Teoría de Juegos y Comportamiento Económico).

Una de las principales contribuciones de este libro es la aplicación de los conceptos de estrategia de juego en lugar de conceptos más aleatorios, la introducción de la noción de Juego Cooperativo, su forma de coalición, y los Conjuntos Estables Neumann-Morgenstern.

Estos autores fueron los primeros en aplicar ampliamente la Teoría de Juegos, por razones prácticas, especialmente para analizar el comportamiento económico. Muchos desarrollos futuros surgieron de esta obra, como la noción de núcleo y la utilidad transferible, y el posterior desarrollo de la teoría de la utilidad esperada.

A mediados del siglo XX surge otra figura fundamental para la Teoría de Juegos, el popular matemático John Forbes Nash (Premio Nobel de Economia en 1944) teorizó sobre los Juegos No Cooperativos.

A lo largo de la historia ha habido once ganadores del Premio Nobel de Economía relacionados con la Teoría de Juegos. En 2005 lo recibieron Thomas C. Schelling y Robert J. Aumann por ampliar la comprensión de conflicto y cooperación mediante análisis basados en la Teoría de Juegos. En 1212 lo obtuvieron Lloyd Stowell Shapley y Alvin Elliot Roth por sus aportaciones a la Teoría de asignaciones estables y la práctica del diseño del mercado (que se encuentran dentro de la Teoría de Juegos)". En 2014 lo consiguió el economista Jean Tirole, muy conocido por su trabajo sobre la "Economía del bien común". Sus estudios giran entorno a Teoría de Juegos, Economía y Psicología, Banca y Finanzas. De hecho, recibió el Nobel por su Análisis sobre el poder del mercado y la regulación.

PREMIOS NOBEL DE ECONOMIA: www.estadistica.net/Nobel/economic0.html

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

TEORÍA DE JUEGOS: DEFINICIONES

Un juego es una situación en donde los particpantes (jugadores) toman decisiones estratégicas, es dcir, tienen en cuanta las acciones y respuestas de los demás participantes.

Una estrategia es una regla o plan de acción para jugar. La estrategia óptima para un jugador es la que maximice su utilidad esperada.

Cada participantes (jugador) tiene un conjunto de estrategias posibles y tendrá una utilidad según la estrategia adoptada por él y los demás jugadores.

Se supone que los jugadores son racionales, es decir, piensan en las consecuencias de sus actos y actúan maximizando sus propios beneficios. Al mismo tiempo, los jugadores piensan en que los demás agentes del juego también son racionales.

Un juego básicamente está formado por los siguientes elementos:

Jugadores: Toman las decisiones tratando de maximizar su utilidad, deben de ser dos como mínimo.

Estrategias: Decisiones entre las que puede optar cada jugador, pueden ser finitas o infinitas.

Resultados: Distintas formas en las que puede finzalizar cada juego, dependiendo de las distintas acciones elegidas por los jugadores.
Cada reultado implica unas consecuencias para cada jugador.

Pagos: Ganancia o pérdida que obtiene el jugador al finalizar el juego.
Cada resultado lleva unos pagos asociados para cada uno de los jugadores.

Perfiles de estrategia: Conjunto de estrategias o vector correspondiente a cada uno de los jugadores.

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

(IMPRESO EN PAPEL RECICLADO) UNICAMENTE PARA USO ESCOLAR

JUEGOS COOPERATIVOS Y JUEGOS NO COOPERATIVOS

La Teoría de Juegos distingue dos modelos distintos en su planteamiento: Juegos Cooperativos y Juegos No Cooperativos.

En un Juego Cooperativo los jugadores disponen de mecanismos que permiten tomar acuerdos vinculantes antes del juego. Es decir, los jugadores pueden cooperar formando coaliciones de jugadores con el fin de obtener mayores beneficios.

Un Juego No Cooperativo o Competitivo no permite negociar e imponer un contranto vinculante. Cada jugador busca su máximo beneficio sin permitirse cualquier tipo de acuerdo previo entre jugadores.

El problema central se encuentra en el reparto de beneficios de los jugadores que forman la coalición. La teoría de Juegos Cooperativos analiza la importancia o influencia que ha tenido cada jugador en la obtención del beneficio, para proponer un reparto de beneficios adecuado.

La Teoría de Juegos No Cooperativos estudia las diferentes estrategias que pueden emplear cada uno de los jugadores. Dependiendo de las diferentes estrategias que se empleen, existe una función de pagos asociada a cada jugador.

Dentro de los Juegos No Cooperativos, hay que diferenciar entre:

- Juegos estáticos y dinámicos
- Juegos sin información completa y con información completa

Los Juegos Estáticos son aquellos en los que las decisiones de los jugadores se toman a la vez, es decir, los jugadores no saben lo que han dedicido los otros.

En los Juegos Dinámicos al menos uno de los jugadores debe saber qué decisión han tomado los otros jugadores antes de tomar la suya.

En los Juegos con información completa (como puede ser el ajedrez) los jugadores conocen completamente las consecuencias que tendrán para ellos y para el resto de jugadores cada conjunto de decisiones. No son el tipo de juego más habitual, pero son muy útiles como ejemplos didácticos (dilema del prisionero) para comprender mejor la Teoría de los Juegos.

♦ En los Juegos sin información completa, todos o alguno de los jugadores desconce alguna de las consecuencias. Es el tipo más común de juego, describen situaciones en las que algunos jugadores puede que no conozcan alguna información acerca de los otros jugadores, como pueden ser sus pagos o preferencias.
Esta incertidumbre acerca de los rivales afectará a la forma en que los jugadores analizan la situación y eligen sus estrategias.

Ejemplos de juegos sin información completa:

- Competencias entre empresas que desconocen los costes de sus rivales.
- Un vendedor conoce la verdader calidad del producto, pero el comprador no.
- Un trabajador nuevo en la empresa conoce su verdadera productividad y el empresario no.
- Una negociación entre un vendedor y un comprador en la que el primero no conoce la valoración del segundo.
- Una subasta en la que cada participante conoce su propia valoración del objeto, pero no la valoración de los demás.

Hay dos formas de describir un juego (jugadores, acciones, resultados y pagos): la forma normal y la forma extensiva.

En la forma normal o estratégica la descripción del juego se realiza de forma matricial, para el caso de dos jugadores, y se centra principalmente en las estrategias de los jugadores, interpretando que estos son capaces de tomar sus decisiones a la vez.

En la forma extensiva la descripción del juego se realiza en forma de árbol, dando más importancia a la secuencia del juego, esto es, a la forma en la que se desarrollan o se pueden desarrollar las acciones de cada jugador para llegar a los resultados.

ESTRATEGIAS DOMINANTES

Son mejores que otras estrategias, sin importar lo que otros jugadores hagan. Hay dos tipos de dominio estratégico:

- Estrategia estrictamente dominante: Cuando siempre proporciona a un jugador mayor utilidad, independientemente de la estrategia del otro jugador.

- Estrategia débilmente dominante: Cuando proporciona a un jugador al menos la misma utilidad para todas las estrategias del otro jugador, y estrictamente superior para alguna de sus estrategias.

- Un Equilibrio de estrategias dominantes se alcanza cuando cada jugador tiene su propia estrategia dominante. Luego se alcanza un equilibrio.

ESTRATEGIAS PURAS

Cada Jugador tiene a su disposición un conjunto de estrategias. Cuando un jugador elige una acción con probabilidad 1 está jugando una estrategia pura.

JUEGOS ESTÁTICOS

En un juego estratégico estático o juego simultáneo cada jugador ejecuta una acción sin conocer la alternativa elegida por los demás jugadores.

Elementos de un juego simultáneo:

a) Conjunto de jugadores: $N=\{1, 2, \ \dots, n\}$

b) Conjunto de acciones/estrategias posibles S_i para cada jugador

c) Función de utilidad (esperada) sobre cada uno de los perfiles de estrategias. $U_i : S \longrightarrow R$ para cada jugador i

Un juego en forma normal es una terna (N, S, U)

Se analizan dos tipos de solución: $\begin{cases} \text{Estrategias racionalizables} \\ \text{Equilibrio de Nash} \end{cases}$

ESTRATEGIAS RACIONALIZABLES

La estrategia de un jugador está estrictamente dominada si existe otra estrategia posible que proporciona al jugador un pago mayor independientemente de lo que hagan los demás jugadores. Un ejemplo de estrategia estrictamente dominada en el Dilema del Prisionero.

Un jugador racional nunca utilizará una estrategia estrictamente dominada, dado que esta conducta sería inconsistente con adoptar siempre aquellas acciones que maximizan su bienestar. El orden de eliminación de estrategias estrictamente dominadas no afecta al resultado.

Estrategias racionalizables:

- En el juego (N, S, U) se eliman todas las estrategias estrictamente dominadas. Se obtiene un nuevo juego (N, S^1, U)
- En este juego (N, S^1, U) se vuelven a eliminar las estrategias estrictamente dominadas para obtener el juego (N, S^2, U)
- Se procede iterativamente hasta que no se puedan eliminar más estrategias. Cuando se finaliza en S^k, este será el conjunto de estrategias racionalizables.

Nota: Para encontrar estrategias racionalizables no se deben eliminar estrategias débilmente dominadas.

ESRATEGIA ESTRICTAMENTE DOMINADA: EIE (Eliminación Iterativa Estricta)

El juego sólo tiene dos estrategias (una para cada jugador) que sobreviven a la eliminación iterada de estrategias estrictamente dominadas. Determinar cuáles son, razonando las hipótesis que hay que hacer al eliminar cada estrategia sobre la racionalidad de los jugadores.

	C_1	C_2	C_3	C_4
F_1	7, 0	10, 100	15, 104	2,3
F_2	0, 16	10, 0	0, 15	0, 4
F_3	20, 9	8, 0	11, 10	0, 5
F_4	14, 20	2, 300	10, 7	10, 6

Solución:

Se observa que la columna C_4 se encuentra estrictamente dominada por C_3, dado que
$104 > 3 \;,\; 15 > 4 \;,\; 10 > 5 \;,\; 7 > 6$

Si Columna es racional, nunca eligirá C_4

Si Fila sabe que Columna es racional, entenderá que los únicos resultados posibles son:

	C_1	C_2	C_3
F_1	7, 0	10, 100	15, 104
F_2	0, 16	10, 0	0, 15
F_3	20, 9	8, 0	11, 10
F_4	14, 20	2, 300	10, 7

En la nueva submatriz de pagos, la estrategia F_4 está dominada por F_3, pues
$20 > 14 \;,\; 8 > 2 \;,\; 11 > 10$

Si Fila es racional, nunca eligirá F_4

Si Columna se anticipa, lo que requiere saber que Fila sabe que Columna es racional, sabe que los únicos resultados posibles son:

	C_1	C_2	C_3
F_1	7, 0	10, 100	15, 104
F_2	0, 16	10, 0	0, 15
F_3	20, 9	8, 0	11, 10

En la nueva submatriz de pagos, la estrategia C_2 está dominada por C_3, pues
$104 > 100 \;,\; 15 > 0 \;,\; 10 > 0$

Si Columna es racional, nunca jugará C_2

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....

Si Fila se anticipa, lo que requiere saber que Columna sabe que Fila es racional, sabe que los únicos resultados posibles son:

	C_1	C_3
F_1	7, 0	15, 104
F_2	0, 16	0, 15
F_3	20, 9	11, 10

Suponiendo que la racionalidad es de conocimiento público, Fila no debería jugar F_2 puesto que está dominada tanto por F_1 como por F_3, adviértase que $7 > 0$, $15 > 0$ y $20 > 0$, $11 > 0$

Si Fila es racional, nunca jugará F_2

Si Columna se anticipa, lo que requiere saber que Fila sabe que Columna es racional, sabe que los únicos resultados posibles son:

	C_1	C_3
F_1	7, 0	15, 104
F_3	20, 9	11, 10

En la nueva submatriz de pagos, Columna no debe elegir C_1 porque se encuentra dominada por C_3, dado que: $104 > 0$, $10 > 9$

Los únicos resultados posibles son:

	C_3
F_1	15, 104
F_3	11, 10

Fila no debe elegir F_3 al encontrarse dominada por F_1, dado que $15 > 11$

El único resultados posible es:

	C_3
F_1	15, 104

Se concluye por eliminación, Fila eligirá F_1 y Columna eligirá C_3: $\text{EIE} = \left\{ (F_1, C_3) \right\}$

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

ESRATEGIA DEBILMENTE DOMINADA: EID (Eliminación Iterativa Debil)

Eliminando todas las estrategias dominadas se obtiene un nuevo juego reducido, una vez que se obtiene el nuevo juego se vuelve a repetir el proceso hasta llegar al modelo en el que no haya estrategias dominadas.

Las estrategias resultantes pueden ser distintas en función de sí se ha eliminado primero una estrategia dominada u otra.

		Empresa B		
		No Publicidad	Radio	Televisión
Empresa A	No Publicidad	13 , 3	11 , 8	8 , 13
	Radio	15 , 2	12 , 4	10 , 12
	Televisión	18 , 1	15 , 6	10 , 3

En la Empresa A la opción 'No Publicidad' está dominada por la opción 'Radio':
$15 > 13\ ,\ 12 > 11\ ,\ 10 > 8$

En la Empresa B la opción 'No Publicidad' está dominada por la opción 'Radio': $8 > 3\ ,\ 4 > 2\ ,\ 6 > 1$

En consecuencia, se elimina la opción 'No Publicidad' en las dos empresas.

		Empresa B	
		Radio	Televisión
Empresa A	Radio	12 , 4	10 , 12
	Televisión	15 , 6	10 , 3

En la Empresa A la opción 'Radio' está dominada por la opción 'Televisión': $15 > 12\ ,\ 10 \geq 10$, así que se elimina la opción 'Radio'

		Empresa B	
		Radio	Televisión
Empresa A	Televisión	15 , 6	10 , 3

E la Empresa B la opción 'Televisión' está dominada por la opción 'Radio': $6 > 3$, así que se elimina la opción 'Televisión'

Por tanto, queda una solución: $\text{EID} = \{(\text{Televisión, Radio})\}$

Se puede observar que existen diferentes soluciones dependiendo del método que se utilice para resolver el problema.

UAM UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

ESRATEGIA ESTRICTAMENTE DOMINADA: EIE (Eliminación Iterativa Estricta)

Es un método análogo al EID (Eliminación Iterativa Débil) con la diferencia de que para que se elimine una estrategia debe ser estrictamente dominada por otra.
En este caso, al contrario que en el EID, la estrategia resultante es siempre la misma, independientemente del orden en el que se eliminen las estrategias.

Empresa B

		No Publicidad	Radio	Televisión
Empresa A	No Publicidad	13 , 3	11 , 8	8 , 13
	Radio	15 , 2	12 , 4	10 , 12
	Televisión	18 , 1	15 , 6	10 , 3

En la Empresa A la opción 'No Publicidad' está dominada estrictamente por la opción 'Radio':
$15 > 13$, $12 > 11$, $10 > 8$

En la Empresa B la opción 'No Publicidad' está dominada estrictamente por la opción 'Radio':
$8 > 3$, $4 > 2$, $6 > 1$

En consecuencia, se elimina la opción 'No Publicidad' en las dos empresas.

Empresa B

		Radio	Televisión
Empresa A	Radio	12 , 4	10 , 12
	Televisión	15 , 6	10 , 3

En la Empresa A no hay más estrategias estrictamente dominadas: $15 > 12$, $10 \not> 10$

En la Empresa B no hay más estrategias estrictamente dominadas: $12 > 4$, $3 \not> 6$

En consecuencia, hay cuatro soluciones posibles:

'Radio - Radio' , 'Radio - Televisión' , 'Televisión - Radio' y 'Televisión - Televisión'

ESTRATEGIA DOMINANTE: Es una estrategia óptima sea cual sea la dedicisón de los jugadores.
Es un caso especial de Equilibrio de Nash, en donde un jugador asopta una estrategia conociendo la decisión adoptada por el otro competidor.
Cualquier Equilibrio de estrategia dominante es siempre un Equilibrio de Nash (EN).
Sin embargo, no todos los Equilibrios de Nash son Equilibrios de estrategias dominantes.

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

WINQSB: JUEGOS DE SUMA CERO

La Teoría de Juegos analiza situaciones en donde los jugadores adoptan decisiones conociendo la disponibilidad de estrategias de cada uno de ellos.
Un juego es de suma cero cuando las ganancias de un jugador son pérdidas para el otro, es decir, un jugador se beneficia solamente a expensas de otros.

Si los intereses de los dos jugadores se centran en un mismo valor de la matriz de pagos, el juego tiene un "punto de silla" o "equilibrio" y esa cantidad es el valor del juego. Se dice entonces que los jugadores usan estrategias puras, lo que significa que cada jugador tendrá una estrategia que usará el 100% del tiempo.

Cuando los jugadores distribuyen su tiempo de juego entre varias estrategias, utilizan estrategias mixtas.

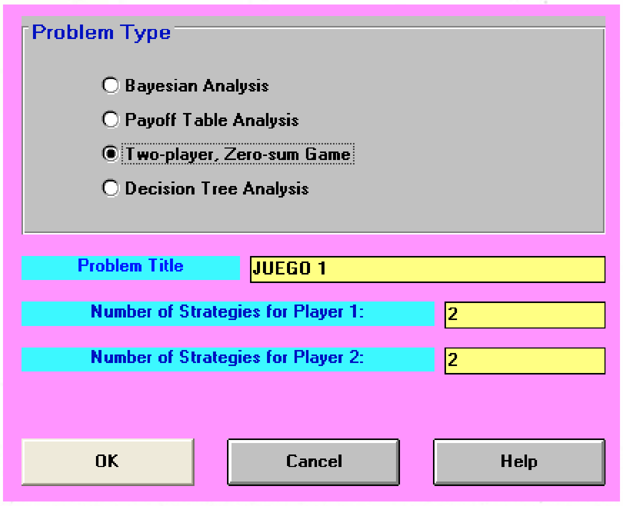
La mayoría de los casos reales en negocios y política, al igual que el dilema del prisionero, son juegos de suma no cero, porque algunos desenlaces tienen resultados netos mayores o menores que cero, es decir, la ganancia de un jugador no se corresponde necesariamente con la pérdida de otro.
Por ejemplo, un contrato de negocios involucra idealmente un desenlace de suma positiva, donde cada parte termina en una posición mejor que la que tendría si no se hubiera existido la negociación.

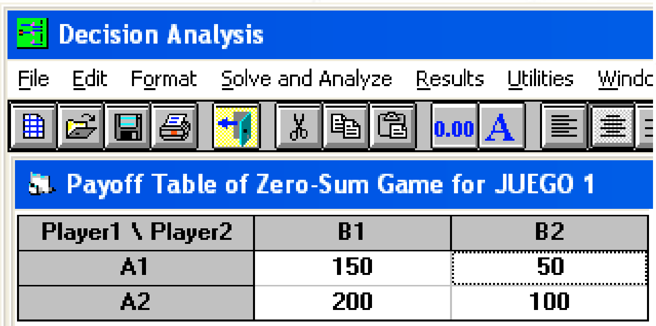
SUMA CERO:

Matriz de pago en estrategias puras

Jugador 1 / Jugador 2

Estrategias	B1	B2
A1	150	50
A2	200	100





UAM UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....

Zero-sum Game Analysis for JUEGO 1

	Player	Strategy	Dominance	Elimination Sequence
1	1	A1	Dominated by A2	1
2	1	A2	Not Dominated	
3	2	B1	Dominated by B2	2
4	2	B2	Not Dominated	
***	Saddle	Point	(Equilibrium)	is Achieved!!
	The Best	Pure	Strategy for Player 1:	A2
	The Best	Pure	Strategy for Player 2:	B2
	Stable	Payoff	for Player 1 =	100
	Player 1	is	Winning!!!	

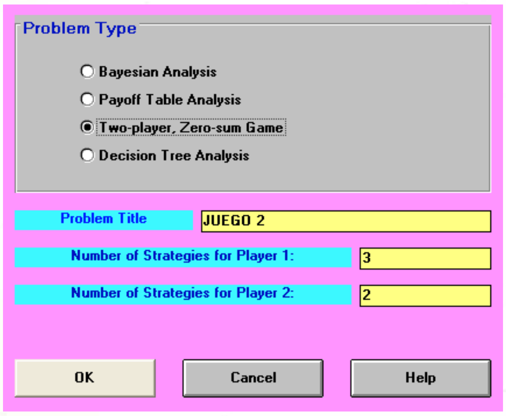
La estrategia A1 del Jugador 1 es dominada por la estrategia A2 y la estrategia B1 es dominada por la estrategia B2, con lo que queda el valor de la matriz (100).

Hay un punto de silla, la estrategia pura para el jugador 1 es A2 y para el Jugador 2 es B2.
El valor del juego es 100 a favor del Jugador 1.

Matriz de pago en estrategias mixtas

Jugador 1 / Jugador 2

Estrategias	B1	B2
A1	100	–50
A2	50	150
A3	–200	120



Decision Analysis

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Windo

Payoff Table of Zero-Sum Game for JUEGO 2

Player1 \ Player2	B1	B2
A1	100	-50
A2	50	150
A3	-200	120

Zero-sum Game Analysis for JUEGO 2

	Player	Strategy	Dominance	Elimination Sequence
1	1	A1	Not Dominated	
2	1	A2	Not Dominated	
3	1	A3	Dominated by A2	
4	2	B1	Not Dominated	
5	2	B2	Not Dominated	
	Player	Strategy	Optimal Probability	
1	1	A1	0,40	
2	1	A2	0,60	
3	1	A3	0	
1	2	B1	0,80	
2	2	B2	0,20	
	Expected	Payoff	for Player 1 =	70

Como no existe punto de silla (equilibrio), los Jugadores reparten su tiempo de juego.
El Jugador 1 juega la estrategia A1 el 40% del tiempo, la estrategia A2 el 40% del tiempo y no juega la estrategia A3.

El Jugador 2 dedica a la estrategia B1 el 80% del tiempo y a la estrategia B2 el 20% del tiempo.
El valor del juego es 70 a favor del Jugador 1.

$100 \times 0,4 + 50 \times 0,6 = 70 \qquad 50 \times 0,8 + 150 \times 0,2 = 70$

UAM UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

EQUILIBRIO de NASH

- El concepto de equilibrio de Nash (EN) identifica los perfiles de estrategias en los que ningún jugador tiene incentivos para desviarse si espera qus los demás adopten las acciones que el equilibrio prescribe para ellos.
- Cada jugador tiene que estar jugando su mejor estrategia dadas las elecciones de los otros jugadores.
- Ningún jugador tiene incentivos a cambiar su estrategia unilateralmente.

DEFINICIÓN: Un equilibrio de Nash (EN) de un juego en forma normal es un perfil de estrategias $S^* = (S_1^*, \cdots, S_1^*)$ tal que para cada jugador i y cada estrategia $s_i \in S_i$ se tiene:

$$U_i(S_i^*, S_{-i}^*) \geq U_i(S_i, S_{-i}^*)$$

Interpretación del equilibrio de Nash (EN):

- Es una norma autosostenible: Un vez aceptada, ningún jugador tiene incentivos para no seguirla.
- Cada jugador responde de la mejor manera que puede frente a las estrategias de los demás jugadores.
- Es un perfil de expectativas que se autoconfirman: Si los jugadores esperan que los demás se comporten de acuerdo con lo prescrito, entonces estas acciones ocurren como consecuencia de la conducta de los jugadores.
- Para cada jugador $i \in N$ y para cada perfil de estrategias de los demás jugadores, $s_{-i} \in S_{-i}$. Se identifica la estrategia (o estrategias) que maximiza la utilidad del jugador i.
  Esto es, $BR_i(s_{-i})$ como la Mejor Respuesta $(BR \equiv \text{Best Response})$ del jugador i al perfil s_{-i}

Esta interpretación permite reformular el concepto de equilibrio de Nash como una solución a un sistema de ecuaciones. Sea, por ejemplo, $N = 2$, el equilibrio de Nash $S^* = (S_1^*, S_2^*)$ resuelve el

sistema $\begin{cases} S_1 \in BR_1(S_2) \\ S_2 \in BR_2(S_1) \end{cases}$

La forma de resolver el sistema depende del juego en concreto:

a) Si las mejores respuesta son funciones, el problema se reduce a resolver un sistema de ecuaciones (juegos en los que las estrategias están descritas por una variable continua):

$$S_1 \in BR_1(S_2) \qquad\qquad S_2 \in BR_2(S_1)$$

b) En juegos donde se busca la mejor respuesta de un jugador para cada elección de los otros jugadores (puede ser difícil). Observando las mejores respuesta que satisfacen el sitema se encuentra el equilibrio de Nash.

c) En los juegos que se pueden representar matricialmente se puede reflejar la mejor respuesta de cada jugador ante lo que hacen los demás marcando el pago correspondiente. En las entradas de la matriz donde se haya marcado todos los pagos se tendrá un equilibrio de Nash.

Él

Ella		I_2	D_2
	I_1	1, 1	0, 0
	D_1	0, 0	1 , 1

Ella: Si Él elige I_2 la mejor opción para Ella es elegir I_1 pues $1 > 0$ y se marca con $(\times)$.
Si Él elige D_2 la mejor opción para Ella es elegir D_1 pues $1 > 0$ y se marca con $(\times)$.

Él

Ella		I_2	D_2
	I_1	$1^{\times}, 1$	0, 0
	D_1	0, 0	$1^{\times}, 1$

Él: Si Ella elige I_1 la mejor opción para Él es elegir I_2 pues $1 > 0$ y se marca con $(\circ)$.
Si Ella elige D_1 la mejor opción para Él es elegir D_2 pues $1 > 0$ y se marca con $(\circ)$.

Él

Ella		I_2	D_2
	I_1	$1^{\times}, 1^{\circ}$	0, 0
	D_1	0, 0	$1^{\times}, 1^{\circ}$

Las entradas de la matriz donde se han marcado los pagos son (I_1, I_2) y (D_1, D_2), por tanto

$EN = \{(I_1, I_2) , (D_1, D_2)\}$

Hoja nº ....

UAM UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....

UNICAMENTE PARA USO ESCOLAR (IMPRESO EN PAPEL RECICLADO)

EMPRESAS, EQUILIBRIO DE NASH

En un equilibrio de Nash cada empresa ejecuta el mejor 'movimiento' posible teniendo en cuenta los movimientos de las demás empresas.

Un equilibrio de Nash (EN) no implica que se logre el mejor resultado conjunto para las empresas, sino solo el mejor resultado para cada una de ellas consideradas individualmente. Es posible que el resultado fuera mejor para todas las empresas si, de alguna manera, coordinasen su acción.

En términos económicos, es un tipo de equilibrio de competencia imperfecta que describe la situación de varias empresas compitiendo por el mercado de un mismo bien y que pueden elegir cuánto producir para intentar maximizar su ganancia.

DILEMA DEL PRISIONERO: Analiza los incentivos que tienen dos presos que han sido encarcelados y son interrogados para delatar al otro compañero.
Al no haber pruebas concluyentes, si se delatan se puede cerrar el caso.
Se muestra la matriz de pagos (años de prisión) que tendrá cada uno en función de la decisión que tomen:

DILEMA DEL PRISIONERO

		Prisionero 2	
		Delata D_2	No Delata $\bar{D}_2$
Prisionero 1	Delata D_1	$-6\,,-6$	$-1\,,-10$
	No Delata $\bar{D}_1$	$-10\,,-1$	$-2\,,-2$

$\leftarrow$ Matriz de pagos $\left(\begin{array}{c}\text{Años}\\\text{prisión}\end{array}\right)$

El Prisionero 1 tiene dos estrategias $(D_1\,,\ \bar{D}_1)$ y el Prisionero 2 tiene dos estrategias $(D_2\,,\ \bar{D}_2)$

Resolviendo el problema por medio de estrategias dominadas, en el Prisionero 1 la estrategia D_1 domina a la estrategia $\bar{D}_1$ pues $-6 > -10$ y $-1 > -2$

Por lo que se elimina la estrategia $\bar{D}_1$

DILEMA DEL PRISIONERO

		Prisionero 2	
		Delata D_2	No Delata $\bar{D}_2$
Prisionero 1	Delata D_1	$\boxed{-6\,,-6}$	$-1\,,-10$

En el Prisionero 2 la estrategia D_2 domina a la estrategia $\bar{D}_2$ pues $-6 > -10$

En consecuencia, en el dilema del prisionero, la estrategia dominante para ambos jugadores es delatar, lo que significa que Delatar-Delatar es el equilibrio de la estrategia dominante (Equilibrio de Nash).

Si hubieran podido pactar, estarían mejor decidiendo No Delatar $(-1\,,-1) \equiv$ Equilibrio óptimo de Pareto, ambos serían condenados a 1 año de prisión, aunque sería inestable (hay incentivos de desviarse). Al no existir ninguna relación entre los prisioneros, no existe confianza entre ellos, y no hay motivos para pensar que puedan colaborar.

Señalar que cualquier equilibrio de estrategia dominante es siempre un Equilibrio de Nash.
Sin embargo, no todos los equilibrios de Nash son equilibrios de estrategias dominantes.

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

OLIGOPOLIO. DUOPOLIO

La Teoría de Juegos tiene un enorme campo de aplicación en Economía y Ciencias Sociales, permite analizar y predecir el comportamiento esperado de individuos que interactúan en un juego, en una situación determinada (comportamiento estratégico), maximizando la utilidad de cada individuo.

En otras palabras, permite dar con la estrategia óptima adelantándose y previniendo la estrategia que tomarán el resto de competidores.
Esta utilidad vendrá determinada por las decisiones tomadas, así como los resultados obtenidos.

La Teoría de Juegos estudia la elección de la conducta óptima cuando los costes y beneficios de cada opción no están fijados de antemano, dependiendo de las elecciones de otros individuos.

Tiene relevancia en mercados como los Oligopolios, estructura de mercado en donde existen pocos competidores relevantes y cada uno de ellos tiene cierta capacidad de influir en el precio y cantidad de equilibrio, donde la competencia por lograr cuota de mercado es muy alta.

GUERRA DE PUBLICIDAD: Las empresas A y B forman un Duopolio (mercado caracterizado principalmente por la existencia de dos empresas que controlan la totalidad de un mercado en concreto, especialmente, gracias a la fijación conjunta de precios) en el sector de grandes almacenes, ambas destinan una gran inversión en publicidad, que se adjunta en la siguiente matriz de pagos. ¿Cuál sería la decisión óptima?

GUERRA DE PUBLICIDAD

		Empresa B	
		Hacer Publicidad	No Hacer Publicidad
Empresa A	Hacer Publicidad	10 , 5	15 , 0
	No Hacer Publicidad	6 , 8	10 , 2

$\leftarrow$ Matriz de pagos $\left(\text{Millones euros}\right)$

Solución:

En la empresa A la estrategia dominante es 'Hacer Publicidad': $10 > 6$, $15 > 10$

En la empresa B la estrategia dominante es 'Hacer Publicidad': $5 > 0$, $8 > 2$

El equilibrio de Nash en estrategias puras es que ambas empresas hagan publicidad:

$$\text{EN} = \left\{(\text{Publicidad, Publicidad})\right\}$$

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

UNICAMENTE PARA USO ESCOLAR (IMPRESO EN PAPEL RECICLADO)

GUERRA DE PUBLICIDAD MODIFICADA

		Empresa B: Hacer Publicidad	Empresa B: No Hacer Publicidad
Empresa A	Hacer Publicidad	10 , 5	15 , 0
	No Hacer Publicidad	6 , 8	18 , 2

← Matriz de pagos $\begin{pmatrix}\text{Millones}\\ \text{euros}\end{pmatrix}$

Solución:

La empresa A no tiene como estrategia dominante: $10 > 6$, $15 \not> 18$

La empresa B si tiene como estrategia dominante 'Hacer Publicidad': $5 > 0$, $8 > 2$

GUERRA DE PUBLICIDAD MODIFICADA

		Empresa B: Hacer Publicidad
Empresa A	Hacer Publicidad	10 , 5
	No Hacer Publicidad	6 , 8

La estrategia de la empresa A es 'Hacer Publicidad' porque así gana 10 millones de euros en lugar de 6 millones.

El equilibrio de Nash es que ambas empresas hagan publicidad: $EN = \{(\text{Publicidad}, \text{Publicidad})\}$

En el planteamiento hay dos clases de participantes: conductores de autobuses y pasajeros. La matriz de pagos resume las utilidades para cada una de las distintas combinaciones de estrategias.

		Pasajeros	
		Paradas regulares	Paradas transbordo
Conductores autobuses	Paradas regulares	15 , 10	5 , 5
	Paradas transbordo	5 , 5	20 , 30

Analizar si existen equilibrios de Nash y estrategias dominantes.

Solución:

		Pasajeros	
		Paradas regulares	Paradas transbordo
Conductores autobuses	Paradas regulares	15 , 10	5 , 5
	Paradas transbordo	5 , 5	20 , 30

ESTRATEGIAS COMINANTES: No hay estrategias dominantes al no existir incentivos para cambiar de posición. Se necesitaría una fuerza externa para moverse de la posición inicial, sea cual fuere la situación.

EQUIILIBRIOS DE NASH:

		Pasajeros	
		Paradas regulares	Paradas transbordo
Conductores autobuses	Paradas regulares	15° , 10^{*}	5 , 5
	Paradas transbordo	5 , 5	20° , 30^{*}

Los equilibrios de Nash corresponden a los pagos $EN = \{(15, 10)\ ,\ (20, 30)\}$

Se observa que todo Equilibrio de Nash no es una estrategia dominante.

Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....

Encontrar la solución mediante equilibrio de Nash en el siguiente planteamiento:

Empresa B

Empresa A	No Publicidad	Radio	Televisión
No Publicidad	13 , 3	11 , 8	8 , 13
Radio	15 , 2	12 , 4	10 , 12
Televisión	18 , 1	15 , 6	10 , 3

Empresa A:

Si la Empresa B escoge 'No Publicidad', la mejor opción para la Empresa A es utilizar 'Televisión' y se marca con $(\circ)$.

Si la Empresa B escoge usar 'Radio', la mejor opción para la Empresa A es utilizar 'Televisión', se marca con $(\circ)$.

Si la Empresa B opta por 'Televisión', la mejor opción a la Empresa A es utilizar 'Radio' o 'Televisión' indistintamente, se marcan las dos con $(\circ)$.

Empresa B

Empresa A	No Publicidad	Radio	Televisión
No Publicidad	13 , 3	11 , 8	8 , 13
Radio	15 , 2	12 , 4	10° , 12
Televisión	18° , 1	15° , 6	10° , 3

Empresa B:

Si la Empresa A escoge 'No Publicidad', la mejor opción para la Empresa B es utilizar 'Televisión' y se marca con $(*)$.

Si la Empresa A escoge usar 'Radio', la mejor opción para la Empresa B es utilizar 'Televisión', se marca con $(*)$.

Si la Empresa A opta por 'Televisión', la mejor opción a la Empresa B es utilizar 'Radio', se marca con $(*)$.

Empresa B

Empresa A	No Publicidad	Radio	Televisión
No Publicidad	13 , 3	11 , 8	8 , 13^{*}
Radio	15 , 2	12 , 4	10° , 12^{*}
Televisión	18° , 1	15° , 6^{*}	10° , 3

Hay dos Equilibrios de Nash: $EN = \{(\text{Radio, Televisión}) , (\text{Televisión, Radio})\}$ '

COMPETENCIA ENTRE EMPRESAS

La empresa A domina el mercado en una ciudad y una nueva empresa B está estudiando si entra en él. Si la empresa B entra en el mercado, la empresa A tiene dos posibilidades: Asumir la competencia de la empresa B, lo que se traduce en una disminución de la cuota de mercado; o bien lanzar una guerra de precios.

Si la empresa A decide asumir la competencia, ambas empresas tendrán un beneficio de 5 millones de euros anuales, mientras que si decide lanzar una guerra de precios, las pérdidas anuales seán de 5 millones para la Empresa A y 10 millones para la Empresa B. Si la empresa B decide no entrar en el mercado, el beneficio anual para la Empresa A es de 20 millones.

El juego en forma normal:

		Empresa B	
		Entrar mercado	No entrar mercado
Empresa A	Asumir competencia	5 , 5	20 , 0
	Guerra de precios	− 5 , − 10	20 , 0

Si no se desea tener valores negativos se puede sumar 10 a todos los resultados:

		Empresa B	
		Entrar mercado	No entrar mercado
Empresa A	Asumir competencia	15 , 15	30 , 10
	Guerra de precios	5 , 0	30 , 10

Se soluciona el problema mediante el Equilibrio de Nash:

Empresa A: Si la Empresa B toma la opción 'Entrar mercado', la opción más beneficiosa para la Empresa A es 'Asumir la competencia' y se marca con (◦) .

Si la Empresa B elige la opción 'No entrar en mercado', a la Empresa A le es indiferente cualquier opción: 'Asumir la competencia' o una 'Guerra de precios', con lo que se marcan las dos con (◦)

		Empresa B	
		Entrar mercado	No entrar mercado
Empresa A	Asumir competencia	15° , 15	30° , 10
	Guerra de precios	5 , 0	30° , 10

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

Empresa B: Si la Empresa A toma la opción 'Asumir la competencia', la opción más beneficiosa para la Empresa B es 'Entrar en mercado' y se marca con $(*)$.
Si la Empresa A toma la opción 'Guerra de precios', la opción más beneficiosa para la Empresa B es 'No entrar en mercado' y se marca también con $(*)$.

		Empresa B	
		Entrar mercado	No entrar mercado
Empresa A	Asumir competencia	$15^{\circ}\ ,\ 15^{*}$	$30^{\circ}\ ,\ 10$
	Guerra de precios	$5\ ,\ 0$	$30^{\circ}\ ,\ 10^{*}$

Existen dos equilibrios de Nash:

$$EN = \{(\text{Asumir competencia, Entrar mercado}) , (\text{Guerra de precios, No entrar mercado})\}$$

El Equilibrio de Nash en estrategias puras no tiene en cuenta qué jugador comienza el juego.

Un juego representado en formal normal no tiene en cuenta qué Jugador juega primero, pudiendo perder información.

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

JUEGOS DINÁMICOS. FORMA EXTENSIVA

Juegos en los que un jugador tiene que tomar una decisión tras conocer parte del desarrollo del juego, en concreto qué hizo algunos de sus rivales.

El modelo matemático del juego se desarrolla en forma extensiva.

En la forma extensiva la descripción del juego se realiza en forma de árbol de decisión, dando mayor importancia a la secuencia del juego, es decir, a la forma en que se desarrollan o se pueden desarrollar las acciones de cada jugador para llegar a los resultados.

Para realizar la respresentación se utiliza un árbol de decisión, formado por: jugadores; nodos que incluyen los resultados de las elecciones de alguno de los jugadores o del fin del juego; acciones que relacionan los nodos y que equivalen a las elecciones de los jugadores; y los vectores de pago que se asocian con cada nodo al final del juego.

En un juego representado en forma extensiva se deben especificar:

- El orden en que los jugadores van tomando sus decisiones
- La información que tienen en cada momento
- Las alternativas que tienen a su disposición
- El resultado final de cada posible camino que se haya podido seguir

ESTRATEGIA: Es un plan contingente que prescribe qué acción tomará el jugador en cada una de las posibles ocasiones (vértices) eb las que le puede tocar mover, incluso en aquellas situaciones en las que no sigue el plan inicial.
Señalar que la definición de estrategia no requiere que se lleven a cabo todas las acciones en ella. Se realizarán unas acciones u otras según el desarrollo del juego.

PERFIL DE ESTRATEGIA: Es un vector de estrategias, una para cada jugador, $S = (s_1, s_2, \cdots, s_n)$.

$S \equiv$ Conjunto de perfiles de estrategia: $S = S_1 \times S_2 \times \ \ldots \ \times S_n$

En esta línea, sí $S_1 = \{A, B\}$ y $S_2 = \{X, Y\} \ \Rightarrow \ S = S_1 \times S_2 = \{(A, X), (A, Y), (B, X), (B, Y)\}$

Denotando por $s_{-1} \equiv$ El perfil de estrategia para todos los jugadores excepto para el jugador i

Un perfil de estrategia se puede denotar como $s = (s_i, s_{-i})$

TIPOS DE JUEGOS DINÁMICOS:

- Juegos con información completa: Los jugadores están perfectamente informados de lo ocurrido hasta el momento en que juegan.

- Juegos con información incompleta: Algún jugador no conoce el resultado de algún movimiento de azar o la acción que ha tomado otro que ha jugado antes.

SUBJUEGOS: EQUILIBRIO DE NASH PERFECTO EN SUBJUEGOS (ENPS)

Un subjuego en un juego dinámico de información perfecta consiste en un vértice no final del juego y en todos los vértices siguientes, unidos por las mismas ramas y respetando los pagos finales y la asignación de jugadores.

ENPS: Un perfil de estrategias constituye un ENPS si constituye un equilibrio de Nash (EN) de cada subjuego.

EMPRESAS - ENPS

Un perfil de estrategias es un equilibrio perfecto en subjuegos si genera un equilibrio de Nash en cada subjuego del juego original. El conjunto de equilibrios perfectos en subjuegos para un juego dado es siempre un subconjunto del conjunto de equilibrios de Nash para ese juego. En algunos casos, los conjuntos pueden ser idénticos.

Cuando las Empresas disputan cualquier disputa que consista en solo una parte de la disputa original y su comportamiento representa una equilibrio de Nash de esa pequeña disputa, su comportamiento es un equilibrio perfecto en las disputas.

El ENPS normalmente se resuelve por 'inducción hacia atrás', de derecha a izquierda, eliminando las ramas que impliquen cualquier jugador que hace un movimiento que no es creíble (no es óptimo) en un nodo.

MONOPOLIOS. OLIGOPOLIOS. RRHH

En la empresa el ENPS es una herramienta muy popular, sobre todo cuando se desea realizar mediciones de motivación-satisfacción de empleados. Se implanta en encuestas como herramienta de medición en Recursos Humanos.

En la vida financiera para maximizar beneficios y minimizar riesgos. En Instituciones para evitar Monopolios y Oligopolios.

REPRESENTACIÓN EN FORMA EXTENSIVA

La forma extensiva debe representar la información con la que cuenta cada jugador en el momento de tomar una decisión.
Cuando un jugador posee la misma información en más de un nodo, estos nodos se unen con una línea discontinua. Así, en estos nodos un jugador no puede distinguir su ubicación exacta en el juego.

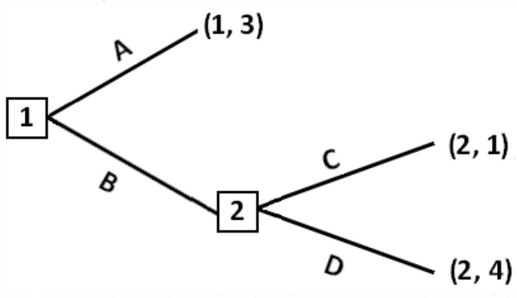
Un Conjunto de Información es un conjunto formado por nodos entre los cuales un jugador no puede distinguir su posición en el juego cuando toma una decisión. Es decir, al conjunto de nodos conectados mediante líneas discontinuas. Generalmente esto ocurre cuando el jugador no puede observar las acciones que toman otros jugadores en los nodos predecesores.
Todo nodo de decisión pertenece a un Conjunto de Información.

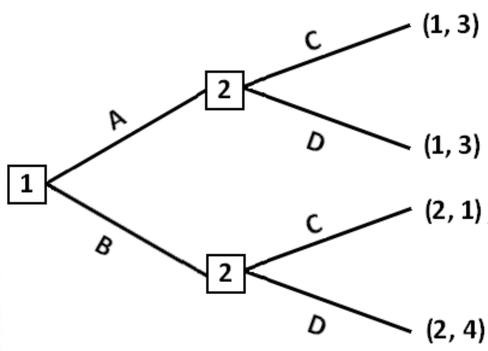
Todos los nodos que pertenecen al mismo Conjunto de Información tienen el mismo número de sucesores inmediatos y deben tener el mismo conjunto de acciones sobre las ramas (diferentes acciones que un jugador puede elegir) que conducen a estos. Si no fuera así, el jugador podría distinguir entre los nodos.
Cada juego en forma extensiva posee una representación en forma normal. Un juego en forma normal puede poseer más de una representación en forma extensiva.
En esta línea, existe una discursión sobre si en realidad los juegos en forma normal contienen toda la información requerida.

JUEGOS ESTÁTICOS (one-shot games) poseen una buena representación en forma normal al no existir discrepancia en la información entre esta representación y la forma extensiva.

		Jugador 2	
		C	D
Jugador 1	A	(1, 3)	(1, 3)
	B	(2, 1)	(2, 4)

Se puede representar de frma extensiva:





Se considera la matriz de pagos entre las Empresas 1 y 2.

		Empresa 2	
		C	D
Empresa 1	A	(4, 2)	(2, 3)
	B	(3, 2)	(1, 1)

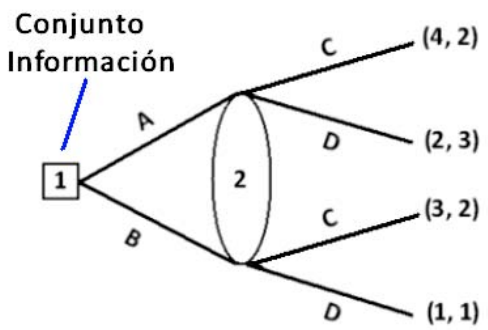
El juego simultáneo tiene un equilibrio de Nash en estrategias puras: $\text{EN} = \{(2, 3)\}$

- La Empresa 2 elige sin saber lo que ha hecho la Empresa 1

La Empresa 1 tiene un solo conjunto de información con dos posibles acciones (A, B) .

Estrategias de la Empresa 1: (A, B)

Estrategias de la Empresa 2: (C, D)



La Empresa 1 no puede establecer cuál es su mejor acción hasta que no conozca que hará la Empresa 2.

La forma estratégica o normal asociada:

		Empresa 2	
		C	D
Empresa 1	A	$(4^{\circ}, 2)$	$(2^{\circ}, 3^{*})$
	B	$(3, 2^{*})$	(1, 1)

$\text{EN} = \{(2, 3)\}$

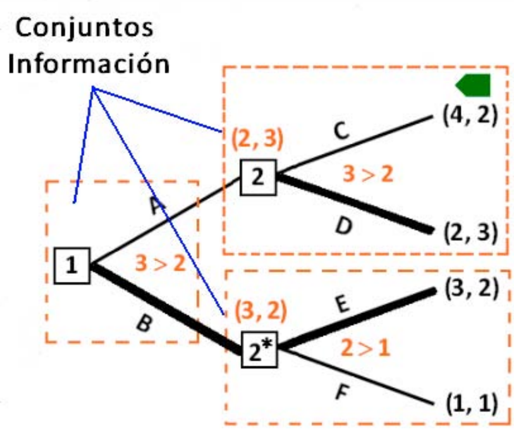
- La Empresa 1 es la primera en elegir.

Hay 3 conjuntos de información y 3 subjuegos:

El que comienza en el vértice 1, el que comienza en el vértice 2 y el que comienza en el vértice 2^{*}.

El juego completo es a su ve un subjuego.

Empresa 1 con 4 estrategias: (CE, CF , DE , DF)



El juego en forma estratégica o normal, queda:

		Jugador 2				
		(C, E)	(C, F)	(D, E)	(D, F)	
Jugador 1	A	(4, 2)	(4, 2)	(2, 3)	(2, 3)	(a^{*}, b)
	B	(3, 2)	(1, 1)	(3, 2)	(1, 1)	

(a, b^{*})

Equilibrios de Nash:

		Jugador 2			
		(C, E)	(C, F)	(D, E)	(D, F)
Jugador 1	A	$(4^{\circ}, 2)$	$(4^{\circ}, 2)$	$(2, 3^{*})$	$(2^{\circ}, 3^{*})$
	B	$(3, 2^{*})$	(1, 1)	$(3^{\circ}, 2^{*})$	(1, 1)

Hay dos equilibrios con estrategias puras de Nash: $EN = \{ (A, (D, F)) \,,\; (B, (D, E)) \}$

El Equilibrio de Nash perfecto en subjuegos (ENPS) es el equilibrio por inducción hacia atrás:

$ENPS = \{ (A, (D, F)) \,,\; (B, (D, E)) \}$

COMPETENCIA ENTRE EMPRESAS EN FORMA EXTENSIVA

La empresa A domina el mercado en una ciudad y una nueva empresa B está estudiando si entra en él. Si la empresa B entra en el mercado, la empresa A tiene dos posibilidades: Asumir la competencia de la empresa B, lo que se traduce en una disminución de la cuota de mercado; o bien lanzar una guerra de precios.

Si la empresa A decide asumir la competencia, ambas empresas tendrán un beneficio de 5 millones de euros anuales, mientras que si decide lanzar una guerra de precios, las pérdidas anuales seán de 5 millones para la Empresa A y 10 millones para la Empresa B. Si la empresa B decide no entrar en el mercado, el beneficio anual para la Empresa A es de 20 millones.

El juego en forma normal:

		Empresa B	
		Entrar mercado	No entrar mercado
Empresa A	Asumir competencia	$5\,,5$	$20\,,0$
	Guerra de precios	$-5\,,-10$	$20\,,0$

Empresa A:

Si la Empresa B toma la opción 'Entrar mercado', la opción más beneficiosa para la Empresa A es 'Asumir la competencia' $(5 > -5)$ y se marca con $(\times)$.

Si la Empresa B elige la opción 'No entrar en mercado', a la Empresa A le es indiferente cualquier opción: 'Asumir la competencia' o una 'Guerra de precios', con lo que se marcan las dos con $(\times)$

		Empresa B	
		Entrar mercado	No entrar mercado
Empresa A	Asumir competencia	$5^{\times}\,,5$	$20^{\times}\,,0$
	Guerra de precios	$-5,-10$	$20^{\times}\,,0$

Empresa B:

Si la Empresa A toma la opción 'Asumir la competencia', la opción más beneficiosa para la Empresa B es 'Entrar en mercado' $(5 > 0)$ y se marca con $(*)$.

Si la Empresa A toma la opción 'Guerra de precios', la opción más beneficiosa para la Empresa B es 'No entrar en mercado' $(0 > -10)$ y se marca también con $(*)$.

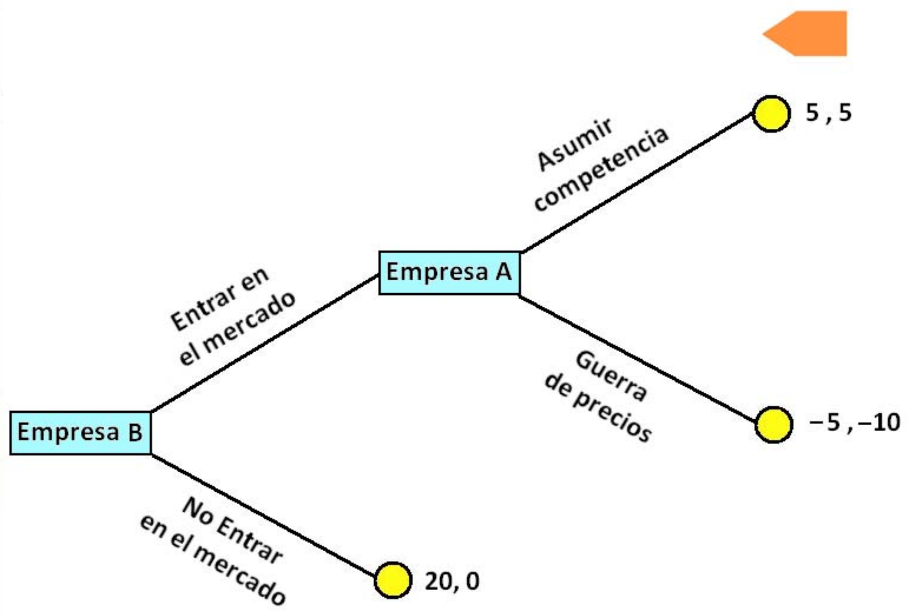
		Empresa B	
		Entrar mercado	No entrar mercado
Empresa A	Asumir competencia	$5^{\times}\,,5^{*}$	$20^{\times}\,,0$
	Guerra de precios	$-5,-10$	$20^{\times}\,,0^{*}$

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

Existen dos equilibrios de Nash:

$$EN = \{(\text{Asumir competencia, Entrar mercado}),\ (\text{Guerra de precios, No entrar mercado})\}$$

Se puede representar de forma extensiva:



Se empieza a resolver el juego de derecha a izquierda: Empresa A

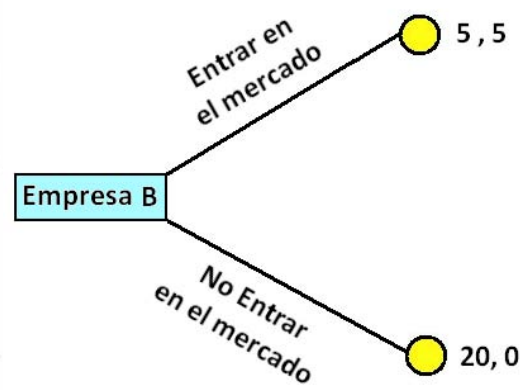
Comienza decidiendo que opción es más beneficiosa para la Empresa A, que es 'Asumir la competencia', dado que $5 > -5$.

En el nodo que se inicia se incorpora la opción óptima (5, 5)

En la Empresa B l a opción más beneficiosa es 'Entrar en el mercado' ya que $5 > 0$

La solución óptima es:

(Asumir competencia, Entrar mercado)



Esta solución coincide con una de las obtenidas en el Equilibrio de Nash:

$$EN = \{(\text{Asumir competencia, Entrar mercado}),\ (\text{Guerra de precios, No entrar mercado})\}$$

Mientras que la otra solución no coincide, el Equilibrio de Nash no tiene en cuenta qué jugador comienza el juego. Esta circunstancia aparecerá siempre que el juego tenga horizonte finito y que además tenga información perfecta.

JUEGOS DINÁMICOS CON INFORMACIÓN COMPLETA

Todos los jugadores conocen lo ocurrido hasta el momento en que juegan, cada conjunto de información contiene un único nodo de decisión.

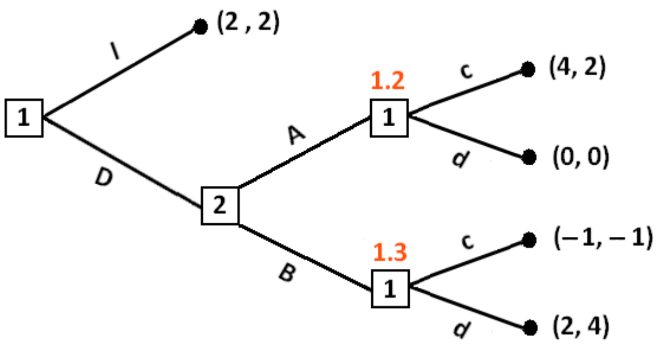
En un juego dinámico con información completa el equilibrio de Nash en subgrupos (ENPS) se puede calcular por inducción hacia atrás de derecha a izquierda.

Elementos de la forma extensiva:

- Árbol de decisión: Vértice inicial del que salen varias ramas que llegan a otros vértices, de los que pueden salir otras ramas, y así sucesivamente. Los vértices de los que no salen ramas se denominan vértices finales.
- Asignación de los vértices no finales entre los jugadores: Cada vértices debe de ser de algún jugador y ningún vértice puede corresponder a más de un jugador.
- Asignación de acciones a cada jugador en cada uno de los vértices que tiene asignados.
- Asignación de pagos (utilidades): En cada vértice final se asigna un pago a cada jugador.

La figura respresenta la forma extensiva de un juego con información completa:

El Jugador 1 juega en dos momentos distintos, la segunda vez en uno de dos posibles vértices.



La forma estratégica o normal del Juego sería:

	Jugador 2	
Jugador 1	A	B
(I, c, c)	(2, 2)	(2, 2)
(I, c, d)	(2, 2)	(2, 2)
(I, d, c)	(2, 2)	(2, 2)
(I, d, d)	(2, 2)	(2, 2)
(D, c, c)	(4, 2)	(−1, −1)
(D, c, d)	(4, 2)	(2, 4)
(D, d, c)	(0, 0)	(−1, −1)
(D, d, d)	(0, 0)	(2, 4)

Una estrategia en un juego dinámico es un plan que prescribe qué acción tomará el jugador en cada uno de los vértices (posibles acciones) em los que le puede tocar actuar, incluso en aquellas situaciones en las que no se sigue el plan inicial.

Una estrategia no requiere que se lleven a cabo todas las acciones, se realizarán unas acciones u otras según el desarrollo del juego.

Identificando las estrategias (I, c, c) , (I, c, d) , (I, d, c) y (I, d, d) en una sola estrategia (I) se puede realizar una simplificación. Adviértase que estas cuatro estrategias son indistinguibles al ofrecer los mismos pagos para ambos jugadores.

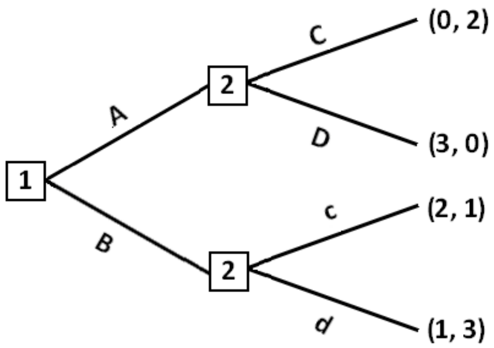
UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

Se considera el juego en forma extensiva

a) Especificar el conjunto de estrategias puras de cada jugador.

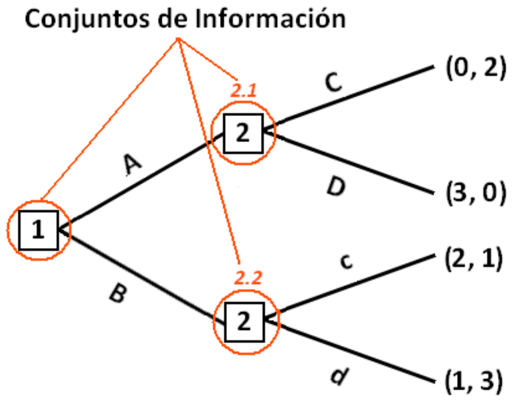
b) Calcular los equilibrios de Nash perfectos en subjuegos (ENPS), la trayectoria y los pagos.



Solución:

a) El jugador 1 tiene un solo conjunto de información con dos posibles acciones.
En consecuencia, el jugador 1 tiene $2^1 = 2$ estrategias: $S_1 = \{A, B\}$

El jugador 2 tiene dos conjuntos de información, en cada uno de estos dos conjuntos dispone de dos posibles acciones. Por tanto, el jugador 2 tiene $2^2 = 4$ estrategias: $S_2 = \{Cc, Cd, Dc, Dd\}$

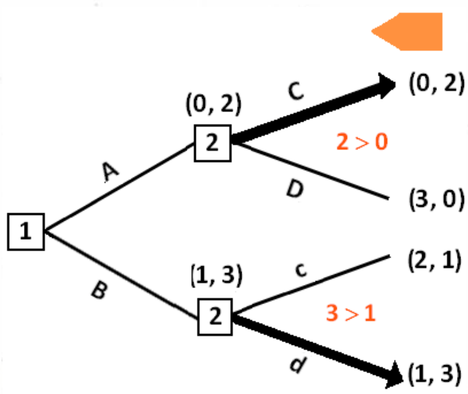


b) Se trata de un juego con información completa porque cada conjunto de información contiene un único nodo de decisión. Es decir, en cada nodo de decisión el jugador al que toca escoger una acción conoce las jugadas anteriores.

En consecuencia, el equilibrio de Nash perfecto en subjuegos (ENPS) es el equilibrio por inducción de derecha a izquierda: Se comienza buscando las acciones óptimas para el jugador 2.

Las acciones óptimas del Jugador 2 están indicadas por flechas.

La acción óptima del Jugador 1, que anticipa las acciones del Jugador 2, será escoger la acción B que obtendrá un pago de 1 $(1 > 0)$



(IMPRESO EN PAPEL RECICLADO) UNICAMENTE PARA USO ESCOLAR

Hoja nº ....

Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

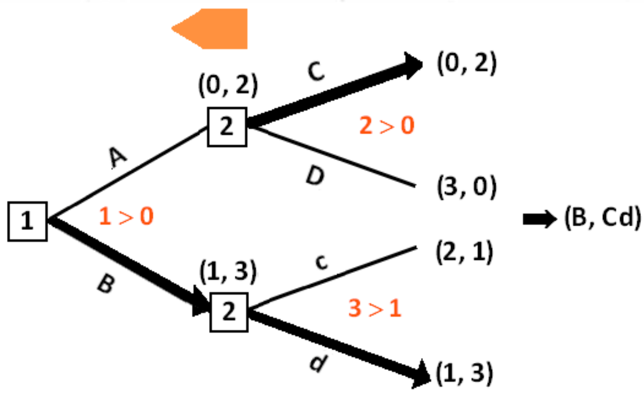
Ejercicio del día ....

El único equilibrio de Nash perfecto en subjuegos (ENPS) es (B, Cd) , esto es:

La estretegia B para el Jugador 1 y la estrategia Cd para el Jugador 2.

La trayectoria correspondiente es la serie de decisiones que se llevan a cabo si se juega este equilibrio: B – d

El pago resultante es (1, 3)



UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....

El juego dinámico entre dos jugadores consite en que el Jugador 1 escoge primero entre Ayudar (A) o No Ayudar (NA), y después el Jugador 2, conociendo la elección del Jugador 1, decide a su vez entre sí Ayuda (A) o No Ayuda (NA). Cada Jugador recibe una utilidad de 8 si ayudan, y de 2 si nadie ayuda. Por otra parte, sí un Jugador Ayuda y el otro No Ayuda, el Jugador que Ayuda obtiene una utilidad de 0 y el Jugador que No Ayuda de 9.

Se pide:

a) Representar el juego en forma extensiva y en forma estratégica.

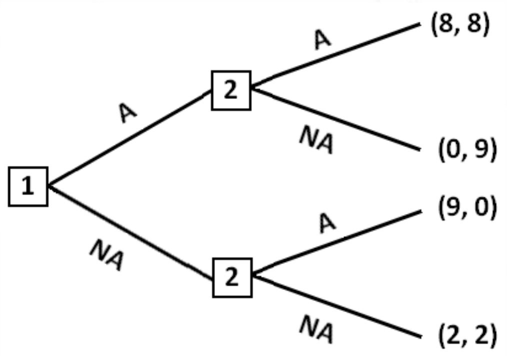
b) Hallar el equilibrio o equilibrios de Nash (EN) en estrategias puras.

c) Hallar el equilibrio perfecto de Nash (ENPS) del juego por inducción hacia atrás. En caso de existir, indicar un equilibrio no perfecto.

Solución:

a) Para representar la matriz de pagos se sitúa el Jugador 1 en las filas y al Jugador 2 en columnas.

Señalar que en los Juegos Dinámicos la palabra 'estrategia' se reserva para designar todo un plan completo de acciones de respuesta de un jugador frente a las acciones del otro jugador.



En el nodo de arriba: Las estrategias del Jugador 2 indican lo que haría el Jugador 2 si el Jugador 1 eligiera A.

En el nodo de abajo: Las estrategias del Jugador 2 indican lo que haría el Jugador 2 sí el Jugador 1 eligiera NA.

En forma estratégica o normal:

Jugador 2

		(A, A)	(A, NA)	(NA, A)	(NA, NA)	
Jugador 1	A	8, 8	8, 8	0, 9	0, 9	(a^*, b)
	NA	9, 0	2, 2	9, 0	2, 2	(a, b^*)

b) Solo hay un equilibrio de Nash: $\left[\text{NA}, (\text{NA}, \text{NA})\right]$

Jugador 1:

Sí el jugador 2 elige (A, A), la mejor opción del jugador 1 es elegir $(9, 0)$: $9 > 8$

Sí el jugador 2 elige (A, NA), la mejor opción del jugador 1 es elegir $(8, 8)$: $8 > 2$

Sí el jugador 2 elige (NA, A), la mejor opción del jugador 1 es elegir $(9, 0)$: $9 > 0$

Sí el jugador 2 elige (NA, NA), la mejor opción del jugador 1 es elegir $(2, 2)$: $2 > 0$

Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....

Jugador 2

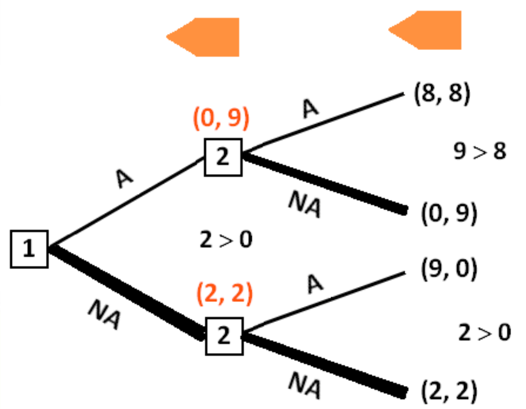
Jugador 1		A, A	A, NA	NA, A	NA, NA
	A	8, 8	$\overline{8}$, 8	0, 9	0, 9
	NA	$\overline{9}$, 0	2, 2	$\overline{9}$, 0	$\overline{2}$, 2

Jugador 2: Sí el jugador 1 elige A, la mejor opción del jugador 2 es elegir (0, 9): $9 > 8$
Sí el jugador 1 elige NA, la mejor opción del jugador 2 es elegir (2, 2): $2 > 0$

Jugador 2

Jugador 1		A, A	A, NA	NA, A	NA, NA
	A	8, 8	$\overline{8}$, 8	0, $\underline{9}$	0, $\underline{9}$
	NA	$\overline{9}$, 0	2, $\underline{2}$	$\overline{9}$, 0	$\overline{2}$, $\underline{2}$

c)



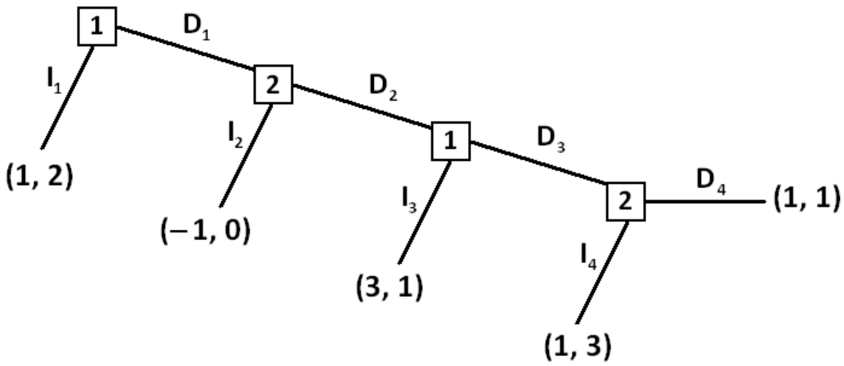
➡ [NA, (NA, NA)]

El equilibrio perfecto es [NA, (NA, NA)]

Pago resultante es (2,2)

No hay ningún equilibrio no perfecto, pues sólo hay un equilibrio de Nash.

Se considera el juego representado por el árbol de decisión que figura a continuación:



a) Describir la estrategia de cada jugador y el perfil estratégico en los subjuegos.
b) Obtener los equilibrios perfectos en subjuegos.

Solución:

a) Hay 4 subjuegos.

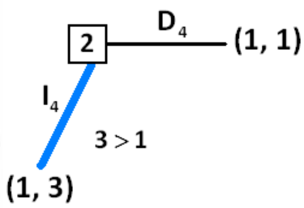
Estrategias del Jugador 1: $S_1 = \{I_1, D_1\} \times \{I_3, D_3\} = \{(I_1, I_3), (I_1, D_3), (D_1, I_3), (D_1, D_3)\}$

Estrategias del Jugador 2: $S_2 = \{I_2, D_2\} \times \{I_4, D_4\} = \{(I_2, I_4), (I_2, D_4), (D_2, I_4), (D_2, D_4)\}$

Resolviendo el juego por inducción hacia atrás (de derecha a izquierda)

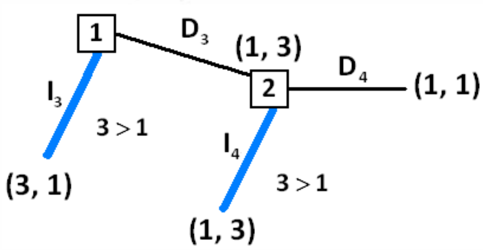
4ª etapa: El Jugador 2 juega I_4

Un perfil estratégico del equilibrio del subjuego es (I_4)



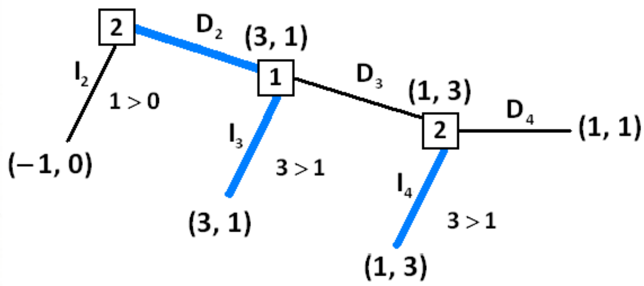
3ª etapa: El Jugador 1 juega I_3

Un perfil estratégico del equilibrio del subjuego es (I_3, I_4)



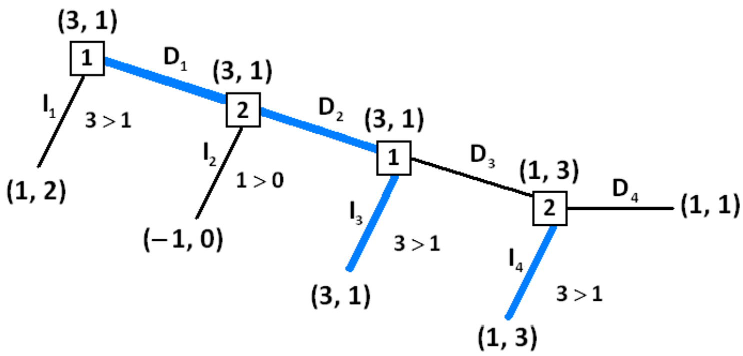
2ª etapa: El Jugador 2 juega D_2

Un perfil estratégico del equilibrio del subjuego es (D_2, I_3, I_4)



1ª etapa: El Jugador 1 juega D_1

Un perfil estratégico del equilibrio del juego total es (D_1, D_2, I_3, I_4)



b) El equilibrio de Nash perfecto en subjuegos (ENPS) es el equilibrio por inducción hacia atrás.

$$\text{ENPS} = \{(D_1, I_3), (D_2, I_4)\}$$

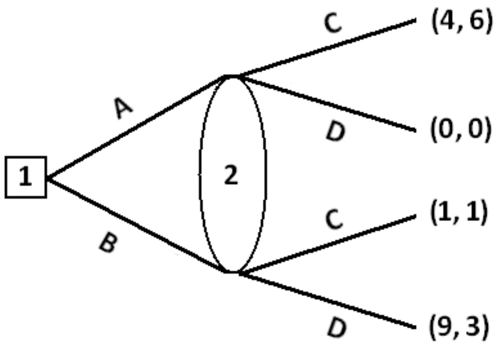
UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

Se representa una decisión empresarial con información incompleta y se desconoce la acción que maximiza el pago de la Empresa 2.

Antes de resolver el problema de la Empresa 2 hay que resolver el problema de la Empresa 1.

1 subjuego



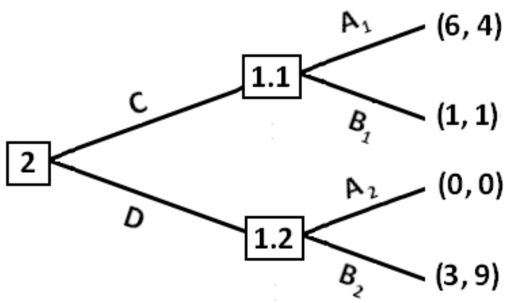
La forma estratégica onormal asociada:

		Empresa 2	
		C	D
Empresa 1	A	$(4^{x}, 6^{*})$	(0, 0)
	B	(1, 1)	$(9^{x}, 3^{*})$

$$EN = \{(A, C), (B, D)\}$$

Cuando la Empresa 2 observa la decisión de la Empresa 1 antes de tomar su decisión, el árbol de decisión pasa a tener 3 subjuegos.

El orden de pagos que refleja el movimiento se describe en la representación gráfica.



La forma estratégica o normal

		Empresa 1				
		(A_1, A_2)	(A_1, B_2)	(B_1, A_2)	(B_1, B_2)	
Empresa 2	C	(6, 4)	(6, 4)	(1, 1)	(1, 1)	(a^{*}, b)
	D	(0, 0)	(3, 9)	(0, 0)	(3, 9)	(a, b^{*})

Equilibrio de Nash:

Empresa B:

Sí la Empresa A elige (A_1, A_2), la mejor opción de la Empresa B es elegir $(6^{x}, 4)$: $6 > 0$

Sí la Empresa A elige (A_1, B_2), la mejor opción de la Empresa B es elegir $(6^{x}, 4)$: $6 > 3$

Sí la Empresa A elige (B_1, A_2), la mejor opción de la Empresa B es elegir $(1^{x}, 1)$: $1 > 0$

Sí la Empresa A elige (B_1, B_2), la mejor opción de la Empresa B es elegir $(3^{x}, 9)$: $3 > 1$

Hoja nº ....

Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....

Empresa 1

		(A_1, A_2)	(A_1, B_2)	(B_1, A_2)	(B_1, B_2)
Empresa 2	C	$(6^x, 4)$	$(6^x, 4)$	$(1^x, 1)$	$(1, 1)$
	D	$(0, 0)$	$(3, 9)$	$(0, 0)$	$(3^x, 9)$

Empresa A: Sí la Empresa B elige C, la mejor opción de la Empresa 1 es elegir $(6, 4): \; 4 > 1$

Sí la Empresa B elige D, la mejor opción de la Empresa 1 es elegir $(3, 9): \; 9 > 0$

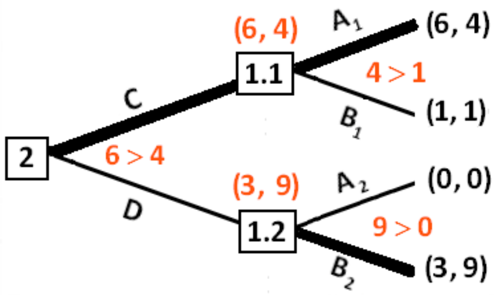
Empresa 1

		(A_1, A_2)	(A_1, B_2)	(B_1, A_2)	(B_1, B_2)
Empresa 2	C	$(6^x, 4^*)$	$(6^x, 4^*)$	$(1^x, 1)$	$(1, 1)$
	D	$(0, 0)$	$(3, 9^*)$	$(0, 0)$	$(3^x, 9^*)$

$$EN = \{(C,(A_1A_2)) \, , (C,(A_1B_2)) \, , (D,(B_1B_2))\}$$

Como el juego es con información completa los ENPS se pueden calcular por inducción hacia atrás:

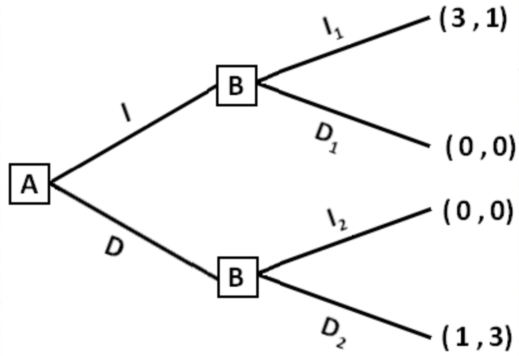
$$ENPS = \{(C,(A_1 , B_2))\}$$



En la figura adjunta se representa en forma extensiva los pagos de las empresas A y B

a) Calcular equilibrio de Nash en estrategias puras y equilibrio de Nash perfecto en subjuegos, si la empresa B elige sabiendo lo que ha hecho la empresa A.

b) Calcular equilibrio de Nash en estrategias puras y equilibrio de Nash perfecto en subjuegos, si la empresa B elige sin saber lo que ha hecho la empresa A.



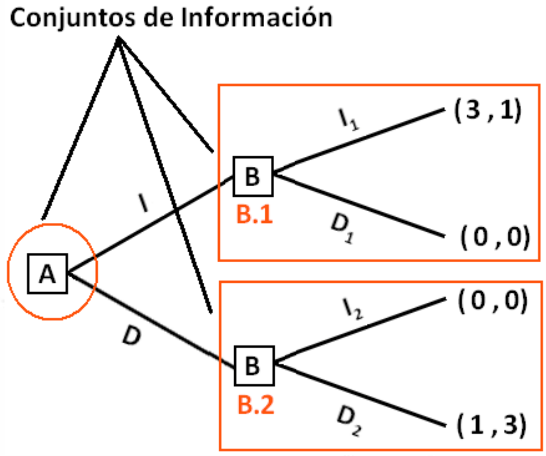
Solución:

La empresa A puede tomar dos acciones (I, D), tiene dos estrategias: I y D.

La empresa B tiene cuatro estrategias: (I_1, I_2), (I_1, D_2), (D_1, I_2), (D_1, D_2)

Hay tres conjuntos de información y tres subjuegos, el que comienza en el vértice A, el que comienza en el vértice B.1 y el que comienza en el vértice B.2.

El juego completo es a su vez un subjuego.



- Si la empresa B elige sabiendo lo que ha hecho la Empresa A se tiene un Juego Dinámico con Información Completa.

La forma normal es:

Empresa B

		(I_1, I_2)	(I_1, D_2)	(D_1, I_2)	(D_1, D_2)	
Empresa A	I	(3, 1)	(3, 1)	(0, 0)	(0, 0)	(a^*, b)
	D	(0, 0)	(1, 3)	(0, 0)	(1, 3)	(a, b^*)

Los equilibrios de Nash en estrategias puras son:

Empresa A:

Sí la empresa B elige (I_1, I_2), la mejor opción de la empresa A es elegir (3, 1): $3 > 0$

Sí la empresa B elige (I_1, D_2), la mejor opción de la empresa A es elegir (3, 1): $3 > 1$

Sí la empresa B elige (D_1, I_2), la mejor opción de la empresa A es elegir (0, 0)

Sí la empresa B elige (D_1, D_2) la mejor opción de la empresa A es elegir (1, 3): $1 > 0$

Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....

Empresa B

Empresa A		(I_1, I_2)	(I_1, D_2)	(D_1, I_2)	(D_1, D_2)
	I	$(\bar{3}, 1)$	$(\bar{3}, 1)$	$(\bar{0}, 0)$	$(0, 0)$
	D	$(0, 0)$	$(1, 3)$	$(\bar{0}, 0)$	$(\bar{1}, 3)$

Empresa B: Sí la empresa A elige I, la mejor opción de la empresa B es elegir $(3, 1): \ 1 > 0$ Sí la empresa A elige D, la mejor opción de la empresa B es elegir $(1, 3): \ 3 > 0$

Empresa B

Empresa A		(I_1, I_2)	(I_1, D_2)	(D_1, I_2)	(D_1, D_2)
	I	$(\bar{3}, \underline{1})$	$(\bar{3}, \underline{1})$	$(\bar{0}, 0)$	$(0, 0)$
	D	$(0, 0)$	$(1, \underline{3})$	$(\bar{0}, 0)$	$(\bar{1}, \underline{3})$

Los equilibrios de Nash: $EN = \{(I, (I_1, I_2)), (I, (I_1, D_2)), (D, (D_1, D_2))\}$

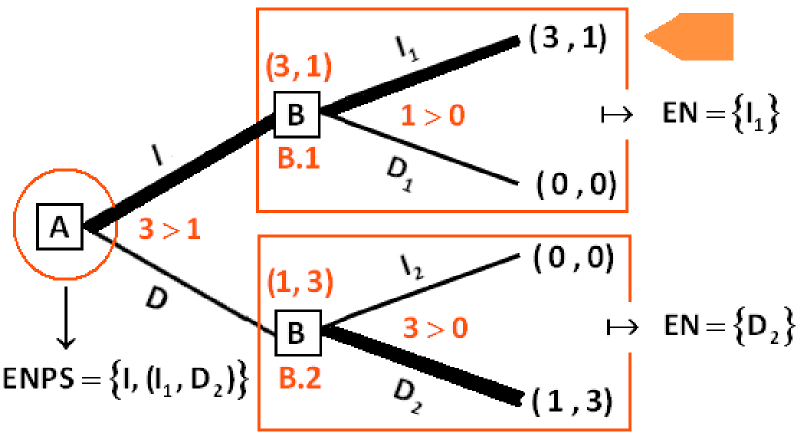
Al ser un juego dinámico con información completa el equilibrio de Nash perfecto en subjuegos (ENPS) se pueden calcular por inducción hacia atrás.

Hay dos formas de buscar los ENPS:

- Ver cuáles de los EN satisfacen la definición de ENPS
- Construir directamente los ENPS, comenzando por los subjuegos que no incluyen otros subjuegos.

En juegos con información completa, la inducción hacia átras y el ENPS seleccionan los mismos equilibrios.

$ENPS = \{I, (I_1, D_2)\}$



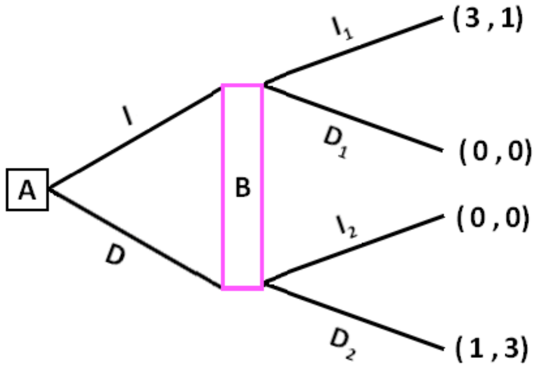
De los tres equilibrios de Nash en estrategias puras, solo uno es ENPS. Esta inconsistencia temporal observada es lo que se intenta evitar con el equilibrio perfecto en subjuegos.

- Si la empresa B elige sin saber lo que ha hecho la empresa A se tiene un Juego Dinámico con Información Incompleta.

Se elige siempre la misma acción en todos los vértices de un mismo conjunto de información.

Estrategias de la empresa A: $\{I, D\}$

Estrategias de la empresa B: $\{I_1, D_1\}$

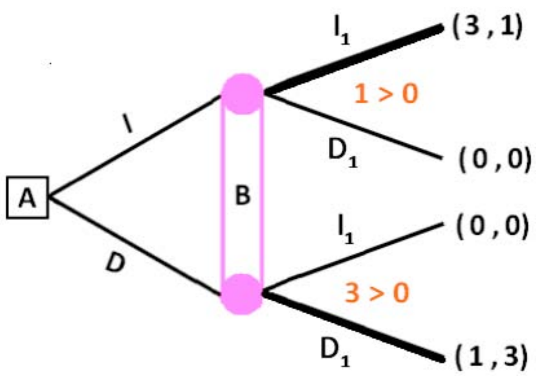


Lo primero que hay que resolver es el problema de la empresa A.
A su vez, la empresa A no puede establecer cuál es su mejor acción hasta no saber que hará la empresa B.

Hay un solo subjuego, el que comienza con la empresa A.
Sí se considera cualquier otro vértice como inicial de otro subjuego se rompería el conjunto de información de la empresa B.

Como el único subjuego es el juego original, los equilibrios perfectos en subjuegos en estrategias puras (ENPS) son los equilibrios de Nash en estrategias puras (EN):

$$ENPS = \{(I, I_1), (D, D_1)\}$$



La forma normal asociada:

		Empresa B	
		I_1	D_1
Empresa A	I	$(\overline{3}, \underline{1})$	(0, 0)
	D	(0, 0)	$(\overline{1}, \underline{3})$

$$EN = \{(I, I_1), (D, D_1)\}$$

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

(IMPRESO EN PAPEL RECICLADO) ÚNICAMENTE PARA USO ESCOLAR

JUEGOS DINÁMICOS CON INFORMACIÓN INCOMPLETA

Algún jugador desconoce la acción que ha tomado otro jugador, es decir, algún conjunto de información contiene más de un nodo de decisión.

El equilibrio de Nash perfecto en subjuegos (ENPS) se encuentra buscando los equilibrios de Nash de cada subjuego.

Cuando un jugador no sabe en cuál de sus vértices se encuentra se dice que los vértices pertenecen a un mismo conjunto de información (CI).

Un conjunto de información (CI) puede contener cualquier número de vértices.

Gráficamente se unen con líneas de puntos los vértices que pertenecen a un mismo conjunto de información.

En una situación de información incompleta no se puede condicionar la acción al vértice en que se encuentra, sino al conjunto de información.

La estrategia de un jugador es una acción para cada uno de sus conjuntos de información, es decir, se elige siempre la misma acción en todos los vertices de un *mismo* conjunto de información.

El número de ramas que parten de cada vértice de un determinado conjunto de información debe de ser el mismo. En caso de no ser así, el jugador adquiriría nueva información al contar las alternativas de que dispone.

No se puede utiizar siempre la inducción hacia atrás en un juego don información incompleta.

El concepto de equilibrio perfecto en subjuegos (ENPS) permite considerar los problemas de los jugadores simultáneamente y ofrecer una solución.

SUBJUEGO: La misma que con información completa, es decir, un subcojunto del juego original que siga teniendo una estructura de juego, incorporando dos condiciones:

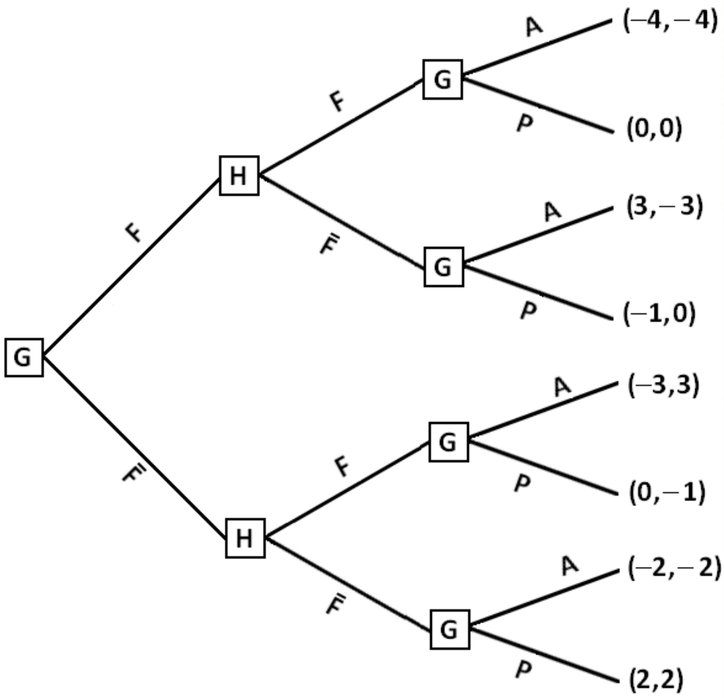
- El vértice inicial del subjuego debe de ser el único vértice de un conjunto de información.
- Si el subjuego contiene un vértice de un conjunto de información, debe contener también todos los demás vértices de ese mismo conjunto.

Intuitivamente estas condiciones significan que los subjuegos no pueden romper los conjuntos de información del juego original.

Dos empresas entran en una guerra de competencia, teniendo que decidir simultaneamente sí abren una franquicia en una capital de provincia (F) o no la abren ($\overline{F}$). Pasado un tiempo, la Empresa G observa si la Empresa H ha abierto una franquicia en una capital de provincia o no y debe decidir si asimilarlo (A) o abrir otra franquicia y entrar en una guerra de precios (P).

a) Especificar el conjunto de estrategias puras de cada jugador.

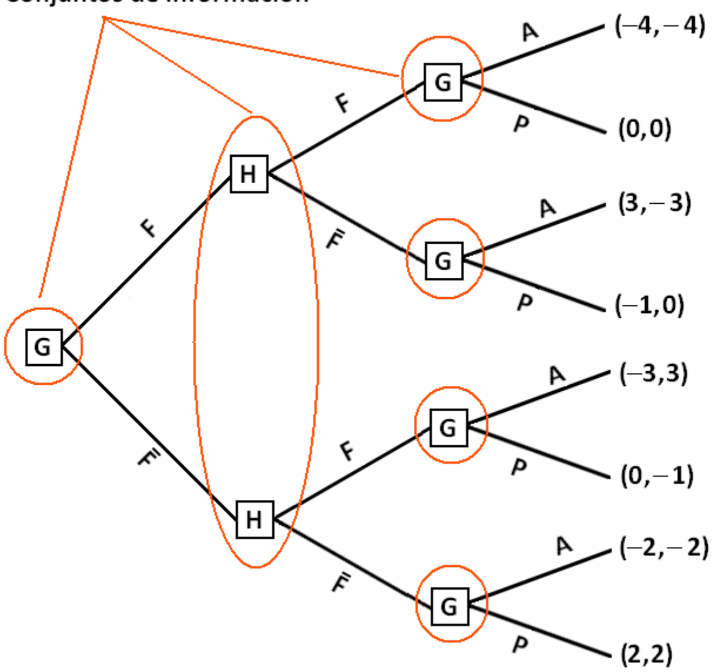
b) Calcular los equilibrios de Nash perfectos en subjuegos, la trayectoria y los pagos.



Solución:

a) La Empresa G tiene 5 conjuntos de información, en cada uno de estos conjuntos dispone de dos acciones. En consecuencia, la Empresa G tiene $2^5 = 32$ estrategias, sea, por ejemplo, FAPPA una de estas estrategias.

La empresa H tiene un solo conjunto de información, en cada conjunto dispone de acciones. Por tanto, la Empresa H tiene $2^1 = 2$ estrategias, esto es, $S_2 = \{F, \overline{F}\}$



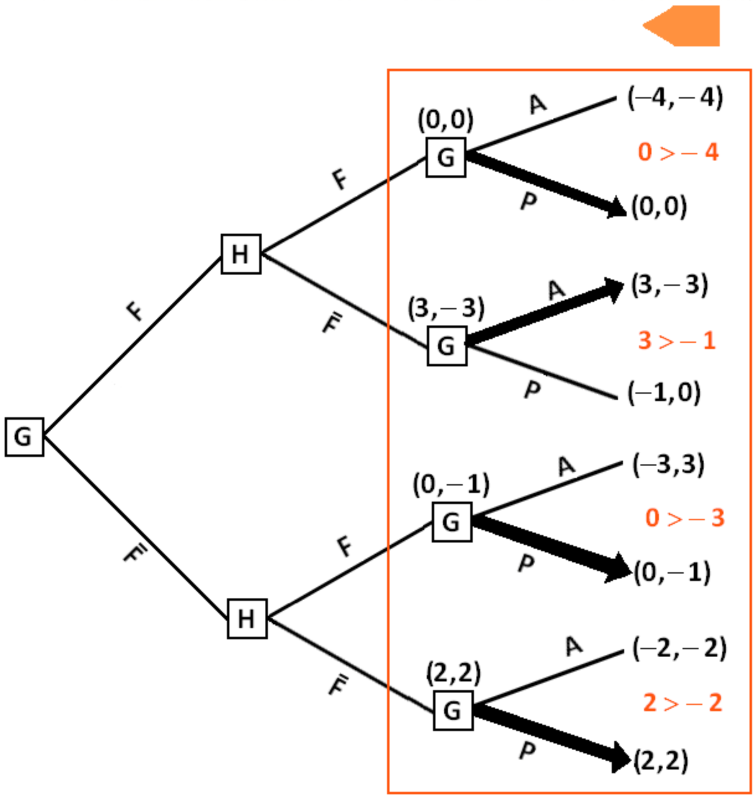
UAM UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....

b) La empresa G tiene más de un nodo de decisión, con lo que se trata de un juego con información incompleta, esto es, en algún nodo de decisión la Empresa G al tomar una decisión desconoce alguna alguna jugada anterior.



El equilibrio de Nash perfecto en subjuegos (ENPS) se encuentra buscando los equilibrios de Nash de cada subjuego.

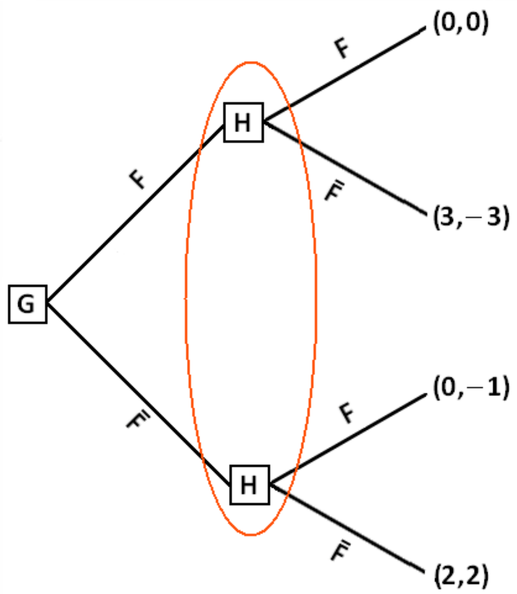
El árbol de decisión se resuelve de derecha a izquierda, con cuatro subjuegos que comienzan cada uno en un nodo de decisión de la Empresa G.

El concepto de equilibrio de Nash en cada uno de estos subjuegos se reduce a la acción óptima de la Empresa G.

Se sustituyen los cuatro subjuegos por los pagos correspondientes a los equilibrios encontrados.

El resultado es el juego estático representado en el árbol de decisión de la derecha.

Para hallar los equilibrios de Nash de este juego reducido (ENPS) solamente se miran los equilibrios en estrategias puras.

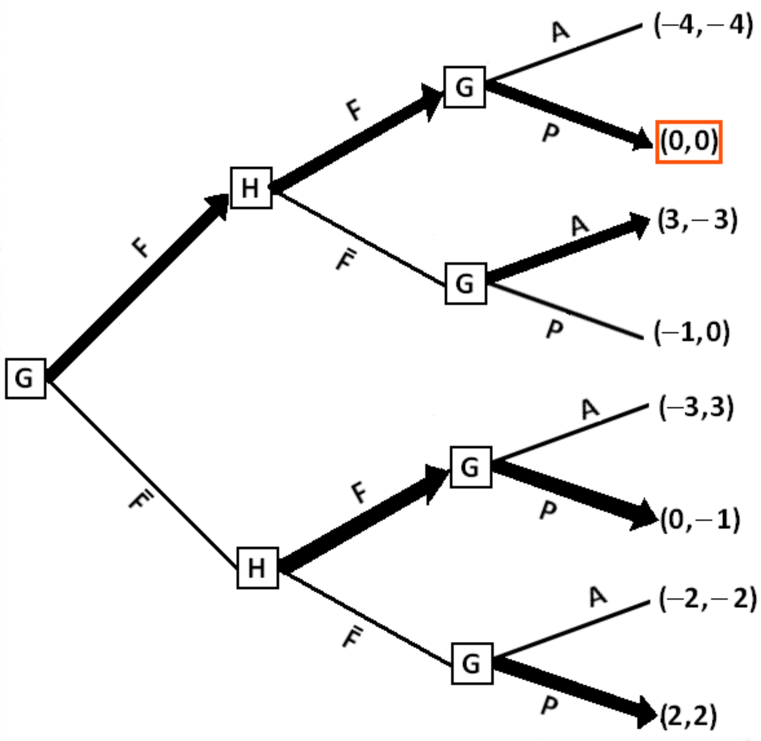


La tabla de pagos es:

		Empresa H	
		Abrir franquicia $\equiv$ F	No Abrir franquicia $\equiv \overline{F}$
Empresa G	Abrir franquicia $\equiv$ F	$0^{x}, 0^{*}$	$3^{x}, -3$
	No Abrir franquicia $\equiv \overline{F}$	$0^{x}, -1$	$2, 2^{*}$

El único equilibrio de Nash del juego reducido es (Abrir franquicia, Abrir franquicia) ≡ (F, F)

Incorporando todos los equilibrios de los subjuegos:



El único equilibrio de Nash ENPS en estrategias puras viene dado por (FPAPP, F)

La trayectoria correspondiente es el conjunto de decisiones que se efectuan si se juega este equilibrio: F – F – P

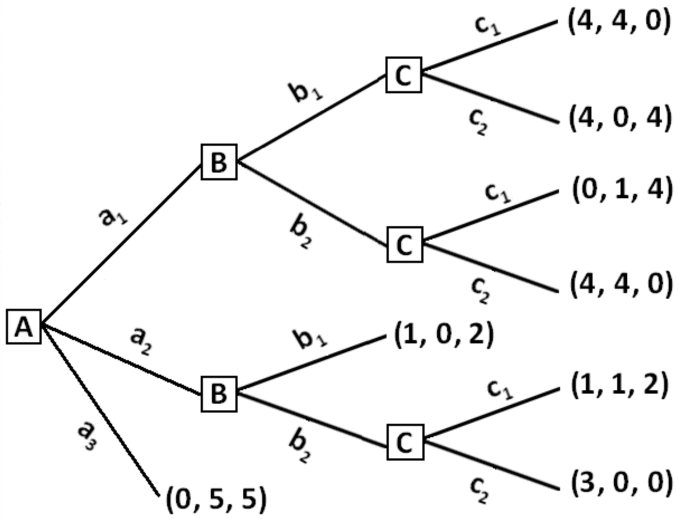
Los pagos resultantes son (0, 0)

Se representan de forma extensiva y con información completa los pagos de tres empresas A, B y C, respectivamente. Determinar el perfil estratégico, la trayectoria y los pagos de todos los equilibrios de Nash perfectos en subjuegos en estrategias puras, en los siguientes casos:

a) Cuando el juego es de información completa y todas las empresas pueden observar las acciones previas de las demás.

b) Cuando la empresa B es la única que no puede observar las acciones de las otras dos empresas.

c) Cuando las acciones de la empresa A son observadas por las empresas B y C, y la empresa C no puede observar las acciones de la empresa B.



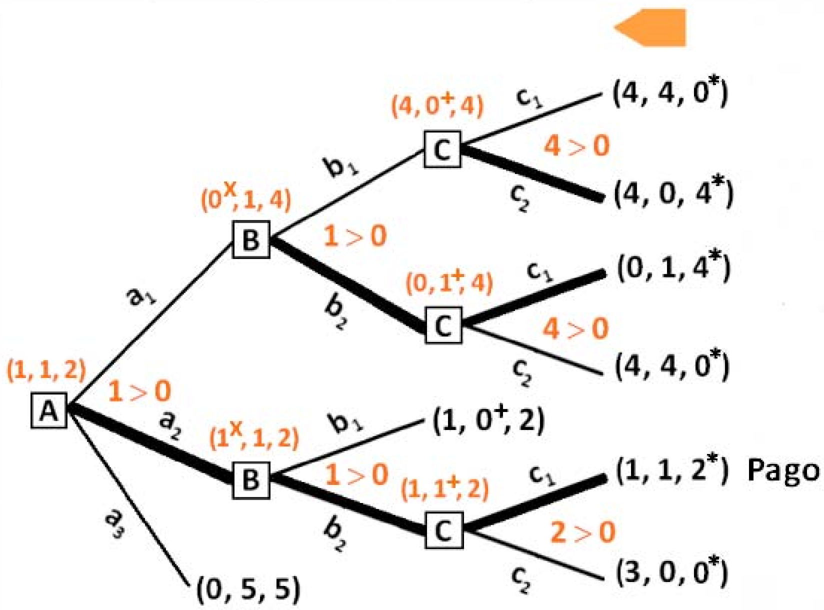
Solución:

a) En cada nodo de decisión la empresa a la que corresponde escoger una acción conoce las jugadas anteriores (información completa). En consecuencia, el equilibrio de Nash perfecto en subjuegos (ENPS) es el equilibrio que se obtiene por inducción hacia atrás.

$$\text{ENPS} = \{(a_2, (b_2, b_2), (c_2, c_1, c_1)\}$$

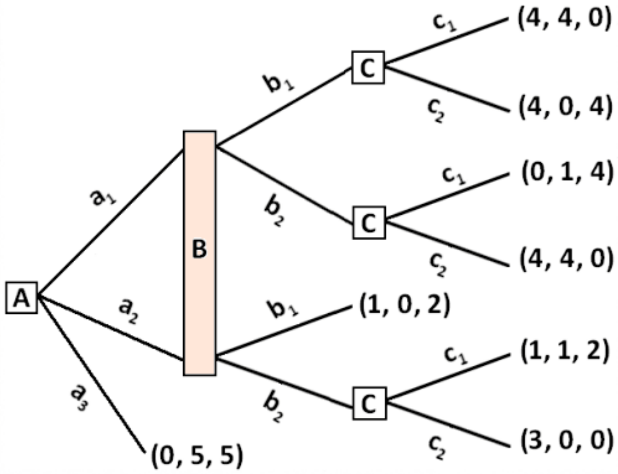
Trayectoria: $a_2 - b_2 - c_1$

Pagos correspondientes: (1, 1, 2)



b) Como la empresa B no puede observar la acción elegida por la empresa A, los nodos de decisión de la empresa B forman un solo conjunto de información, es decir, los nodos de decisión de la empresa B estarán conectados.

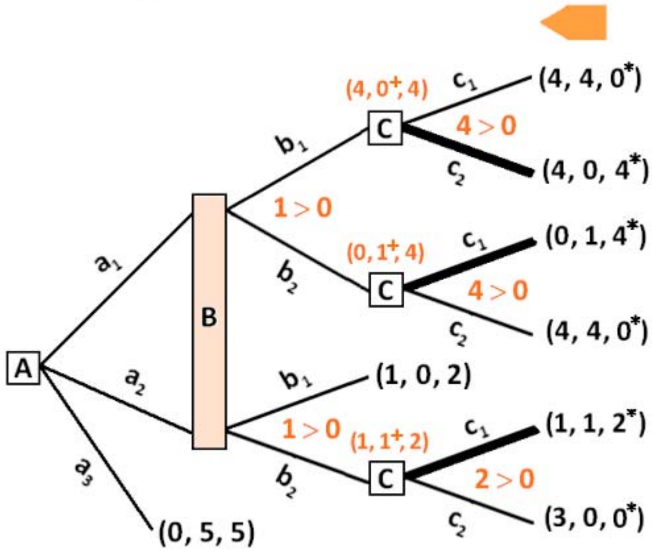
Para calcular los equilibrios de Nash perfectos en subjuegos (ENPS) se comienza de nuevo hacia atrás.

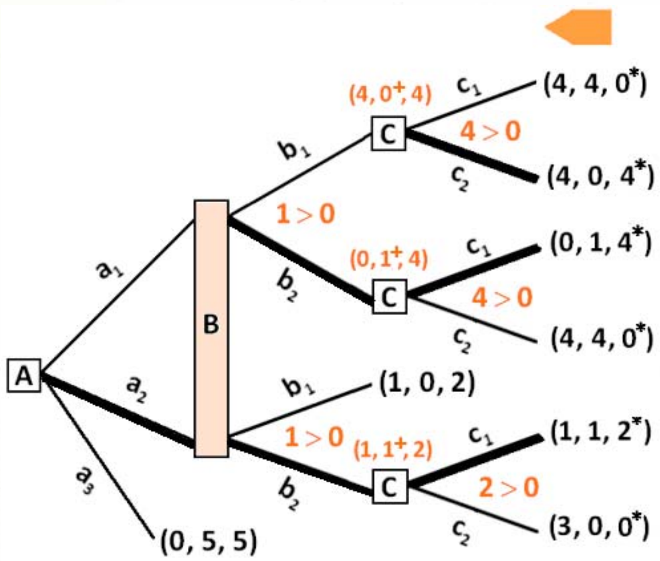


En esta situación se trata de juego con información incompleta: La empresa B tiene un conjunto de información con dos nodos de decisión.

Lo ideal sería indicar la mejor acción de la empresa B. Sin embargo, la empresa B no sabe 'dónde se encuentra'.

La nueva situación, en este caso, no supone ningún problema, la empresa B esté donde esté, deberá elegir la acción b_2 en ambos nodos.





La empresa A escogerá la acción a_2

$$ENPS = \{(a_2, b_2, (c_2, c_1, c_1)\}$$

Trayectoria: $a_2 - b_2 - c_1$

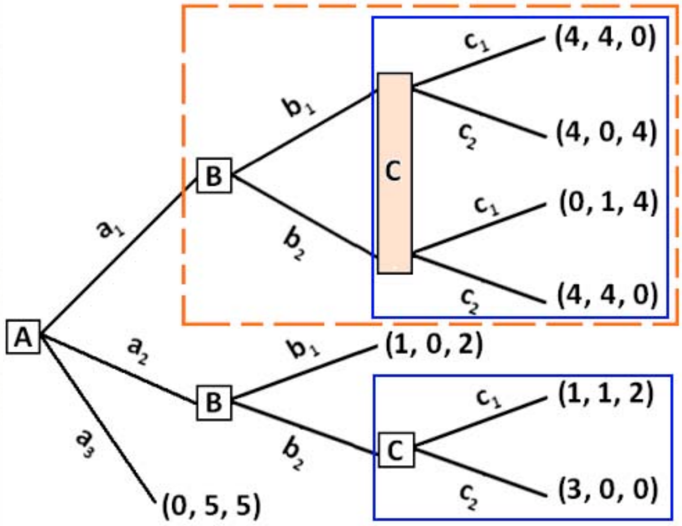
Pagos correspondientes: (1, 1, 2)

Señalar que con información incompleta la estrategia de la empresa B es b_2, con información completa es (b_2, b_2)

c) Las acciones de la empresa A se observan por las empresas B y C. Sin embargo, la empresa C no puede observar las acciones de la empresa B.

En consecuencia, los dos nodos superiores de la empresa C forman un solo conjunto de información.

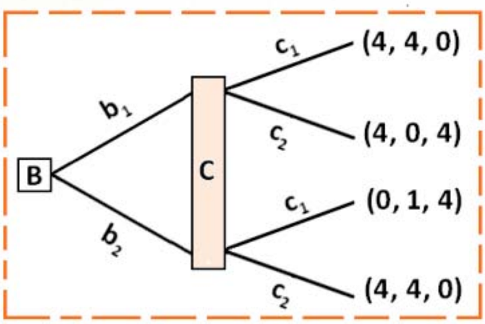
No se pueden conectar los tres nodos de la empresa C porque de hacerlo la empresa C tanpoco podría observar la acción elegida por la empresa A.



La empresa C tiene un conjunto de información con dos nodos de decisión, es un juego de información incompleta.

Para calcular los equilibrios de Nash perfectos en subjuegos (ENPS) se comienza de nuevo hacia atrás, indicando las mejores acciones de la empresa C.

No se puede indicar la mejor acción de la empresa C porque no sabe 'dónde se encuentra' y constituye un problema. Por un lado, elige c_2 en el nodo de arriba con un pago de $(4, 0, 4)$ y c_1 en el nodo de abajo con un pago de $(1, 1, 2)$.
Tiene que elegir la misma acción en ambos nodos, pero ¿qué acción?.



Se comienza en el nodo de arriba. En este juego estático hay dos empresas B y C, la tabla de pagos será:

Empresa C

Empresa B		c_1	c_2
	b_1	$(4^{\times}, 0)$	$(0, 4^{*})$
	b_2	$(1, 4^{*})$	$(4^{\times}, 0)$

El juego estático no tiene equilibrios de Nash (EN) en estrategias puras. En consecuencia, tampoco hay equilibrios de Nash perfectos en subjuegos en estrategias puras (ENPS).

TEORÍA DE JUEGOS EN ESTATEGIAS MIXTAS

Mientras que en las *estrategias puras* cada jugador emprende una estrategia determinada.
En las estrategias mixtas los jugadores eligen aleatoriamente entre dos o más opciones posibles, según un conjunto de probabilidades elegidas.
En otras palabras, mientras una estrategia pura no involucra al azar; una estrategia mixta si involucra al azar

Las estrategias puras son un caso particular de estrategias mixtas, eligiendo probabilidades igual a 1 o a 0. Es decir, una estrategia pura se puede considerar como una estrategia mixta degenerada que asigna toda la probabilidad a una de las alternativas.

La estrategia mixta del jugador i es una distribución de probabilidad definida sobre las estrategias puras de este jugador S_i

Todo equilibrio de Nash en estrategias puras es también un equilibrio de Nash en estrategias mixtas.
Las estrategias puras que forman parte de una estrategia mixta deben tener la misma ganancia esperada.

Si un jugador encuentra una estrategia pura en equilibrio, la mejor respuesta del otro jugador sería otra estrategia pura. Cuando esto no sucede, en equilibrio ambos jugadores deberán usar estrategias mixtas. Todo juego en estrategias mixtas tiene un equilibrio de Nash.

Cuando en una competencia en precios se juega un equilibrio en estrategias mixtas, los precios observados forman un ciclo.

Una politica de promociones involucra estrategias mixtas. Una estrategia que elige lanzar promociones solo algunas veces es mejor que cobrar precios bajos cada día (Sears, 1990)

La oportunidad de un mercado asimétrico tiene equilibrios asimétricos en estrategias puras y un equilibrio asimétrico en estrategias mixtas.
El más eficiente de estos equilibrios es el equilibrio en estrategias puras en el que la empresa más eficiente entra en el mercado.

UAM UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

La Policia de una ciudad solo cuenta con recursos para vigilar una zona con venta ambulante entre dos zonas tradicionales. Los Manteros de éstas zonas, a su vez, se han organizado para operar en una sola zona.
La matriz que se adjunta representa las utilidades asociadas a las diferentes combinaciones de Policias y Manteros.

		Manteros: Trabajar zona A	Manteros: Trabajar zona B
Policias	Patrullar zona A	$1\,,-1$	$-1\,,1$
	Patrullar zona B	$-1\,,1$	$1\,,-1$

Analizar el equilibrio de Nash y el resultado de la vigilancia

Solución:

- No existen equilibrios de Nash en estrategias puras porque al menos uno de los participantes (Policias o Manteros) tiene incentivo para cambiar de estrategia, dado lo que hace el otro e independientemente de su posición.
Sea cual sea el desarrollo, un participante que pierde siempre tiene una estrategia que le hubiera dado una mayor ganancia dada la elección del otro participante.

Por ejemplo: Si los Manteros están operando en la zona B, mientras la Policia vigila la zona A, los Policias tienen incentivos para vigilar la zona B. En esta situación, los Manteros prefieren cambiarse de zona, y así sucesivamente.

La Función de reacción o de Mejor Respuesta ($\text{BR} \equiv \text{Best Response}$) de un participante es la mejor respuesta (estrategia) que éste puede tomar con respecto a las estrategias adoptadas por los demás participantes.

$$\text{BR}_{\text{Policias}}(\text{Manteros}) = \begin{cases} \text{Zona A} & \text{si Manteros trabajan en zona A} \\ \text{Zona B} & \text{si Manteros trabajan en zona B} \end{cases}$$

$$\text{BR}_{\text{Manteros}}(\text{Policias}) = \begin{cases} \text{Zona A} & \text{si Policias trabajan en zona B} \\ \text{Zona B} & \text{si Policias trabajan en zona A} \end{cases}$$

- Existe equilibrio de Nash en estrategias mixtas, que los Policias elijan con probabilidad $1/2$ Trabajar en la zona A, y $1/2$ en la zona B, al igual que los Manteros. En este caso, el beneficio esperado para ambos es cero en el equilibrio.
Se supone (como siempre) que ambos participantes conocen los pagos del otro.

Ambos participantes (Policias y Manteros) jugarán las estrategias con ciertas probabilidades, de la forma:

		Manteros	
		Trabajar zona A $\equiv q$	Trabajar zona B $\equiv (1-q)$
Policias	Patrullar zona A $\equiv p$	$1\,,\,-1$	$-1\,,\,1$
	Patrullar zona B $\equiv (1-p)$	$-1\,,\,1$	$1\,,\,-1$

Si se comienza en lugar de la Policia, su ganancia esperada si elige una estrategia mixta $\sigma_{Policia} = (p\,,1-p)$, cuando el Mantero elija a su vez una mixta cualquiera $\sigma_{Manteros} = (q\,,1-q)$ vendrá dado por las Utilidades esperadas:

$$E\left[U_{Policias}(p,q)\right] = 1.p.q + (-1).p.\,(1-q) + (-1).(1-p).q + 1.(1-p).(1-q) = 4pq - 2p - 2q + 1$$

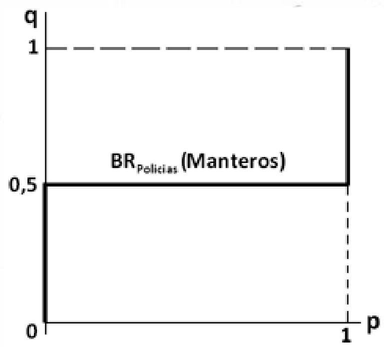
$$E\left[U_{Manteros}(p,q)\right] = (-1).p.q + 1.p.\,(1-q) + 1.(1-p).q + (-1).(1-p).(1-q) = -4pq + 2p + 2q - 1$$

- Utilidad esperada o pago de la Policia:

$$\frac{\vartheta E\left[U_{Policias}(p,q)\right]}{\vartheta p} = \frac{\vartheta(4pq - 2p - 2q + 1)}{\vartheta p} = 4q - 2 \equiv \begin{cases} < 0 & q < 0{,}5 \\ = 0 & q = 0{,}5 \\ > 0 & q > 0{,}5 \end{cases}$$

Denotando por $BR_{Policia}$ la mejor respuesta de la Policia, ésta adopta la forma:

$$BR_{Policias}(q) = \begin{cases} p = 0 & q < 0{,}5 \\ p \in [0,1] & q = 0{,}5 \\ p = 1 & q > 0{,}5 \end{cases}$$

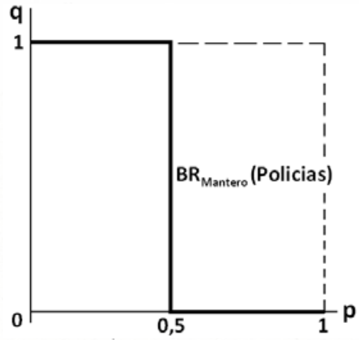


- Utilidad esperada o pago de los Manteros:

$$\frac{\vartheta E\left[U_{Manteros}(p,q)\right]}{\vartheta q} = \frac{\vartheta(-4pq + 2p + 2q - 1)}{\vartheta q} = -4p + 2 \equiv \begin{cases} < 0 & p > 0{,}5 \\ = 0 & p = 0{,}5 \\ > 0 & p < 0{,}5 \end{cases}$$

Denotando por $BR_{Mantero}$ la mejor respuesta de los Manteros, ésta adopta la forma:

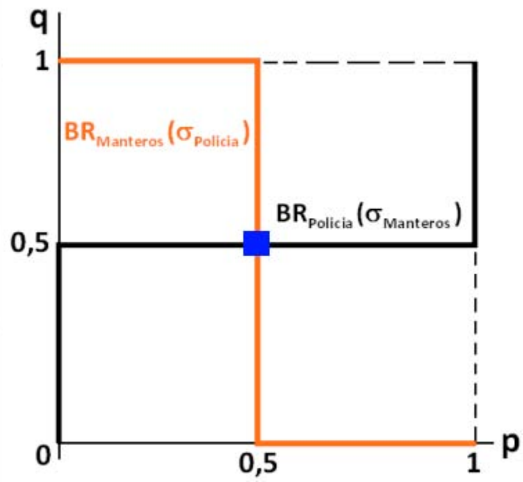
$$BR_{Mantero}(Policias) = BR_{Mantero}(p) = \begin{cases} q = 0 & p > 0,5 \\ q \in [0,1] & p = 0,5 \\ q = 1 & p < 0,5 \end{cases}$$



Mejor Respuesta de Policias y Manteros $(BR \equiv \text{Best Response})$, donde la decisión se encuentra entre los valores de $p \; (0 \leq p \leq 1)$ y $q \; (0 \leq q \leq 1)$

$$BR_{Policias}(q) = \begin{cases} p = 0 & q < 0,5 \\ p \in [0,1] & q = 0,5 \\ p = 1 & q > 0,5 \end{cases} \qquad BR_{Mantero}(p) = \begin{cases} q = 0 & p > 0,5 \\ q \in [0,1] & p = 0,5 \\ q = 1 & p < 0,5 \end{cases}$$

Equilibrio de Nash en estrategias mixtas



El Equilibrio de Nash se encuentra en la intersección: $EN = \{(0,5\;,\;0,5)\}$

Los participantes se comportan de manera impredecible, asignando la misma probabilidad a cada una de sus estrategias puras.

En una carrera mortal dos pilotos conducen su vehículo a toda velocidad hacia un acantilado, el primero que salta de su coche pierde. Se supone que los dos prefieren ser el último en saltar, pero también saltar antes que no saltar para evitar despeñarse.

El juego en forma estratégica se representa:

		P2: U2 ≡ Saltar el último	P2: P2 ≡ Saltar el primero
P1	U1 ≡ Saltar el último	0, 0	3, 1
P1	P1 ≡ Saltar el primero	1, 3	2, 2

Calcular los equilibrios de Nash en estrategias puras y mixtas. Interpretación intuitiva del equilibrio en estrategias mixtas.

Solución:

En estrategias puras los Equilibrios de Nash son: $EN = \{(U1,P2),(P1,U2)\}$

Sea $(p\,,1-p)$ la estrategia del piloto P1 y $(q\,,1-q)$ la estrategia del piloto P2. Para calcular las probabilidades:

			P2: q U2 ≡ Saltar el último	P2: 1 − q P2 ≡ Saltar el primero
P1	p	U1 ≡ Saltar el último	0, 0	3, 1
P1	1 − p	P1 ≡ Saltar el primero	1, 3	2, 2

Utilidad esperada o pago del piloto P1:

$$E\left[U_{P1}\right] = 0\,.\,p.\,q\,+\,3.\,\,p.\,(1-q)\,+\,1\,.\,(1-p).\,q\,+\,2\,.\,(1-p).\,(1-q) = -2pq\,+\,p\,-\,q\,+\,2$$

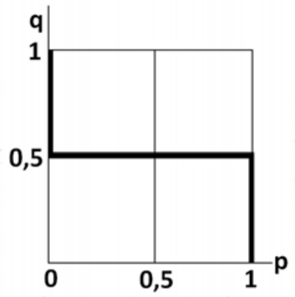
La elección de una estrategia mixta del piloto P1 queda totalmente determinada por el valor que se asigne a p, planteando un problema de elección en término de dicho valor.

Derivando parcialmente respecto a p se puede analizar la influencia sobre la utilidad esperada del piloto P1

$$\frac{\vartheta E[U_{P1}]}{\vartheta p} = \frac{\vartheta(-2pq\,+\,p\,-\,q\,+\,2)}{\vartheta p} = -2q + 1 \equiv \begin{cases} <0 & q > 0{,}5 \\ =0 & q = 0{,}5 \\ >0 & q < 0{,}5 \end{cases}$$

Denotando por BR_{P1} la Mejor Respuesta del piloto P1, ésta adopta la forma:

$$BR_{P1}(q) = \begin{cases} p = 0 & q > 0,5 \\ p \in [0,1] & q = 0,5 \\ p = 1 & q < 0,5 \end{cases}$$



- Utilidad esperada o pago del piloto P2:

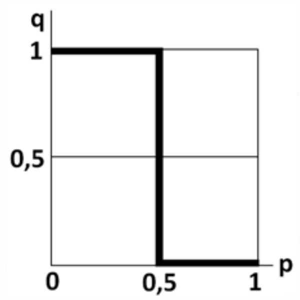
$$E[U_{P2}] = 0\,.\,pq + 1\,.\,p(1-q) + 3\,.\,(1-p)q + 2\,.\,(1-p)(1-q) = -2pq - p + q - 2$$

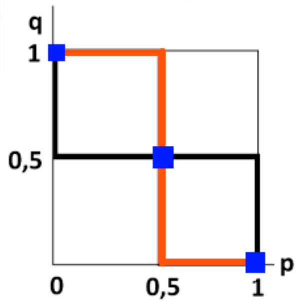
La elección de una estrategia mixta del piloto P2 queda totalmente determinada por el valor que se asigne a q. Derivando parcialmente respecto a q se puede analizar la influencia sobre la utilidad esperada del piloto P2

$$\frac{\vartheta E[U_{P2}]}{\vartheta q} = \frac{\vartheta(-2pq - p + q - 2)}{\vartheta q} = -2p + 1 \equiv \begin{cases} < 0 & p > 0,5 \\ = 0 & p = 0,5 \\ > 0 & p < 0,5 \end{cases}$$

Denotando por BR_{P2} la Mejor Respuesta del piloto P2, ésta adopta la forma:

$$BR_{P2}(p) = \begin{cases} q = 0 & p > 0,5 \\ q \in [0,1] & p = 0,5 \\ q = 1 & p < 0,5 \end{cases}$$





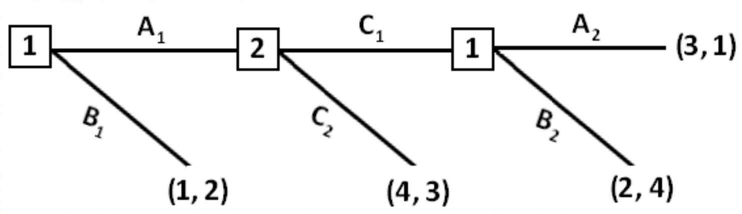
La solución se encuentra en las tres intersecciones:

$$EN = \left\{ (0,1)\,,\, \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),\, (1,0) \right\}$$

En la figura adjunta se representa en forma extensiva los pagos de las Empresas 1 y 2

Se pide:

a) Estrategias de cada Empresa. Trayectoria. Equilibrio de Nash perfecto en subjuegos.

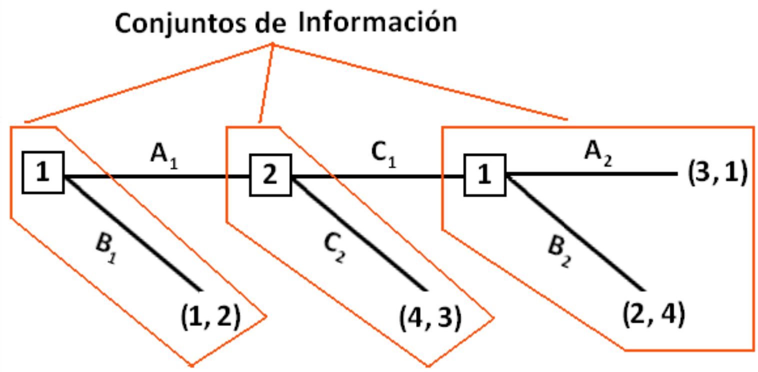


b) Representar el juego en su forma normal. Equilibrios de Nash en estrategias puras y mixtas.

Solución:

a) La Empresa 1 tiene 2 conjuntos de información, con dos acciones en cada uno de estos conjuntos, por lo que dispone de cuatro estrategias:

$$S_1 = (A_1, B_1) \times (A_2, B_2) =$$
$$= \{A_1A_2\ ,\ A_1B_2\ ,\ B_1A_2\ ,\ B_1B_2\}$$



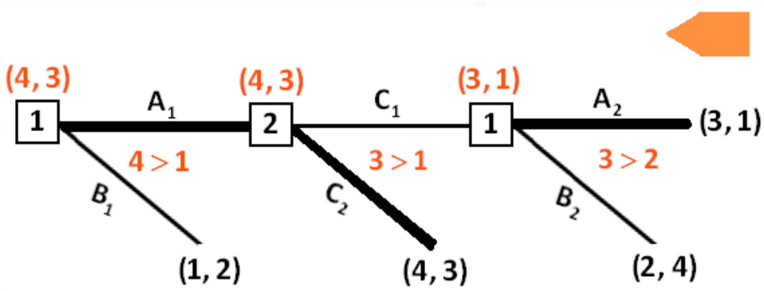
La Empresa 2 tiene 1 conjunto de información y dispone de dos acciones.
En consecuencia, tiene 2 estrategias $S_2 = \{C_1, C_2\}$

Hay información perfecta porque cada uno de los tres conjuntos de información dispone de un solo nodo de decisión, es decir, en cada nodo de decisión la Empresa que tiene que escoger una acción conoce las jugadas anteriores.

El equilibrio de Nash perfecto en subjuegos (ENPS) es el equilibrio por inducción hacia atrás.

$$ENPS = \{(A_1A_2, C_2)\}$$

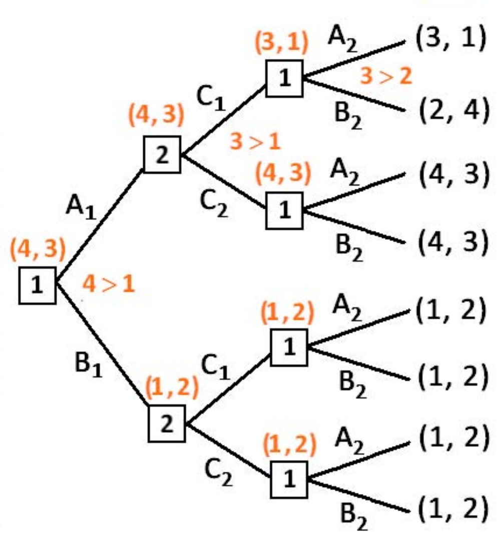
La trayectoria es $A_1 - C_2$ y los pagos corespondientes son $(4, 3)$



UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

Otra forma de representar el juego en forma extensiva.



b) El juego en forma estratégica o normal se representa:

Empresa 2

Empresa 1		C_1	C_2
	A_1A_2	(3, 1)	(4, 3)
	A_1B_2	(2, 4)	(4, 3)
	B_1A_2	(1, 2)	(1, 2)
	B_1B_2	(1, 2)	(1, 2)

La estrategia A_1A_2 domina a las estrategias B_1A_2 y B_1B_2 : $3>1\,,4>1$

La empresa 2 no utilizará en ningún equilibrio las estrategias B_1A_2 y B_1B_2

El juego se reduce a la matriz:

Estrategias puras

Empresa 2

Empresa 1		q	$1-q$
		C_1	C_2
	A_1A_2	$(3^{x},\ 1)$	$(4^{x},\ 3^{*})$
	A_1B_2	$(2,\ 4^{*})$	$(4^{x},\ 3)$

Estrategias mixtas

Empresa 2

		q	$1-q$
		C_1	C_2
p	A_1A_2	(3, 1)	(4, 3)
$1-p$	A_1B_2	(2, 4)	(4, 3)

- En estrategias puras hay un solo equilibrio de Nash: $EN=\{(A_1A_2\,,C_2)\}$
- Para calcular los equilibrios de Nah en estrategias mixtas se necesitan calular las utilidades esperadas de las dos empresas.

(IMPRESO EN PAPEL RECICLADO) UNICAMENTE PARA USO ESCOLAR

Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....

Sea $(p\,,1-p)$ la estrategia de la Empresa 1 y $(q\,,1-q)$ la estrategia de la Empresa 2.

Para calcular las probabilidades:

- Utilidad esperada de la Empresa 1:

$$E\left[U_1\right] = 3.p.q \;+\; 4.p.(1-q) \;+\; 2.(1-p).\,q \;+\; 4.(1-p).(1-q) = pq\; - 2q + 4$$

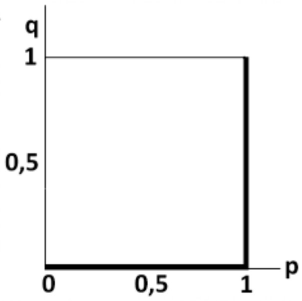
La elección de una estrategia mixta de la empresa 1 queda totalmente determinada por el valor que se asigne a p, planteando un problema de elección en término de dicho valor.

Derivando parcialmente respecto a p se puede analizar la influencia sobre la Utilidad esperada de la empresa A

$$\frac{\vartheta E\left[U_1\right]}{\vartheta p} = \frac{\vartheta (pq\; - 2q + 4)}{\vartheta p} = q \equiv \begin{cases} < 0 & q < 0 \\ = 0 & q = 0 \\ > 0 & q > 0 \end{cases}$$

Denotando por BR_1 la Mejor Respuesta de la Empresa 1, ésta tiene la forma:

$$BR_1(q) = \begin{cases} p \in \left[0{,}1\right] & q = 0 \\ p = 1 & q > 0 \end{cases}$$



Para cualquier estrategia mixta de la Empresa 2, la mejor respuesta de la Empresa 1 es A_1A_2 $(p = 1)$, excepto si $q = 0$ que entonces cualquier estrategia $p \in [0,\,1)$ es la mejor respuesta.

- Utilidad esperada de la Empresa 2:

$$E\left[U_2\right] = 1.p.q \;+\; 3.p.\,(1-q) \;+\; 4.\;(1-p).\,q \;+\; 3.(1-p).\,(1-q) = -3pq \;+\; q + 3$$

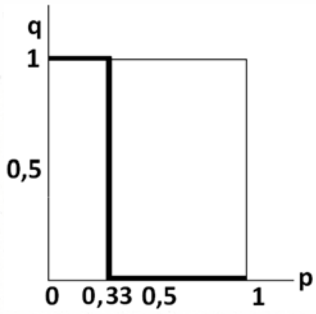
La elección de una estrategia mixta de la Empresa 2 queda totalmente determinada por el valor que se asigne a q, planteando un problema de elección en término de dicho valor.

Derivando parcialmente respecto a q se puede analizar la influencia sobre la utilidad esperada de la Empresa 2

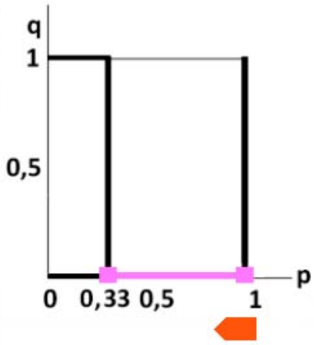
$$\frac{\vartheta E\left[U_2\right]}{\vartheta q} = \frac{\vartheta(-3pq \;+\; q + 3)}{\vartheta q} = -3p + 1 \equiv \begin{cases} < 0 & p > 0{,}33 \\ = 0 & p = 0{,}33 \\ > 0 & p < 0{,}33 \end{cases}$$

Denotando por BR_2 la Mejor Respuesta de la empresa 2, ésta tiene la forma:

$$BR_2(p) = \begin{cases} q = 0 & p > 0,33 \\ q \in [0,1] & p = 0,33 \\ q = 1 & p < 0,33 \end{cases}$$



Cuando $p = 0,33$ a la Empresa 1 le es indiferente tomar cualquier acción.



La solución se encuentra en la intersección, el conjunto $\{(p, 0) \,/\, 0,33 \leq p \leq 1\}$

En consecuencia, $EN = \{(p, 0) \,/\, 0,33 \leq p \leq 1\}$

Los equilibrios de Nash perfectos en subjuegos (ENPS) son casos especiales de equilibrios de Nash (EN). En este caso, $ENPS = (1, 0)$

La empresa A amenaza con entrar en un mercado dominado por la empresa monopolista B. Si la empresa A decide entrar, la empresa B puede repartirse el mercado o iniciar una campaña en contra. Se supone que los beneficios asociados a las estrategias de las empresas son:

→ Si la empresa A no entra en el mercado, los beneficios serán $(\pi_A, \pi_B) = (0, 2)$

→ Si la empresa A entra en el mercado y la empresa B realiza un ataque, los beneficios son $(\pi_A, \pi_B) = (-3, -1)$

→ Si la empresa A entra en el mercado y la empresa B se reparte el mercado (coopera), los beneficios serán $(\pi_A, \pi_B) = (2, 1)$

Se pide:

a) Plantear la situación en forma extensiva y forma normal

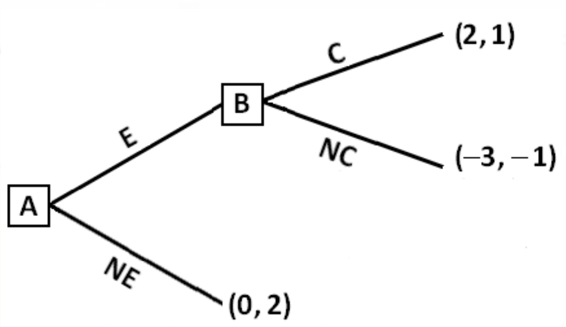
b) Hallar los equilibrios de Nash perfectos en subjuegos en estrategias puras

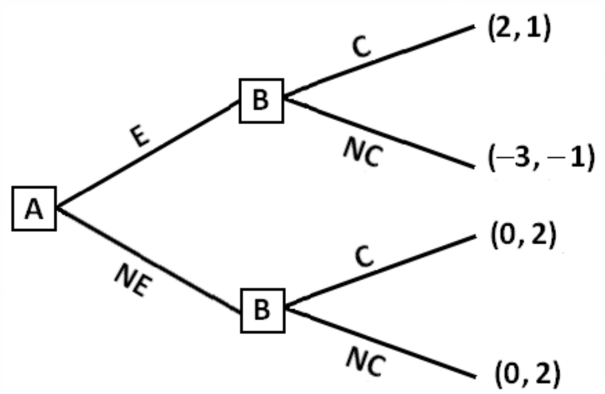
c) Hallar los equilibrios de Nash en estrategias puras. ¿Hay alguna amenaza no creíble en alguno de los equilibrios de Nash?

d) Hallar los equilibrios de Nash en estrategias mixtas

Solución:

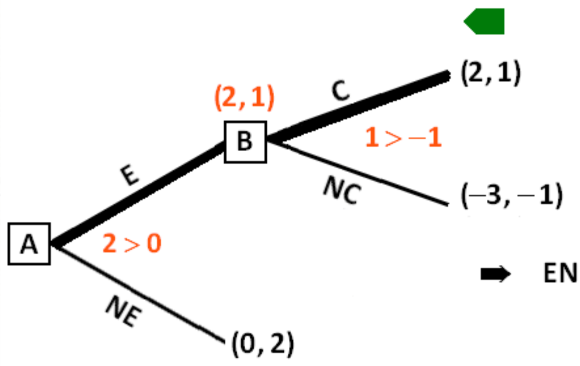
a) El juego en su forma extensiva:





		Empresa B	
		NC	C
Empresa A	NE	(0, 2)	(0, 2)
	E	(−3, −1)	(2, 1)

b) Como cada conjunto de información contiene un único nodo de decisión se trata de un juego con información completa, con lo que se pueden hallar los ENPS por inducción hacia atrás.



La única acción óptima de la empresa A es (E, C)

➡ ENPS = (E, C)

c) Los equilibrios de Nash en estrategias puras

		Empresa B	
		NC	C
Empresa A	NE	$(0^{x}, 2^{*})$	$(0, 2^{*})$
	E	$(-3, -1)$	$(2^{x}, 1^{*})$

Los equilibrios de Nash en estrategias puras han sido subrayados:

$\text{EN} = \{(\text{NE}, \text{NC}), (\text{E}, \text{C})\}$

- La definición de ENPS garantiza que no habrá amenazas no creíbles en el equilibrio (E, C) .
- En el otro equilibrio, (NE, NC) hay una amenaza no creíble: La empresa B no decidará por no cooperar (NC) si la empresa A decide entrar.

La única acción racional es cooperar que da lugar a un pago de 1 a la empresa B, frente a un pago de −1 si no coopera.

d) Sea $(p, 1-p)$ la estrategia de la empresa A y $(q, 1-q)$ la estrategia de la empresa B.

Para calcular las probabilidades:

			Empresa B	
			q	$1-q$
			NC	C
Empresa A	p	NE	(0, 2)	(0, 2)
	$1-p$	E	$(-3, -1)$	(2, 1)

- Utilidad esperada de la empresa A:

$$E\left[U_A\right] = 0\,.\,p\,.\,q + 0\,.\,p\,.\,(1-q) + (-3)\,.\,(1-p)\,.\,q + 2\,.\,(1-p)\,.\,(1-q) = 5pq - 2p - 5q + 2$$

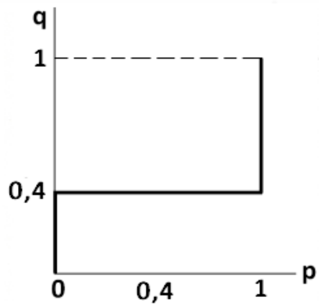
La elección de una estrategia mixta de la empresa A queda totalmente determinada por el valor que se asigne a p, planteando un problema de elección en término de dicho valor.

Derivando parcialmente respecto a p se puede analizar la influencia sobre la utilidad esperada de la empresa A

$$\frac{\vartheta E\left[U_A\right]}{\vartheta p} = \frac{\vartheta(5pq - 2p - 5q + 2)}{\vartheta p} = 5q - 2 \equiv \begin{cases} < 0 & q < 0{,}4 \\ = 0 & q = 0{,}4 \\ > 0 & q > 0{,}4 \end{cases}$$

Denotando por BR_A la Mejor Respuesta de la empresa A, ésta adopta la forma:

$$BR_A(q) = \begin{cases} p = 0 & q < 0{,}4 \\ p \in [0,1] & q = 0{,}4 \\ p = 1 & q > 0{,}4 \end{cases}$$



- Utilidad esperada de la empresa B:

$$E\left[U_B\right] = 2.p.q + 2.p.(1-q) + (-1).(1-p).q + 1.(1-p).(1-q) = 2pq + p - 2q + 1$$

La elección de una estrategia mixta de la empresa B queda totalmente determinada por el valor que se asigne a q, planteando un problema de elección en término de dicho valor.

Derivando parcialmente respecto a p se puede analizar la influencia sobre la utilidad esperada de la empresa A

$$\frac{\vartheta E\left[U_B\right]}{\vartheta q} = \frac{\vartheta(2pq + p - 2q + 1)}{\vartheta q} = 2p - 2 \equiv \begin{cases} < 0 & p < 1 \\ = 0 & p = 1 \\ > 0 & p > 1 \end{cases}$$

Denotando por BR_B la Mejor Respuesta de la empresa B, ésta tiene la forma:

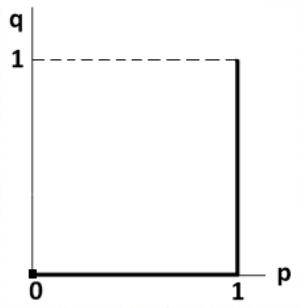
Hoja nº ....

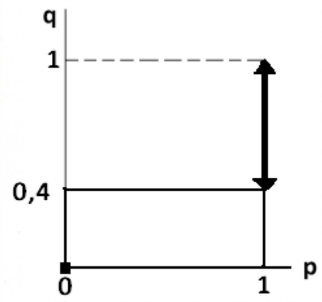
Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....

$$BR_B(p) = \begin{cases} q = 0 & p < 1 \\ q \in [0,1] & p = 1 \\ q = 1 & q > 1 \end{cases}$$

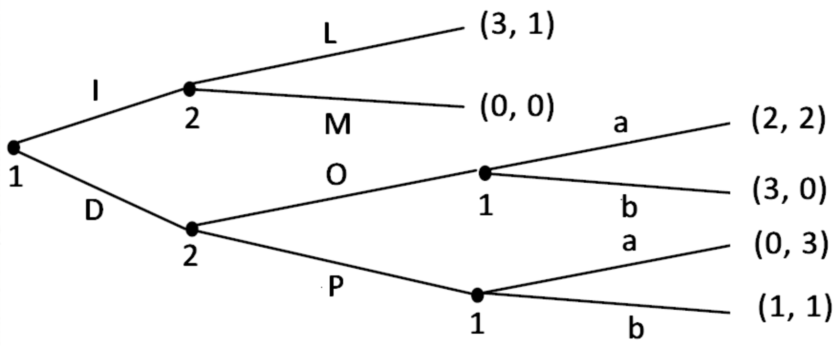




En el gráfico de las correspondencias de Mejor Respuesta la intersección es el conjunto $\{(0,\ 0)\} \cup \{(1,\ q \geq 0{,}4)\}$

Los equilibrios de Nash: $EN \equiv \{(0,\ 0)\} \cup \{(1,\ q \geq 0{,}4)\}$

Sea el pago entre las estrategias de las Empresas:



La estrategia de una Empresa es un plan de comportamiento o de conducta, en donde cada Empresa asigna una acción a cada nodo que le corresponde. La estrategia tiene tantas componentes como conjuntos de información tenga la Empresa.

En la disputa entre Empresas hay 5 subjuegos que comienzan a partir de cada nodo de decisión y continúan hasta el final de la disputa.

Solución:

La Empresa 1 tiene tres conjuntos de Información, en consecuencia tiene $2^3 = 8$ estrategias:

$$E_1 = \left[(I,D),\ \{(a,b)\times(a,b)\}\right] = \left[(I,D),\ (aa,ab,ba,bb)\right] = (Iaa,Iab,Iba,Ibb,Daa,Dab,Dba,Dbb)$$

La Empresa 2 tiene dos conjuntos de información, por tanto tiene $2^2 = 4$ estrategias:

$$E_2 = \{(L,M)\times(O,P)\} = \{(LO,LP,MO,MP)\}$$

a) Equilibrios en estrategias dominadas

Empresa 2

Empresa 1	LO	LP	MO	MP
Iaa	(3 , 1)	(3 , 1)	(0 , 0)	(0 , 0)
Iab	(3 , 1)	(3 , 1)	(0 , 0)	(0 , 0)
Iba	(3 , 1)	(3 , 1)	(0 , 0)	(0 , 0)
Ibb	(3 , 1)	(3 , 1)	(0 , 0)	(0 , 0)
Daa	(2 , 2)	(0 , 3)	(2 , 2)	(0 , 3)
Dab	(2 , 2)	(1 , 1)	(2 , 2)	(1 , 1)
Dba	(3 , 0)	(0 , 3)	(3 , 0)	(0 , 3)
Dbb	(3 , 0)	(1 , 1)	(3 , 0)	(1 , 1)

Hoja nº ....

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....

Empresa 2

Empresa 1		LO	LP	MO	MP
	Iaa	(3 , 1)	(3 , 1)	(0 , 0)	(0 , 0)
	Iab	(3 , 1)	(3 , 1)	(0 , 0)	(0 , 0)
	Iba	(3 , 1)	(3 , 1)	(0 , 0)	(0 , 0)
	Ibb	(3 , 1)	(3 , 1)	(0 , 0)	(0 , 0)
	Daa	(2 , 2)	(0 , 3)	(2 , 2)	(0 , 3)
	Dab	(2 , 2)	(1 , 1)	(2 , 2)	(1 , 1)
	Dba	(3 , 0)	(0 , 3)	(3 , 0)	(0 , 3)
	Dbb	(3 , 0)	(1 , 1)	(3 , 0)	(1 , 1)

1ª ETAPA: Las estrategias Daa, Dab, Dba, MO y MP están débilmente dominadas.

2ª ETAPA: La estrategia Dbb está débilmente dominada por Iaa, la estrategia LO está débilmente dominada por LP.

Equilibrio en estrategias dominadas $\equiv$ {(Iaa, LP), (Iab, LP), (Iba,LP) y (Ibb, LP)}

Señalar que toda estrategia dominada es una estrategia de Nash, lo contrario no se verifica.

b) En un equilibrio de Nash cada empresa ejecuta el mejor 'movimiento' posible teniendo en cuenta los movimientos de las demás empresas.

Un equilibrio de Nash (EN) no implica que se logre el mejor resultado conjunto para las empresas, sino solo el mejor resultado para cada una de ellas consideradas individualmente. Es posible que el resultado fuera mejor para todas las empresas si, de alguna manera, coordinasen su acción.

En términos económicos, es un tipo de equilibrio de competencia imperfecta que describe la situación de varias empresas compitiendo por el mercado de un mismo bien y que pueden elegir cuánto producir para intentar maximizar su ganancia.

Equilibrios de Nash:

Empresa 2

Empresa 1		LO	LP	MO	MP
	Iaa	$(3^{x} , 1^{*})$	$(3^{x} , 1^{*})$	(0 , 0)	(0 , 0)
	Iab	$(3^{x} , 1^{*})$	$(3^{x} , 1^{*})$	(0 , 0)	(0 , 0)
	Iba	$(3^{x} , 1^{*})$	$(3^{x} , 1^{*})$	(0 , 0)	(0 , 0)
	Ibb	$(3^{x} , 1)$	$(3^{x} , 1)$	(0 , 0)	(0 , 0)
	Daa	(2 , 2)	$(0 , 3^{*})$	(2 , 2)	$(0 , 3^{*})$
	Dab	$(2 , 2^{*})$	(1 , 1)	$(2 , 2^{*})$	$(1^{x} , 1)$
	Dba	$(3^{x} , 0)$	$(0 , 3^{*})$	$(3^{x} , 0)$	$(0 , 3^{*})$
	Dbb	$(3^{x} , 0)$	$(1 , 1^{*})$	$(3^{x} , 0)$	$(1^{x} , 1^{*})$

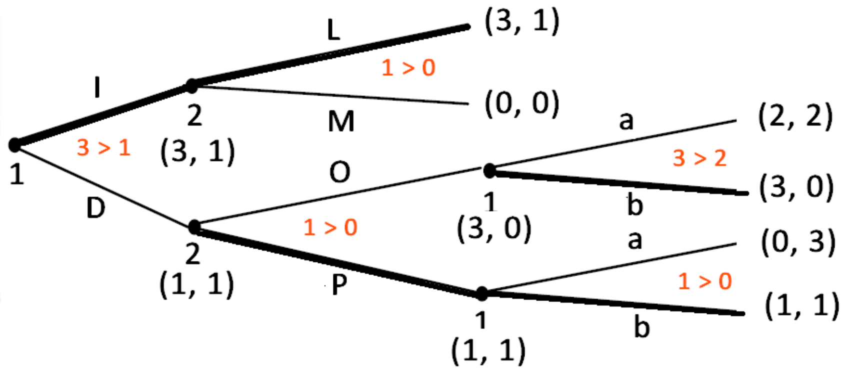
EN = {(Iaa, LO), (Iaa, LP), (Iab, LO), (Iab, LP), (Iba, LO), (Iba, LP), (Ibb, LO), (Ibb, LP), (Dbb, MP)}

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

c) Un perfil de estrategias es un equilibrio perfecto en subjuegos si genera un equilibrio de Nash en cada subjuego del juego original. El conjunto de equilibrios perfectos en subjuegos para un juego dado es siempre un subconjunto del conjunto de equilibrios de Nash para ese juego. En algunos casos, los conjuntos pueden ser idénticos.

Cuando las Empresas disputan cualquier disputa que consista en solo una parte de la disputa original y su comportamiento representa una equilibrio de Nash de esa pequeña disputa, su comportamiento es un equilibrio perfecto en las disputas.

El ENPS normalmente se resuelve por 'inducción hacia atrás', de derecha a izquierda, eliminando las ramas que impliquen cualquier jugador que hace un movimiento que no es creíble (no es óptimo) en un nodo.



$\text{ENPS} = \{(\text{Ibb}, \text{LP})\}$

Dos jóvenes participan en una carrera suicida hacia un acantilado. Los dos prefieren ser el último el saltar, pero también prefieren saltar primero a no saltar, para así evitar despeñarse.
La carrera se puede interpretar en forma estratégica: Que los dos jóvenes salten los 'últimos' se interpreta como que ninguno salta; mientras que los dos salten 'los primeros' significa que los dos saltan al mismo tiempo. La matriz de pagos que resulta es:

		Joven B: Saltar el último (SU)	Joven B: Saltar el primero (SP)
Joven A	Saltar el último (SU)	(0, 0)	(3, 1)
	Saltar el primero (SP)	(1, 3)	(2, 2)

Hallar los equilibrios de Nash en estrategias puras y mixtas.

Solución:

Equilibrios de Nash en estrategias puras

		Joven B: SU	Joven B: SP
Joven A	SU	(0, 0)	$(3^{*}, 1^{\times})$
	SP	$(1^{*}, 3^{\times})$	(2, 2)

Los equilibrios de Nash en estrategias puras: $EN = \{(SP, SU), (SU, SP)\}$

ESTRATEGIAS MIXTAS: Sea $(p, 1-p)$ la estrategia del Joven A y $(q, 1-q)$ la estrategia del joven B.
Para calcular las probabilidades:

			Joven B: q SU	Joven B: $1-q$ SP
Joven A	p	SU	(0, 0)	(3, 1)
	$1-p$	SP	(1, 3)	(2, 2)

Utilidad esperada del Joven A:

$$E[U_A] = 0 \,.\, p \,.\, q + 3 \,.\, p \,.\, (1-q) + 1 \,.\, (1-p) \,.\, q + 2 \,.\, (1-p) \,.\, (1-q) = p(1-2q) + 2 - q$$

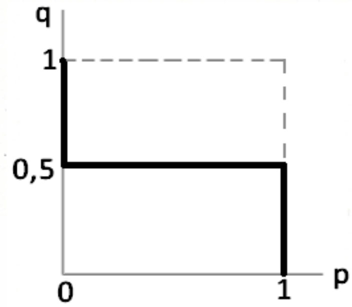
La elección de una estrategia mixta del Joven A queda totalmente determinada por el valor que se asigne a p, planteando un problema de elección en término de dicho valor.

Derivando parcialmente respecto a p se puede analizar la influencia sobre la utilidad esperada del Joven A

$$\frac{\vartheta E\left[U_A\right]}{\vartheta p}=\frac{\vartheta\left[p(1-2q)+2-q\right]}{\vartheta p}=1-2q \;\Rightarrow\; \begin{cases} p=1 & \text{si } 1-2q>0 \rightarrow q<0{,}5 \\ p\in\left[0,1\right] & \text{si } 1-2q=0 \rightarrow q=0{,}5 \\ p=0 & \text{si } 1-2q<0 \rightarrow q>0{,}5 \end{cases}$$

Denotando por BR_A la Mejor Respuesta del Joven A, ésta adopta la forma:

$$BR_A(q)=\begin{cases} p=1 & q<0{,}5 \\ p\in\left[0,1\right] & q=0{,}5 \\ p=0 & q>0{,}5 \end{cases}$$



Utilidad esperada del Joven B:

$$E\left[U_B\right]=0.p.q+3.(1-p).q+1.p.(1-q)+2.(1-p).(1-q)=q(1-2p)+2-p$$

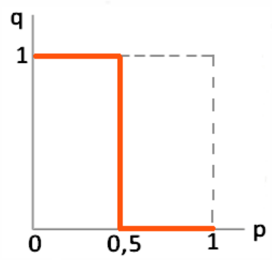
La elección de una estrategia mixta del Joven B queda totalmente determinada por el valor que se asigne a q, planteando un problema de elección en término de dicho valor.

Derivando parcialmente respecto a q se puede analizar la influencia sobre la utilidad esperada del Joven A

$$\frac{\vartheta E\left[U_B\right]}{\vartheta q}=\frac{\vartheta\left[q(1-2p)+2-p\right]}{\vartheta q}=1-2p \;\Rightarrow\; \begin{cases} q=1 & \text{si } 1-2p>0 \rightarrow p<0{,}5 \\ q\in\left[0,1\right] & \text{si } 1-2p=0 \rightarrow p=0{,}5 \\ q=0 & \text{si } 1-2p<0 \rightarrow p>0{,}5 \end{cases}$$

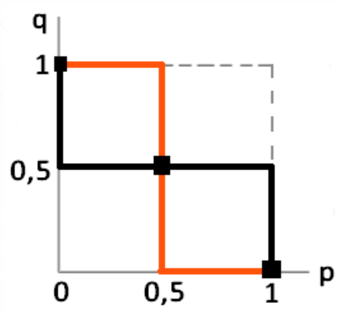
Denotando por BR_B la Mejor Respuesta del Joven B, ésta tiene la forma:

$$BR_B(p)=\begin{cases} q=1 & p<0{,}5 \\ q\in\left[0,1\right] & p=0{,}5 \\ q=0 & p>0{,}5 \end{cases}$$



La Mejor Respuesta se encuentra en las intersecciones:

(0 , 1) , (0,5 , 0,5) , (1 , 0)



Calcular los equilibrios de Nash en estrategias mixtas del siguiente juego:

		Empresa B		
		B1	B2	B3
Empresa A	A1	$1,-1$	$6,-6$	$0,0$
	A2	$2,-2$	$0,0$	$3,-3$
	A3	$3,-3$	$2,-2$	$4,-4$

Solución:

Para hallar las estrategias mixtas, como de cualquier otro juego en el qué alguno de los jugadores tiene más de dos estrategias, no existe alguna técnica que siempre funcione de manera mecánica, aunque siempre hay que buscar los mismo:

- ¿Con qué probabilidades deben jugar las Empresas sus estrategias para lo que esté haciendo cada uno de ellas sea una mejor respuesta al comportamiento de la Emprea rival?

En otras palabras, ¿Cuáles tienen que ser las probabilidades (p_1, p_2) y (q_1, q_2) para que (p_1, p_2) sea la mejor respuesta a (q_1, q_2) y, a su vez, (q_1, q_2) sea la mejor respuesta a (p_1, p_2) ?

			Empresa B		
			q_1	q_2	$1-q_1-q_2$
			B1	B2	B3
Empresa A	p_1	A1	$1,-1$	$6,-6$	$0,0$
	p_2	A2	$2,-2$	$0,0$	$3,-3$
	$1-p_1-p_2$	A3	$3,-3$	$2,-2$	$4,-4$

Se analiza si la matriz de pago se puede simplificar, comprobando que la Empresa A tiene una estrategia dominada:

La estrategia A2 se encuentra estrictamente dominada por la estragia A3 $(3 > 2\ ,\ 2 > 0\ ,\ 4 > 3)$ $\rightarrow$ La Empresa A nunca jugará la estrategia A2, es decir, $p_2 = 0$.

Con lo que se puede eliminar del juego a la estrategia A2 del conjunto de estrategias de la Empresa A, concluyendo que la Empresa A sólo jugará la estrategia A1 con probabilidad p_1 y la estrategia A3 con probabilidad $(1-p_1)$

			Empresa B		
			q_1	q_2	$1-q_1-q_2$
			B1	B2	B3
Empresa A	p_1	A1	$1\,,-1$	$6\,,-6$	$0\,,0$
	$1-p_1$	A3	$3\,,-3$	$2\,,-2$	$4\,,-4$

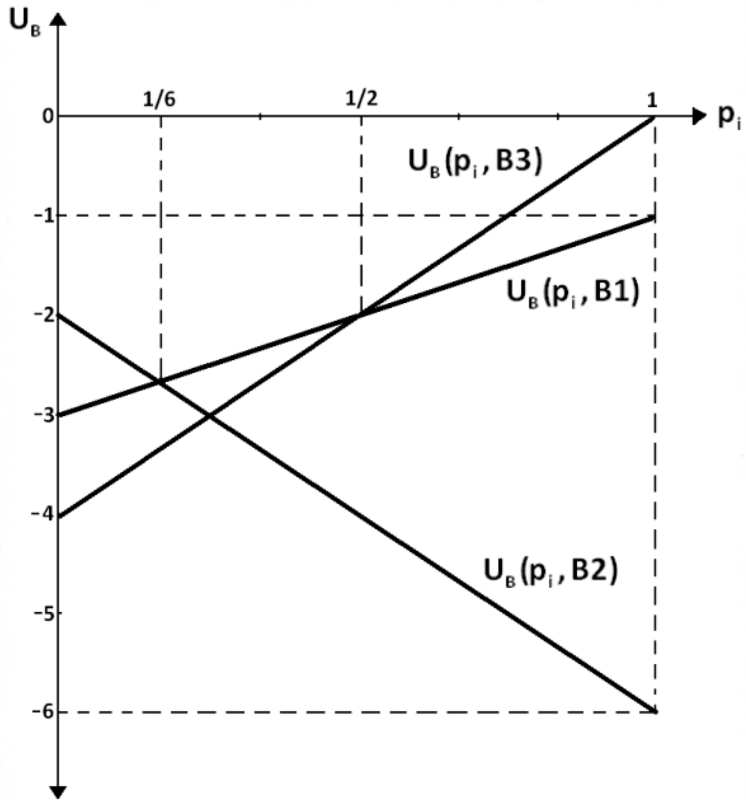
En el caso de la Empresa B no se puede hacer lo mismo pues no tiene ninguna estrategia estrictamente dominada.

Empresa A — Suponiendo que la Empresa utiliza una estrategia mixta del tipo $(p_1\,,1-p_1)$ se tiene que encontrar cuál es la mejor respuesta de la Empresa B.

Para hallar la mejor respuesta BR hay que calcular los pagos que tendrá la Empresa B con cada una de sus estrategias y observar cuál de ellas es la mejor respuesta:

$$U_B(p_1\,,B1)=1.\,p_1 \;+\; 3.(1-p_1) \;=\; 3-2\,p_1$$
$$U_B(p_1\,,B2)=6.p_1 \;+\; 2.(1-p_1) \;=\; 2+4\,p_1$$
$$U_B(p_1\,,B3)=0.p_1 \;+\; 4.(1-p_1) \;=\; 4-4\,p_1$$

Se representan las rectas en un eje de coordenadas $(p_i\,,\,U_B)$



$p_1 < \frac{1}{6} \;\rightarrow\;$ B2 mejor respuesta

$p_1 = \frac{1}{6} \;\rightarrow\;$ B1 y B2 mejor respuesta

$\frac{1}{6} < p_1 < \frac{1}{2} \;\rightarrow\;$ B1 mejor respuesta

$p_1 = \frac{1}{2} \;\rightarrow\;$ B1 y B3 mejor respuesta

$p_1 > \frac{1}{2} \;\rightarrow\;$ B3 mejor respuesta

Se analizan estas cinco posibilidades para saber si existe equilibrio en estrategias mixtas.

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

- Si la Empresa A elige $p_1 < \frac{1}{6}$ $\rightarrow$ La Empresa B decide B2, al ser la mejor respuesta al hecho de que la Empresa A decida $p_1 < \frac{1}{6}$, con lo que la mejor respuesta para la Empresa A será decidir siempre la estrategia A1, es decir, $p_1 = 1$. Hecho que contradice que $p_1 < \frac{1}{6}$. En consecuencia, no puede existir equilibrio.

- Si la Empresa A elige $p_1 = \frac{1}{6}$ $\rightarrow$ La Empesa B dedide B1 o B2 como mejores respuestas, con lo que se encuentra dispuesta a 'decidir al azar' entre estas dos estrategias, con lo que se tiene $q_1 + q_2 = 1 \quad \rightarrow \quad q_2 = 1 - q_1$.

Falta por saber cuáles tienen que ser estas probabilidades q_1 y $(1-q_1)$ para que la Empresa A esté dispuesta a decidir al azar entre sus estrategias A1 y A3.

			Empresa B	
			q_1	$1-q_1$
			B1	B2
Empresa A	p_1	A1	$1, -1$	$6, -6$
	$1-p_1$	A3	$3, -3$	$2, -2$

Para calcular la mejor respuesta de la Empresa A, hay que calcular cuánto gana la Empresa A en cada una de las estrategias cuando la Empresa B participa con las probabilidades q_1 y $(1-q_1)$

$$U_A(A1, q_1) = 1.q_1 + 6.(1-q_1) = 6 - 5\,q_1$$
$$U_A(A3, q_1) = 3.q_1 + 2.(1-q_1) = 2 + q_1$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se tiene que $U_A(A1, q_1) = U_A(A3, q_1)$, se tiene:

$$6 - 5\,q_1 = 2 + q_1 \quad \rightarrow \quad q_1 = \frac{2}{3} \quad \rightarrow \quad q_2 = 1 - q_1 = \frac{1}{3}$$

Se encuentra el equilibrio:

La Empresa A juega A1 con probabilidad $p_1 = \frac{1}{6}$ y A3 con probabilidad $(1-p_1) = \frac{5}{6}$

La Empresa B juega B1 con probabilidad $q_1 = \frac{2}{3}$ y la B2 con probabilidad $(1-q_1) = \frac{1}{3}$

UAM UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

(IMPRESO EN PAPEL RECICLADO) UNICAMENTE PARA USO ESCOLAR

- Si la Empresa A elige $\frac{1}{6} < p_1 < \frac{1}{2}$ $\rightarrow$ La mejor respuesta de la Empresa B es B1, con lo que la mejor respuesta de la Empesa A ante esto será jugar siempre A3, es decir, $p_1 = 0$.

Esto contradice que $\frac{1}{6} < p_1 < \frac{1}{2}$.

No puede existir equilibrio en este caso.

- Si la Empresa A elige $p_1 = \frac{1}{2}$ $\rightarrow$ La Empesa B dedide B1 o B3, entonces la mejor respuesta de la Empresa A será decidir siempre A3, es decir, $p_1 = 0$

Esto contradice que $p_1 = \frac{1}{2}$.

No puede existir equilibrio en este caso.

- Si la Empresa A elige $p_1 > \frac{1}{2}$ $\rightarrow$ La Empesa B dedide B3, entonces la mejor respuesta de la Empresa A será decidir siempre A3, es decir, $p_1 = 0$

Esto contradice que $p_1 > \frac{1}{2}$.

No puede existir equilibrio en este caso.

✓ Este caso de competencia entre Empresas tiene un único equilibrio, y lo es en estrategias mixtas, no existe ningún equilibrio en estrategias puras.

En este equilibrio la Empresa A juega la estrategia A1 con probabilidad $\frac{1}{6}$ y la estrategia A3 con probabilidad $\frac{5}{6}$, nunca juega la estrategia A2.

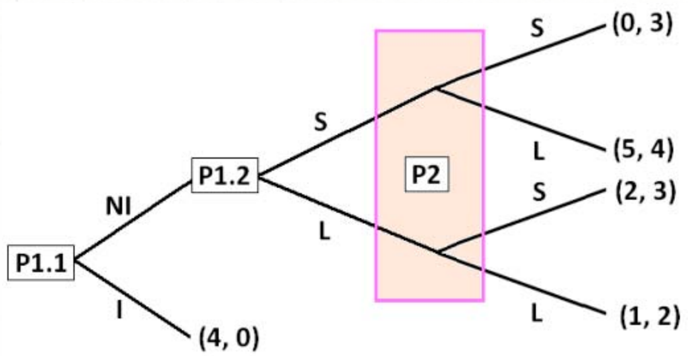
La Empresa B juega la estrategia B1 con probabilidad $\frac{2}{3}$ y la estrategia B2 con probabilidad $\frac{1}{3}$, nunca juega la estrategia B3.

Antes de iniciar una carrera mortal, dos pilotos inician una prueba previa en un circuito para saber el tipo de ruedas que tienen que poner. En la vuelta de prueba, el piloto P1 con una maniobra estratégica decide si impide (I) o no (NI) la participación del piloto P2 en la carrera. Si impide continuar a P2 tendría 4 puntos al final de la carrera y P2 ninguno. Si no impide continuar a P2, los dos pilotos eligen el tipo de ruedas simultáneamente, para lluvia (L) o tiempo seco (S), con los resultados que se reflejan en la siguiente forma extensiva.

Se pide:

a) Estrategias de P1 y P2

b) Calcular el equilibrio perfecto en subjuegos (ENPS)

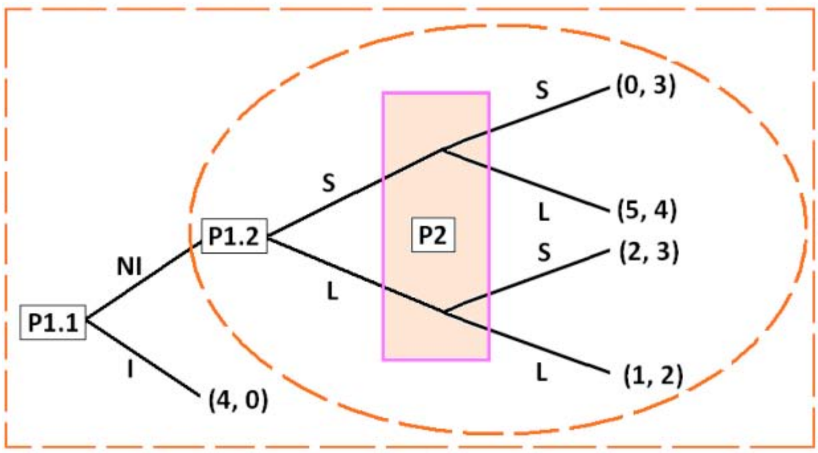


Solución:

a) Estrategias: $\begin{cases} P1: \; S_1 = \{I, NI\} \times \{L, S\} = \{(I, L), (I, S), (NI, L), (NI, S)\} \\ P2: \; S_2 = \{L, S\} \end{cases}$

b) Hay 2 subjuegos:

- El juego completo que comienza en P1.1
- El Juego que comienza en P1.2.



El subjuego que comienza en (P1.2) es un juego estático, los pilotos deben jugar un EN.

			P2	
			q	$1-q$
			L	S
P1	p	L	1, 2	$2^{\times}, 3^{*}$
	$1-p$	S	$5^{\times}, 4^{*}$	0, 3

Estrategias puras: $EN = \{(S, L), (L, S)\}$

Para calcular las probabilidades se recurre a las Ecuaciones de Equilibrio o a la Utilidad Esperada

- Ecuaciones Equilibrio: $\begin{cases} 1\,.\,q + 2\,.\,(1-q) = 5\,.\,q + 0\,.\,(1-q) \rightarrow q = \dfrac{1}{3} \;,\; 1-q = \dfrac{2}{3} \\ 2\,.\,p + 4\,.\,(1-p) = 3\,.\,p + 3\,.\,(1-p) \rightarrow p = \dfrac{1}{2} \;,\; 1-p = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

- Utilidad P1: $\begin{cases} U_{P1}(L,q) = 1\,.\,q + 2\,.\,(1-q) = 2-q \\ U_{P1}(S,q) = 5\,.\,q + 0\,.\,(1-q) = 5q \end{cases} \rightarrow 2-q = 5q \rightarrow q = \dfrac{1}{3} \;,\; 1-q = \dfrac{2}{3}$

Utilidad esperada de P1: $E\left[U_{P1}(L,q)\right] = 2 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{3}$

- Las Utilidades esperadas o pagos de cada piloto consisten en la suma (ponderada por las probablidades) de los resultados de cada piloto.

$$E\left[U_{P1}\right] = 1.p.\,q + 2.p.\,(1-q) + 5.(1-p).\,q + 0.(1-p).\,(1-q) = -6pq + 2p + 5q$$

$$E\left[U_{P2}\right] = 2.p.\,q + 3.p.(1-q) + 4.(1-p).\,q + 3.(1-p).\,(1-q) = -2pq + q + 3$$

Derivando $E\left[U_{P1}\right]$ respecto a p y $E\left[U_{P1}\right]$ respecto a q, e igualando a 0, se tiene:

$$\frac{\vartheta E\left[U_{P1}\right]}{\vartheta p} = \frac{\vartheta(-6pq + 2p + 5q)}{\vartheta p} = -6q + 2 = 0 \rightarrow q = \frac{1}{3} \;,\; 1-q = \frac{2}{3}$$

$$\frac{\vartheta E\left[U_{P2}\right]}{\vartheta q} = \frac{\vartheta(-2pq + q + 3)}{\vartheta q} = -2p + 1 = 0 \rightarrow p = \frac{1}{2} \;,\; 1-p = \frac{1}{2}$$

Estrategias puras: $EN = \{(S,L)\,,(L,S)\}$

Estrategias mixtas: $EN = \left\{\left(\frac{1}{2}(L) + \frac{1}{2}(S)\right), \left(\frac{1}{3}(L) + \frac{2}{3}(S)\right)\right\}$

El piloto P1 en cada uno de estos equilibrios, respectivamente, tienen una utilidad esperada de $5/2$ y $5/3$

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

Juego Completo: El piloto (P1) prefiere ganar 4 puntos de forma segura si toma la decisión de impedir la salida (NI) del piloto (P2), tanto si éste elige S como si juegan el equilibrio en estrategias mixtas.

Aparecen $\left(\text{I},(\text{L},\text{S})\right)$ y $\left(\text{I},\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)\right)$ como ENPS

Por otra parte, sí el piloto (P2) elige L, entonces el piloto (P1) prefiere NI $(5>4)$, surgiendo $\left(\text{NI},(\text{S},\text{L})\right)$ como ENPS

$$\text{ENPS} \equiv \left\{\left(\text{I},(\text{L},\text{S})\right),\left(\text{NI},(\text{S},\text{L})\right),\left(\text{I},\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)\right)\right\}$$

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

JUEGOS NO COOPERATIVOS REPETIDOS: FINITOS, INFINITOS

Los juegos repetidos pueden tener un horizonte temporal finito, donde el juego se repite un número finito y conocido de veces. O bien el juego se repite con una duración deconocida por los jugadores (horizonte temporal inifinito).

Horizonte temporal finito

Si se considera un juego que sólo se juega una vez en el que existen posibilidades de cooperación pero no corresponden con una situación de equilibrio de Nash.
Cuando el juego se termina y no existe futuro, en el último período cada jugador seguirá su comportamiento óptimo a corto plazo, sólo queda por jugar el juego que sólo se juega una vez y no cooperará con el rival.

En el período anterior cada jugador tiene que decidir si coopera o no coopera con el rival, anticipando que en el último período no va a cooperar, por lo que los jugadores seguirán también su comportamiento óptimo a corto plazo.

En consecuencia, se repetirá el Equilibrio de Nash (EN) a corto plazo tantas veces como se repita el juego. En el único Equilibrio de Nash Perfecto en Subjuegos (ENPS) cada jugador se comportará período tras período como lo haría a corto plazo.
En definitiva, en un horizonte temporal finito la cooperación entre los jugadores no se sostiene como equilibrio.

Horizonte temporal infinito

Cuando un juego se repite infinitos períodos el comportamiento de los jugadores puede influir en las decisiones que elijan en el futuro.
El jugador compara distintas acciones, teniendo que comparar el valor presente descontando que obtendría con cada una de ellas.

Siendo $r \equiv$ Tipo de interés (tanto por 1), se define el factor de descuento δ como:

$$\delta = \frac{1}{1+r} \quad \to \quad \begin{cases} \delta = 0 \text{ cuando } r \to \infty & \text{Al jugador solo le interesa el presente} \\ \delta = 1 \text{ cuando } r = 0 & \text{Presente y futuro tienen el mismo interés} \end{cases}$$

El elemento relevante es la tasa de descuento $\delta \in (0, 1)$

Aplicando la tasa de descuento, el pago descontado es: $u = 1 + \delta + \delta^2 + \delta^3 + \ldots = \dfrac{1}{1-\delta}$

Al recibir un pago de k unidades, cada período converge a: $u = \dfrac{k}{1-\delta}$

En este tipo de juegos, en ocasiones incluyendo amanezas de castigo en caso de incumplimiento del acuerdo de cooperación, se puede sostener como equilibrio comportamientos que no son de equilibrio a corto plazo.

Estrategias

Los jugadores para mantener la cooperación en juegos reptidos pueden utilizar distintas estrategias: estrategia del disparador y estrategia del ojo por ojo.

ESTRATEGIA DEL DISPARADOR (D): Se coopera en cada período si anteriormente se habia cooperado o si es el primer período, y no se coopera durante el resto del juego si anteriormente algún jugador se ha desviado de la cooperación.
En definitiva, el jugador que no coopera se somete a un castigo infinito.
Es una estrategia muy utilizada en actividades económicas.

ESTRATEGIA DEL TALIÓN (TD, Toma y Daca) : Consiste en comenzar cooperando y luego hacer lo que hizo el jugador rival en el período anterior. Es decir, elegir C si el jugador rival ha elegido C en el período anterior o elegir NC si el jugador rival ha elegido NC en el período anterior.

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

APLICACIÓN ECONÓMICA: DILEMA DEL PRISIONERO REPETIDO

Se presenta un juego con estructura del dilema del prisionero

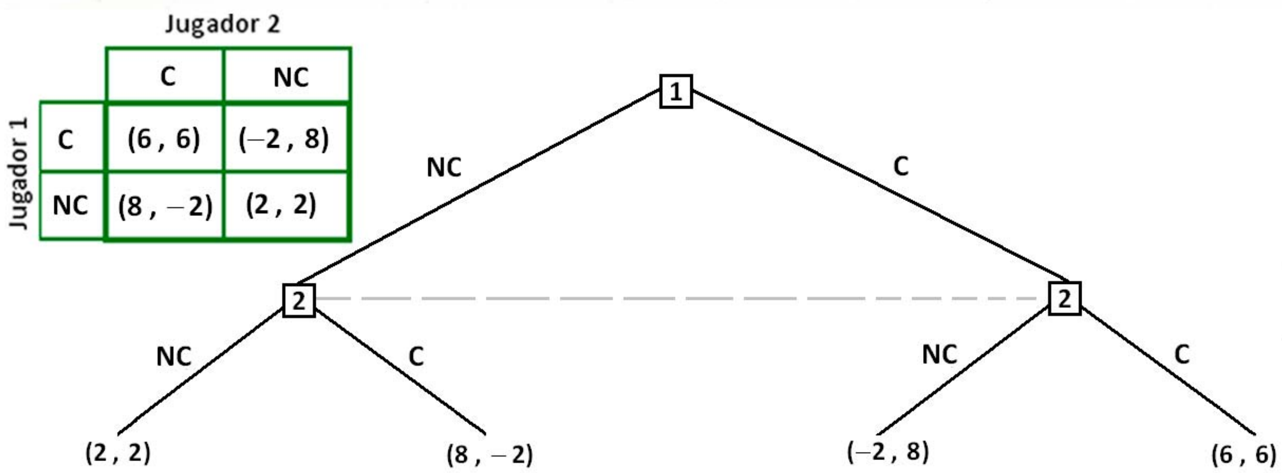
		Jugador 2	
		C	NC
Jugador 1	C	(6 , 6)	(−2 , 8)
	NC	(8 , − 2)	(2 , 2)

← Matriz de pagos

Se produce un conflicto entre el resultado *eficiente*, que se obtiene cuando ambos jugadores eligen cooperar $(6, 6)$, y el resultado *ineficiente* que aparece cuando ambos jugadores eligen su acción dominante, no cooperar $(2, 2)$

Cuando el juego se juega solamante una vez $(T = 1)$, (NC, NC) es un equilibrio de Nah en estrategias dominantes. Es decir, ante cualquier estrategia de otro jugador, la mejor respuesta de cada uno de los jugadores es no cooperar.
Sin embargo, los jugadores obendrían mejores resultados si cooperasen jugando (C, C) - esta combinación de estrategias es óptimo de Pareto y además maximiza las ganancias agregadas -

La representación en forma extensiva una sola vez $(T = 1)$:



Si juegan dos veces $(T = 2)$ debiendo decidir simultáneamente entre C o NC, sabiendo que los pagos de cada uno serán la suma de los pagos que se les otorgaría al elegir una u otra estrategia en ambas etapas.

Antes de analizar las posibilidades de cooperación cuando el juego se repite, hay que distinguir entre horizonte temporal finito y horizonte temporal infinito.

UAM UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

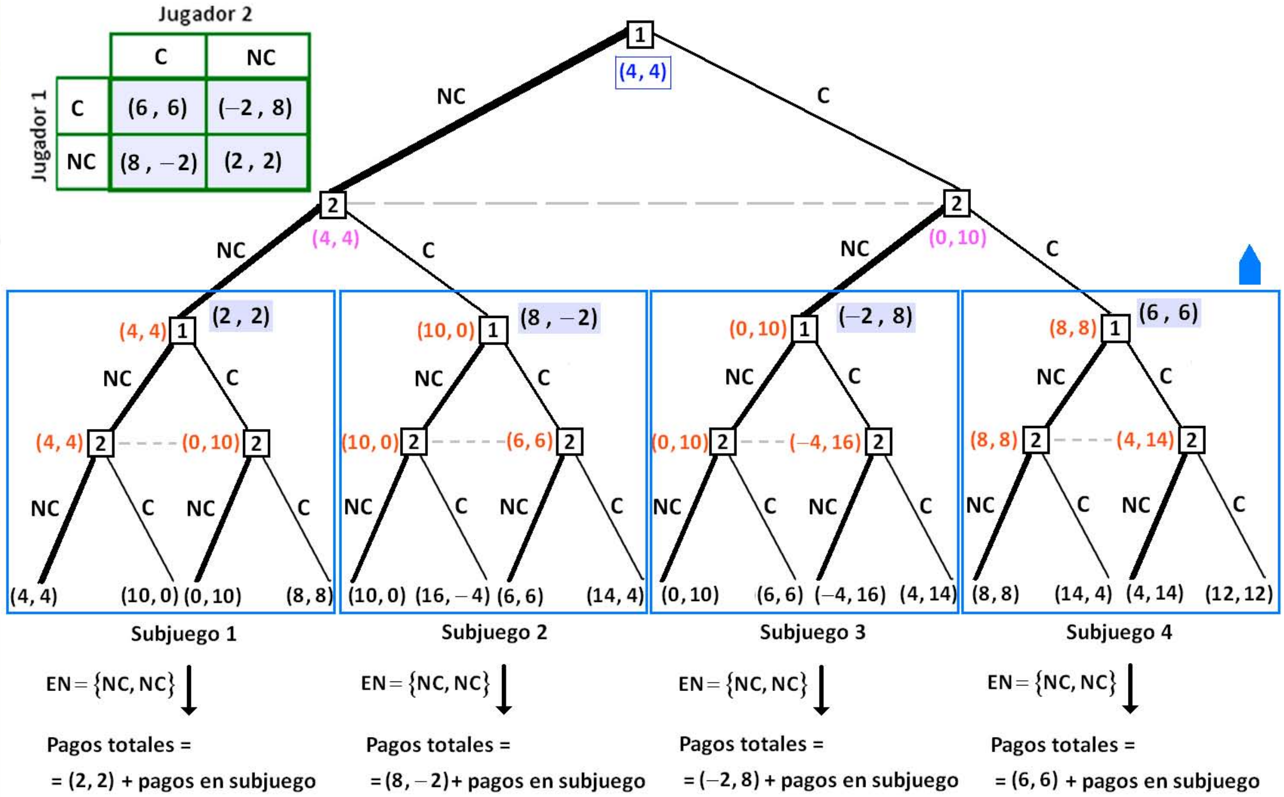
HORIZONTE TEMPORAL FINITO: Supongamos que el juego se repite 2 veces $(T=2)$, los jugadores ya saben que no existe futuro más allá del segundo período.

En el último período se llega a la misma conclusión que en el dilema del prisionero clásico, ambos jugadores decidarán (NC, NC), los jugadores saben que se termina en el período 2 y no tienen interés en mejorar en el futuro porque no existe.

Si los jugadores se encuentran en el periodo $(T-1)$ seguirán decidiendo (NC, NC) porque saben que el juego se termina y no tiene sentido cooperar para intentar mejorar en el futuro, ya que en el último período no se va a cooperar.

En consecuencia, independientemente del número de veces que se repita el juego, en el último período cada jugador eligirá (NC, NC) y en el único Equilibrio de Nash Perfecto en Subjuegos (ENPS) se jugará (NC, NC) en cada período.

Jugador 1 \ Jugador 2	C	NC
C	(6 , 6)	(−2 , 8)
NC	(8 , −2)	(2 , 2)



Un juego repetido un número finito de veces es un juego dinámico en el que un juego simultáneo (juego de etapa) se juega un número finito de veces y los resultados de cada etapa son observados antes de la siguiente.

- El juego repetido tiene un único equilibrio de Nash perfecto en subjuegos (ENPS) si el juego simultáneo (juego de etapa) tiene un único equilibrio de Nash (EN).

En el ENPS se juegan las estrategias de EN en cada etapa.

UAM UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

- Si el juego de etapa tiene dos o más EN, pueden existir ENPS en los que en alguna etapa *no* se juegan estrategias que sean EN pero se juega algo que es mejor para los dos jugadores.

HORIZONTE TEMPORAL INFINITO: Los jugadores no saben cuándo va a terminar el juego, pero sí conocen la historia pasada el juego.
Se comparan los pagos que obtendrían los jugadores en caso de cooperar y los pagos que obtendrían en caso de desviarse de la estrategia.

ESTRATEGIA DEL DISPARADOR

Si los jugadores siguen las estrategias de cooperación los pagos correspondientes son:

Acciones	$T=1$	$T=2$	$T=3$	$T=4$	••••
Jugador 1	C	C	C	C	••••
Jugador 2	C	C	C	C	••••

Pagos

Jugador 1	6	6	6	6	••••
Jugador 2	6	6	6	6	••••

Ganancia Jugador: $6 + 6.\delta + 6.\delta^2 + 6.\delta^3 + \cdots = \dfrac{6}{1-\delta}$

Suponiendo que el Jugador 2 no coopera en el primer período, siguiendo la estrategia del disparador, el Jugador 1 no volverá a cooperar en ningún momento futuro y la combinación de estrategias (a corto plazo) de primer periodo será (C, NC) y en el resto de períodos (NC, NC)

Acciones	$T=1$	$T=2$	$T=3$	$T=4$	••••
Jugador 1	C	NC	NC	NC	••••
Jugador 2	NC	NC	NC	NC	••••

Pagos

Jugador 1	-2	2	2	2	••••
Jugador 2	8	2	2	2	••••

Ganancia Jugador 2: $8 + 2.\delta + 2.\delta^2 + 2.\delta^3 + \cdots = 8 + \dfrac{2\delta}{1-\delta}$

Se analizan las ganancias obtenidas en cada caso para ver si el Jugador 2 tiene incentivos a desviarse del acuerdo de cooperación.

Para que la cooperación se pueda obtener como equilibrio:

$$\frac{6}{1-\delta} \geq 8 + \frac{2\delta}{1-\delta} \quad \rightarrow \quad \delta \geq \frac{1}{3}$$

Siempre que ambos jugadores sean lo suficientemente pacientes, si $\left(\delta \geq \dfrac{1}{3}\right)$, jugar la estrategia del disparador por parte de cada jugador constituye un equilibrio de Nash (EN) del juego repetido con horizonte infinito, en donde los jugadores cooperan período tras período.

La estrategia del disparador se caracteriza por desencadenar un castigo eterno (jugar NC) ante una acción NC del rival. Es decir, aunque el jugador que se desvía a NC volviese a cooperar C, no se le perdona y el castigo se mantiene para siempre.

A continuación, se analiza la Estrategia del Talión donde la duración del castigo depende de la conducta del rival durante los períodos de castigo.

HORIZONTE TEMPORAL INFINITO: ESTRATEGIA DEL TALIÓN (TD)

🖮 Si los jugadores siguen las estrategias de cooperación los pagos correspondientes son: Si los jugadores siguen las estrategias de cooperación los pagos correspondientes son:

Acciones	T = 1	T = 2	T = 3	T = 4	••••
Jugador 1	C	C	C	C	••••
Jugador 2	C	C	C	C	••••

Pagos

Jugador 1	6	6	6	6	••••
Jugador 2	6	6	6	6	••••

Ganancia Jugador: $6 + 6\,.\,\delta + 6\,.\,\delta^2 + 6\,.\,\delta^3 + \cdots = \dfrac{6}{1-\delta}$

🖮 Suponiendo que el Jugador 2 no coopera en el primer período, siguiendo la estrategia del Talión (TD), el Jugador 1 en el segundo período no coopera (juega NC).

Por su parte, el Jugador 2 en el segundo período tiene dos opciones:

a) Volver a cooperar C, en cuyo caso el Jugador 1 volverá a cooperar en el tercer período, regresando al punto de partida.

b) Continuar no cooperando en el segundo período jugando NC indefinidamente, con lo que el Jugador 1 seguirá jugando también NC.

♦ En el caso que el Jugador 2 vuelva a cooperar en el segundo período, con la estrategia de TD, el pago que obtendrá será:

Acciones	T = 1	T = 2	T = 3	T = 4	T = 5	••••
Jugador 1	C	NC	C	NC	C	••••
Jugador 2	NC	C	NC	C	NC	••••

Pagos						
Jugador 1	− 2	8	− 2	8	− 2	••••
Jugador 2	8	− 2	8	− 2	8	••••

Ganancia Jugador 2:

$$8 - 2.\delta + 8.\delta^2 - 2.\delta^3 + 8.\delta^4 - \cdots = (8 + 8\delta^2 + 8\delta^4 + \cdots) - (2\delta + 2\delta^3 + \cdots) =$$

$$= \frac{8}{1-\delta^2} - \frac{2\delta}{1-\delta^2} = \frac{8-2\delta}{1-\delta^2}$$

♦ En el caso que el Jugador 2 sigue no cooperando, jugando NC indefinidamente

Acciones	T = 1	T = 2	T = 3	T = 4	T = 5	••••
Jugador 1	C	NC	NC	NC	NC	••••
Jugador 2	NC	NC	NC	NC	NC	••••

Pagos						
Jugador 1	− 2	2	2	2	2	••••
Jugador 2	8	2	2	2	2	••••

Ganancia Jugador 2: $8 + 2.\delta + 2.\delta^2 + 2.\delta^3 + \cdots = 8 + \dfrac{2\delta}{1-\delta}$

La estrategia (C, C) es un equilibrio de Nash si su pago es mayor o igual que cualquiera de las posibles pagos en que pueden incurrir los jugadores en sus desviaciones, esto es, se tienen que cumplir simultáneamente las desigualdades:

$$\begin{cases} \dfrac{6}{1-\delta} \geq \dfrac{8-2\delta}{1-\delta^2} \\ \dfrac{6}{1-\delta} \geq 8 + \dfrac{2\delta}{1-\delta} \end{cases} \rightarrow \delta \geq \frac{1}{3}$$

Utilizando la estrategia del Talión, (C, C) es un equilibrio de Nash con horizonte infinito cuando $\delta \geq \dfrac{1}{3}$

Sea la matriz de pagos de dos jugadores:

		Jugador 2	
		C	D
Jugador 1	A	(1 , 1)	(5 , 0)
	B	(0 , 5)	(4 , 4)

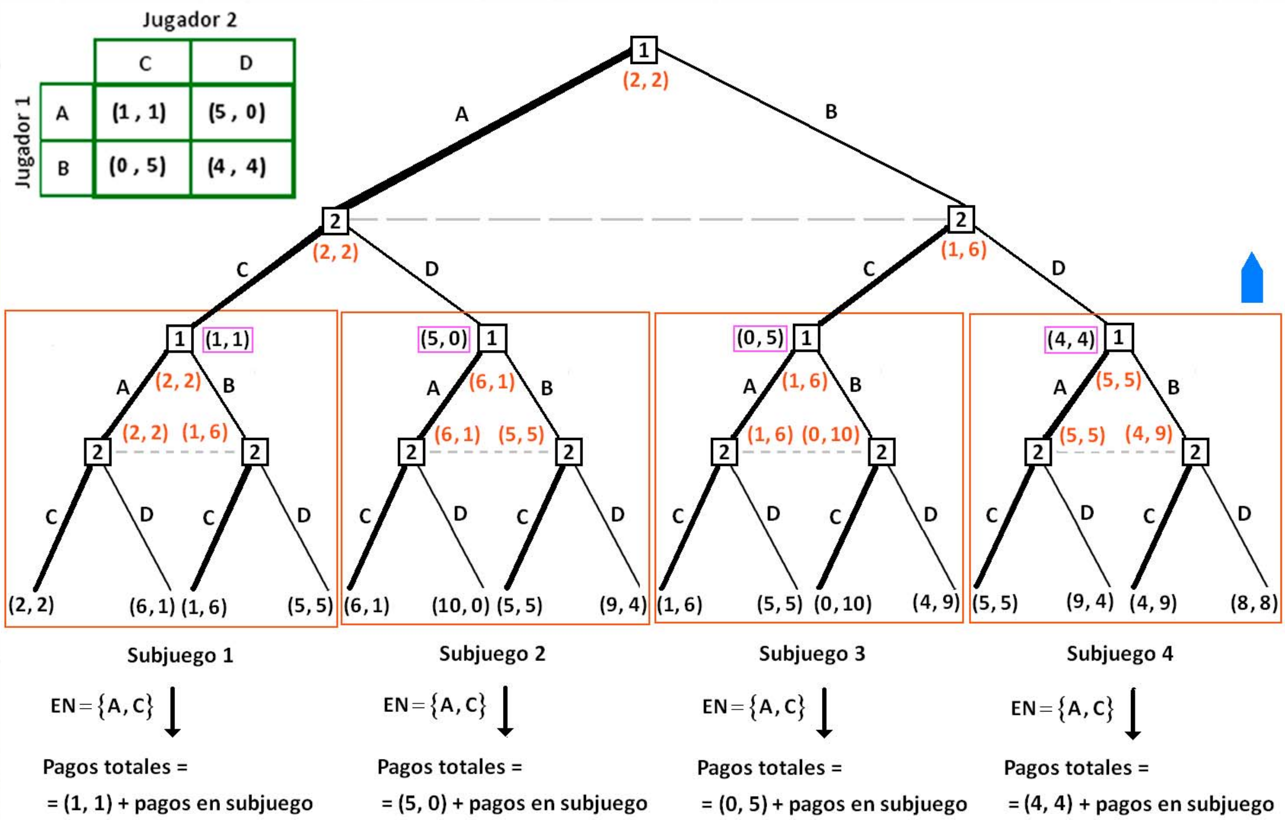
El juego simultáneo se repite dos veces en dos períodos, en $t=1$ y en $t=2$. El resultado de la primera vez que se juega $(t=1)$ es observado antes de jugarlo una segunda vez. El pago del juego repetido es la suma de los pagos en cada jugada $(t=1, t=2)$. Se pide:

a) Forma extensiva del juego. Conjuntos de información y estrategias.

b) Calcular los EN y ENPS

Solución:

a) Cuando el juego se juega solamante una vez, $(1, 1)$ es un equilibrio de Nah en estrategias dominantes.



Cada jugador tiene 5 Conjuntos de Información   Eje estrategia: ABBAA

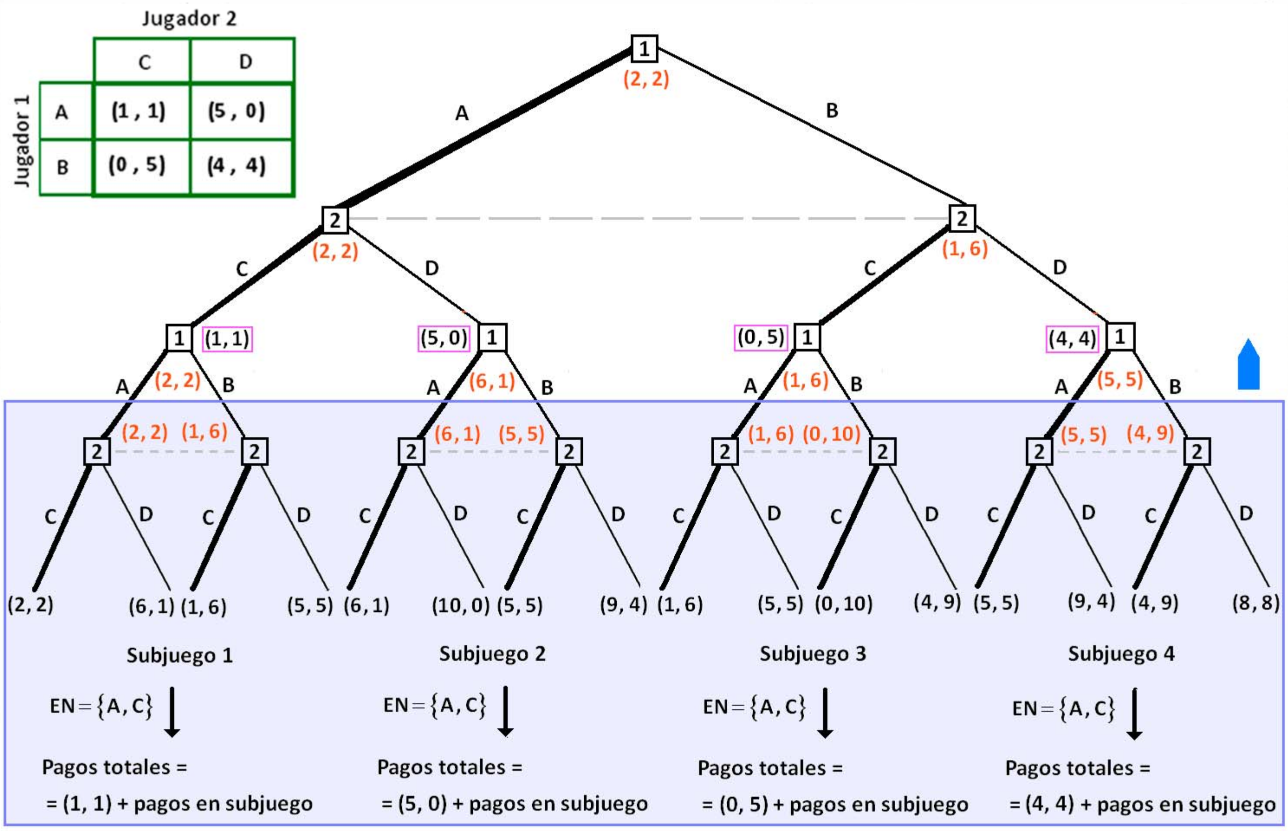
Subjuegos: 4 + Juego completo

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....



- Cálculo de EN del Subjuego 1

Pagos: $t = 2$

Jugador 1 \ Jugador 2	C	D
A	$(\bar{1}\ ,\ \underline{1})$	$(\bar{5}\ ,\ 0)$
B	$(0\ ,\ \underline{5})$	$(4\ ,\ 4)$

$EN = \{A, C\}$

Pagos: $t = 1\ +\ t = 2$

Jugador 1 \ Jugador 2	C	D
A	$(\bar{2}\ ,\ \underline{2})$	$(\bar{6}\ ,\ 1)$
B	$(1\ ,\ \underline{6})$	$(5\ ,\ 5)$

$EN = \{A, C\}$

El resultado es independiente de que se tomen los pagos solo de esa etapa o los pagos totales.

En cada uno de los cuatro subjuegos hay un único equilibrio de Nash: $EN = \{A, C\}$

- Cálculo de EN del Juego completo

		Jugador 2	
		C	D
Jugador 1	A	$(\overline{2}, \underline{2})$	$(\overline{6}, 1)$
	B	$(1, \underline{6})$	$(5, 5)$

El pago de EN $(1, 1)$ de la segunda etapa ha sido añadido a los pagos de $t = 1$

- $\text{ENPS} = \{\text{A AAA, C CCCC}\}$

El jugador 1 juega A en $t = 1$ y juega A en $t = 2$ para todo resultado posbile en $t = 1$

El jugador 2 juega C en $t = 1$ y juega C en $t = 2$ para cualquier resultado de la primera etapa.

Hoja nº ....

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

JUEGOS REPETIDOS: ESTRATEGIAS CON PREMIO Y CASTIGO

Cuando un juego de etapa tiene dos o más EN, pueden existir ENPS en los que en alguna etapa *no* se juegan estrategias que sean EN pero se juega algo que es mejor para los dos jugadores.

Se juega dos veces el juego de etapa que se describe en forma normal:

		Jugador 2		
		A_2	B_2	C_2
Jugador 1	A_1	$(\bar{1}\,,\,\underline{1})$	$(\bar{5}\,,\,0)$	$(0\,,\,0)$
	B_1	$(0\,,\,\underline{5})$	$(4\,,\,4)$	$(0\,,\,0)$
	C_1	$(0\,,\,0)$	$(0\,,\,0)$	$(\bar{3}\,,\,\underline{3})$

Se observa que tiene dos $EN = \{(A_1, A_2)\,,\,(C_1, C_2)\}$ en estrategias puras, mientras que (B_1, B_2) no es un equilibrio de Nash pero tiene pagos de Pareto.

Utilizando estrategias con premios y castigos creibles, es decir, se premia y se castiga jugando estrategias que sean EN: Se premia al jugar (C_1, C_2) con pago $(3\,,\,3)$, se castiga al jugar (A_1, A_2) con pago $(1\,,\,1)$

El juego en forma normal que resulta en $t = 1$:

		Jugador 2		
		A_2	B_2	C_2
Jugador 1	A_1	$(\bar{2}\,,\,\underline{2})$	$(6,\,1)$	$(1\,,\,1)$
	B_1	$(1\,,\,6)$	$(\bar{7}\,,\,\underline{7})$	$(1\,,\,1)$
	C_1	$(1\,,\,1)$	$(1\,,\,1)$	$(\bar{4}\,,\,\underline{4})$

Tiene tres $EN = \{(A_1, A_2)\,,\,(B_1, B_2)\,,\,(C_1, C_2)\}$, con lo que (B_1, B_2) es una jugada de EN
Se observa que si el Jugador 1 juega B_1 el Jugador 2 tiende a desviarse y jugar A_2 pues gana 5 en lugar de 4. Para evitar que no se desvíe $4 + \text{premio} > 5 + \text{castigo}$, es decir, $4 + 3 > 5 + 1$.
Para que sea ENPS los premios y castigos deben de ser jugadas que sean EN
Si los pagos en el desvio fueran mayores no se podría sostener (B_1, B_2) en $t = 1$ en un ENPS:

Jugador 2

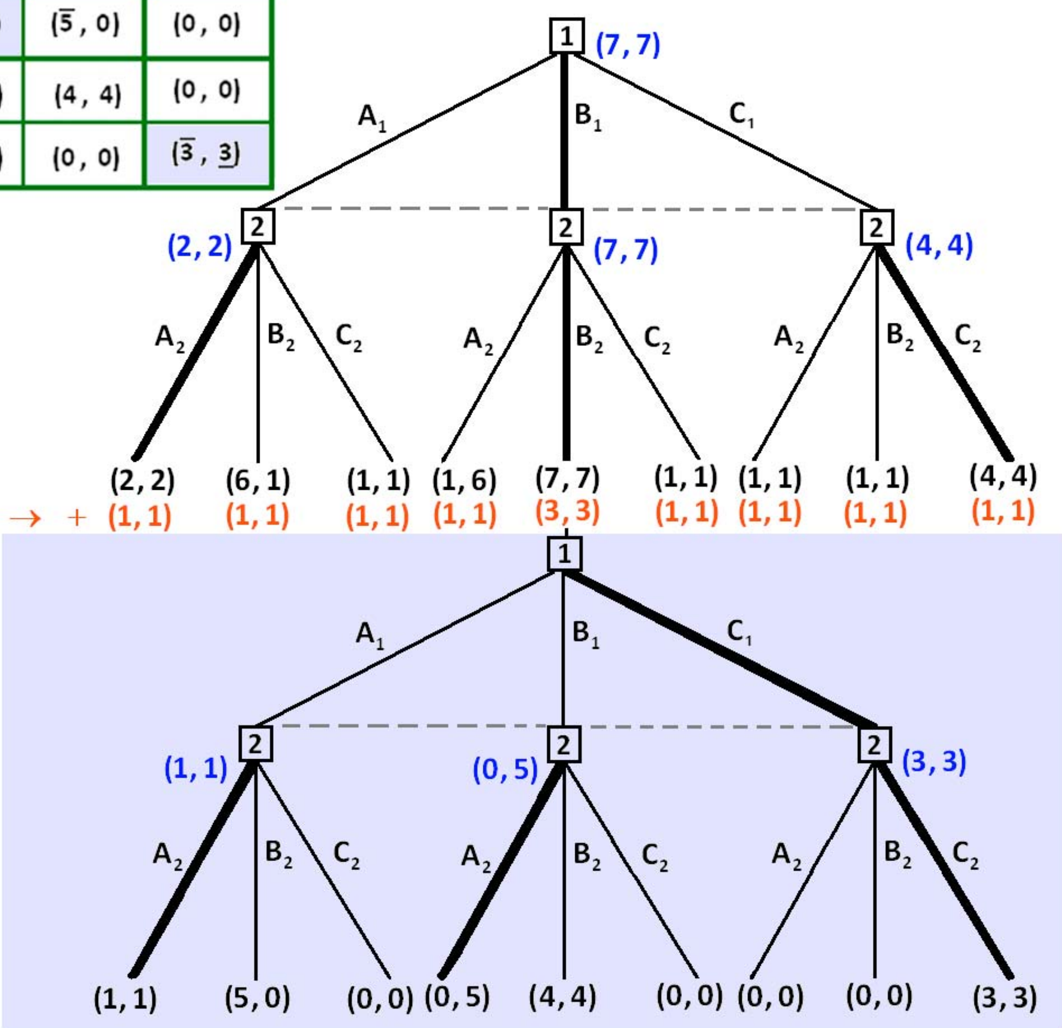
Jugador 1	A_2	B_2	C_2
A_1	$(\bar{1}\,,\ \underline{1})$	$(\bar{5}\,,\ 0)$	$(0\,,\ 0)$
B_1	$(0\,,\ 7)$	$(4\,,\ 4)$	$(0\,,\ 0)$
C_1	$(0\,,\ 0)$	$(0\,,\ 0)$	$(\bar{3}\,,\ \underline{3})$

sI el Jugador 1 juega B_1 el Jugador 2 tiende a desviarse y jugar A_2, gana 7 en lugar de 4. Para evitar que no se desvíe $4 + \text{premio} > 7 + \text{castigo}$, y no se cumple, $4 + 3 > 7 + 1$.
El Jugador 2 se desvía y no es ENPS.

- Estrategias de ENPS:

Jugador 2

Jugador 1	A_2	B_2	C_2
A_1	$(\bar{1}\,,\ \underline{1})$	$(\bar{5}\,,\ 0)$	$(0\,,\ 0)$
B_1	$(0\,,\ \underline{5})$	$(4\,,\ 4)$	$(0\,,\ 0)$
C_1	$(0\,,\ 0)$	$(0\,,\ 0)$	$(\bar{3}\,,\ \underline{3})$



☞ En $t = 1$ el Jugador 1 juega B_1 y el Jugador 2 juega B_2

☞ En $t = 2$:

El Jugador 1 juega C_1 si observa que en $t = 1$ se jugó (B_1, B_2) y juega A_1 si se jugó algo distinto. El Jugador 2 juega C_2 si observa que en $t = 1$ se jugó (B_1, B_2) y juega A_2 si se jugó algo distinto.

En cada subjuego de $t = 2$ se juega (C_1, C_2) o se juega (A_1, A_2), con lo que en cada subjuego las estrategias generan un EN.

Por inducción hacia atrás se calculan los EN del juego completo, sustituyendo los subjuegos por sus pagos en EN.

JUEGOS REPETIDOS EN INFINITAS ETAPAS

Sea G un juego de etapa, y sea $G(\infty, \delta)$ el juego consistente en repetir el juego G indefinidamente en el tiempo con una tasa de descuento por etapa de δ, de modo que en cada etapa los jugadores conocen los resultados de las etapas anteriores.

Se considera una función de pagos aditiva, de modo que el pago final de *n* etapas es la suma de los pagos de cada etapa. Se demuestra que, incluso si G tiene un único punto de equilibrio de Nash, existen resultados perfectos en subjuegos que no son jugar ese equilibrio.

En este planteamiento es necesaria una tasa o factor de descuento, pues de otra forma, la suma de pagos sería infinita.

El valor presente de una sucesión de pagos $\{u_t\}_{t \geq 1}$, aplicando el factor de descuento, será

$$\sum_{t=1}^{\infty} u_t \,.\, \delta^{t-1}$$

ESTRATEGIA DEL DISPARADOR: DILEMA DEL PRISIONERO

		Jugador 2	
		C	NC
Jugador 1	C	(1 , 1)	(5 , 0)
	NC	(0 , 5)	(4 , 4)

← Matriz de pagos

La estrategia del disparador consiste en cooperar durante las etapas hasta que un jugador deje de cooperar, en que se cambia a jugar el equilibrio de Nash.

- Si el Jugador 2 sigue la estrategia de cooperación la ganancia será:

$$\sum_{t=1}^{\infty} u_t \,.\, \delta^{t-1} = \sum_{t=1}^{\infty} 4 \,.\, \delta^{t-1} = 4 \;+\; 4 \,.\, \delta \;+\; 4 \,.\, \delta^2 \;+\; \cdots \;= \frac{4}{1-\delta} \quad \text{p. geométrica ilimitada}$$

- Si el Jugador 2 cambia de estrategia en la primera etapa y no coopera, el Jugador 1 no volverá a cooperar en ningún momento futuro y la combinación de estrategias (a corto plazo) de primer período será (C, NC) y en el resto de períodos (C, C). La ganancia será:

$$5 + \sum_{t \geq 2} u_t \,.\, \delta^{t-1} = 5 + \sum_{t \geq 2} \delta^{t-1} = 5 + \frac{\delta}{1-\delta}$$

Se analizan las ganancias obtenidas por el Jugador 2 en cada caso para ver si tienen incentivos a desviarse del acuerdo de cooperación.

$$5+\frac{1}{1-\delta}>\frac{4}{1-\delta} \quad \rightarrow \quad 5-4\delta>4 \quad \rightarrow \quad \delta<\frac{1}{4}$$

Como el juego es simétrico y considerando por simplicidad que ambos jugadores tienen el mismo factor de descuento, el factor de descuento tendría que ser $\delta<\frac{1}{4}$ para que el Jugador 2 prefiera no cooperar.

Es decir, el valor hoy de un dinero ganado en la siguiente etapa tendría que ser menor que la cuarta parte, lo que no parece parece admisible ni una hipótesis razonable para los tipos de interés que se manejan habitualmente, aunque en casos de mucha inflación se hayan presentado circunstancias semejantes.

El ejemplo anterior, sirve para introducir los resultados siguientes:

En un juego repetido infinitamente del tipo $G(\infty, \delta)$, cada subjuego que se inicia en la etapa $(t+1)$ es idéntico al original.

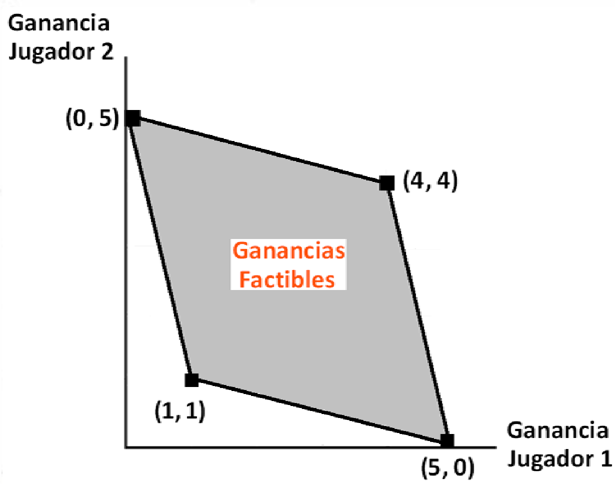
Se definen Ganancias Factibles a las ganancias $(u_1, \ \ldots \ , u_n)$ en el juego de etapa G si son combinación convexa (media ponderada donde las ponderaciones son no negativas y suman uno) de las ganancias a las estrategias puras G.

Las ganancias a las estrategias puras $(1,1)$, $(0,5)$, $(4,4)$ y $(5,0)$ son factibles.

Otros pagos factibles son:

Los pares (x,x) con $1<x<4$, que resultan de las medias ponderadas de $(1,1)$ y $(4,4)$

Los pares (y,w) para $y+w=5$ e $0<y<5$ que resultan de las medias ponderadas de $(0,5)$ y $(5,0)$



Los otros pares en el interior de la zona xombreada son medias ponderadas de las ganancias de más de dos estrategias puras.

Los jugadores pueden utilizar una mecanismo aleatorio para obtener una media ponderada de las ganancias de estrategias puras.

Hoja nº ....

UAM UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

(IMPRESO EN PAPEL RECICLADO) UNICAMENTE PARA USO ESCOLAR

GANANCIA MEDIA

Se define como la ganancia constante (igual en todas las etapas, salvo el factor de descuento) que debería tenerse en cada etapa para que tuviera el mismo valor presente que una ganancia dada por una sucesión de estrategias.

Sea δ el factor de descuento que tiene un valor presente V. En caso de recibir una ganancia u en cada etapa, el valor presente sería $\dfrac{u}{1-\delta}$. Para que u sea la ganancia media de la sucesión infinita $(u_1, \ldots, u_n)$ con un factor de descuento δ, estos dos valores presentes han de ser iguales, en consecuencia $u = V(1-\delta)$.

Es decir, la ganancia media es $(1-\delta)$ veces el valor presente.

Dado el factor de descuento δ, la ganancia media de la sucesión infinita de ganancias $u_1, u_2, u_3, \ldots.$ es:

$$u = (1-\delta)\sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} u_t$$

La ventaja de la ganancia media con respecto al valor presente es que la primera es directamente comparable con las ganancias del juego de etapa.

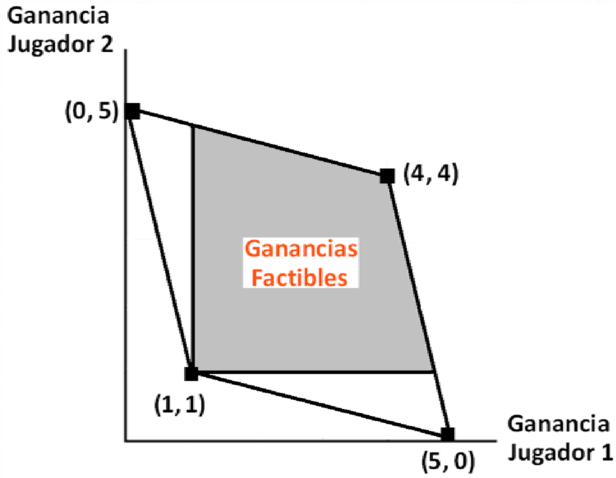
La sucesión infinita de ganancias del ejercicio tiene una ganancia media de 4 pero un valor presente de $4/(1-\delta)$. Sin embargo, como la ganancia media no es más que un valor presente, maximizar la ganancia media es equivalente a maximizar el valor presente.

El resultado principal en la discusión sobre juegos repetidos infinitamente viene dado por el Teorema de Milton Friedman (1971).

Teorema de Friedman:

Sea G un juego finito, estático y con información completa. Denominando a $(e_1, \ldots, e_n)$ a las ganancias en un equilibrio de Nash de G, y a $(u_1, \ldots, u_n)$ a otras ganancias factibles cualesquiera de G.

Si $u_i > e_i$ para cualquier jugador i y el factor de descuento δ está lo suficientemente cerca de uno, existe un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos (ENPS) del juego repetido infinitamente $G(\infty, \delta)$ que alcanza $(u_1, \ldots, u_n)$ como ganancia media.



El teorema de Friedman, siempre que el factor de descuento δ se encuentre suficientemente cerca de 1, garantiza que puede alcanzarse cualquier punto en la zona sombreada como ganancia media en un ENPS del juego repetido.

Sea $EN = \{(a_{e_1}, \dots, a_{e_n})\}$ el equilibrio de Nash de G que proporciona las ganancias de equilibrio $(e_1, \dots, e_n)$. Sean $(a_{u_1}, \dots, a_{u_n})$ la colección de acciones que proporciona las ganancias factibles $(u_1, \dots, u_n)$ - ignorando el mecanismo aleatorio público típicamente necesario para alcanzar cualquier ganancia factible.

Con el jugador i se considera la estrategia del disparador: Juega a_{u_i} en la primera etapa.

En la etapa t-ésima, si el resultado de todas las $(t-1)$ etapas anteriores ha sido jugar $(a_{u_1}, \dots, a_{u_n})$ juega a_{u_i}, en caso contrario juega a_{e_i}

Si ambos jugadores adoptan esta estrategia, el resultado en cada etapa del juego repetido infinitamente será $(a_{u_1}, \dots, a_{u_n})$, siempre que el factor de descuento δ se encuentre lo suficientemente cerca de 1. Señalar que esta estrategia es ENPS.

Si todos los jugadores excepto el jugador i han adoptado la estrategia del disparador.
Los demás jugadores jugarán siempre $(a_{e_1}, \dots, a_{e_{i-1}}, a_{e_{i+1}}, \dots, a_{e_n})$ si el resultado de alguna etapa difiere de $(a_{u_1}, \dots, a_{u_n})$.
La mejor respuesta del jugador i es jugar siempre a_{e_i} si el resultado en alguna etapa difiere de $(a_{u_1}, \dots, a_{u_n})$

Queda por determinar la mejor respuesta del jugador i en la primera etapa y en cualquier etapa en la que todos los resultado anteriores hayan sido $(a_{u_1}, \dots, a_{u_n})$.

Denotando por a_{d_i} a la mejor desviación de $(a_{u_1}, \dots, a_{u_n})$ que puede adoptar el jugador i, será una solución de:

$$\max_{a_i \in A_i} u_i(a_{u_1}, \dots, a_{u_{i-1}}, a_{u_{i+1}}, \dots, a_{u_n})$$

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

Sea d_i la ganancia a i con esta desviación: $d_i = u_i(a_{u_1}, \ \dots \ , a_{u_{i-1}}, a_{d_i}, a_{u_{i+1}}, \ \dots \ , a_{u_n})$

Ignorando el mecanismo aleatorio: La mejor desviación y su ganancia pueden depender de qué esta estrategia pura haya seleccionado el mecanismo aleatorio.
Se tiene:

$$d_i \geq u_i = (a_{u_1}, \ \dots \ , a_{u_{i-1}}, a_{u_{i+1}}, \ \dots \ , a_{u_n}) > e_i = (a_{e_1}, \ \dots \ , a_{e_{i-1}}, a_{e_{i+1}}, \ \dots \ , a_{e_n})$$

Jugar a_{d_i} proporciona una ganancia d_i en esta etapa, pero en lo sucesivo desencadena $(a_{e_1}, \ \dots \ , a_{e_{i-1}}, a_{e_{i+1}}, \ \dots \ , a_{e_n})$ por parte de los demás jugadores, con lo que la mejor respuesta del jugador i es a_{e_i}, de forma que la ganancia en cada etapa futura será e_i

El valor presente de esta sucesión de ganancias será: $V_i = d_i + \delta \, . \, e_i + \delta^2 \, . \, e_i + \ \dots \ = d_i + \dfrac{\delta}{1-\delta} e_i$

Como cualquier desviación desencadena la misma respuesta de los demás jugadores, sólo se necesita considerar la desviación más ventajosa.

Alternativamente, jugar a_{u_i} proporciona una ganancia u_i en esta etapa y conduce a la misma elección entre a_{d_i} y a_{u_i} en la siguiente etapa.

Denotando por V_i el valor presente de las ganancias del juego de etapa que recibe el jugador i por elegir óptimamente (y cada vez que lo haga en lo sucesivo)

Si jugar a_{u_i} es óptimo, se tiene: $V_i = u_i + \delta V_i \quad \rightarrow \quad V_i = \dfrac{u_i}{1-\delta}$

$d_i \equiv$ Ganancia mayor a la mejor desviación del jugador i entre las diferentes combinaciones de estrategias puras sleccionadas por el mecanismo aleatorio.

En consecuencia, jugar a_{u_i} es óptimo $\Leftrightarrow \quad \dfrac{u_i}{1-\delta} \geq d_i + \dfrac{\delta}{1-\delta} e_i \quad \Rightarrow \quad \delta \geq \dfrac{d_i - u_i}{d_i - e_i}$

En resumen, en la primera etapa y en cualquier etapa donde los resultados anteriores hayan sido $(a_{u_1}, \ \dots \ , a_{u_n})$, la decisión óptima del jugador i (puesto que los demás jugadores han adoptado la estrategia del disparador) es $a_{u_i} \Leftrightarrow \ \delta \geq \dfrac{d_i - u_i}{d_i - e_i}$

Por otra parte, considerando que la mejor respuesta del jugador i es jugar a_{e_i} para siempre si el resultado de alguna etapa difiere de $(a_{u_1}, \ \ldots \ , a_{u_n})$, se concluye que jugar la estrategia del disparador por parte de todos los jugadores es un EN $\Leftrightarrow \ \ \delta \geq \max\limits_i \dfrac{d_i - u_i}{d_i - e_i}$

Siendo $d_i \geq u_i \geq e_i \ \rightarrow \ \dfrac{d_i - u_i}{d_i - e_i} < 1 \quad \forall i$

Falta demostrar que este EN es perfecto en subjuegos, es decir, que las estrategias del disparador constituyen un equilibrio de Nash en cada subjuego de $G(\infty, \delta)$, señalando que cada subjuego de $G(\infty, \delta)$ es idéntico al propio $G(\infty, \delta)$.

Si los jugadores adoptan la estrategia del disparador en el juego completo, los subjuegos se pueden agrupar en dos clases:

- Subjuegos en los que los resultados de las etapas anteriores han sido $(a_{u_1}, \ \ldots \ , a_{u_n})$: Las estrategias de los jugadores en un subjuego de primera etapa son de nuevo las estrategias del disparador, que constituyen un equilibrio de Nash del juego completo.

- Sujuegos en los que el resultado de al menos una etapa difiere de $(a_{u_1}, \ \ldots \ , a_{u_n})$: Las estrategias de los jugadores en un subjuego de segunda etapa consisten en repetir el equilibrio del juego de etapa $(a_{e_1}, \ \ldots \ , a_{e_n})$, lo que es un equilibrio de Nash del juego completo.

Por tanto, el equilibrio de Nash con estrategias del disparador del juego repetido infinitamente es perfecto en subjuegos.

PREMIOS NOBEL DE ECONOMIA: http://www.estadistica.net/Nobel/economic0.html

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

Sea el juego dinámico que consiste en jugar un número infinito de períodos el dilema del prisionero, donde $C \equiv$ Coopera, $NC \equiv$ No Coopera

		Jugador 2	
		C	NC
Jugador 1	C	(4 , 4)	(0 , 5)
	NC	(5 , 0)	(1 , 1)

Se supone que ambos jugadores tienen un factor de descuento $\delta_1 = \delta_2 = \dfrac{1}{2}$.

Se considera la siguiente estrategia:

En $T = 1$ cooperan

En $T > 1$ coopera si y sólo si el otro jugador ha cooperado en $T - 1$

a) ¿Cuáles son los pagos resultantes sí ambos jugadores siguen esta estrategia?

b) ¿Es un Equilibrio de Nash?

Solución:

a) Si los jugadores cooperan el resultado para cada jugador será un pago de

Acciones	$T=1$	$T=2$	$T=3$	$T=4$	••••
Jugador 1	C	C	C	C	••••
Jugador 2	C	C	C	C	••••

Pagos					
Jugador 1	4	4	4	4	••••
Jugador 2	4	4	4	4	••••

El pago de cada jugador será:

$$\sum_{t=1}^{\infty} u_t \,.\, \delta_i^{t-1} = \sum_{t=1}^{\infty} 4 \,.\, \delta_i^{t-1} = 4 + 4\,.\,\delta_i + 4\,.\,\delta_i^2 + \cdots = \frac{4}{1-\delta_i} = \frac{4}{1-(1/2)} = 8$$

b) Para analizar si es EN se resuelve por inducción

Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....

Si el Jugador 1 no coopera en la primera etapa obtendrá una ganancia:

Acciones	T = 1	T = 2	T = 3	T = 4	••••
Jugador 1	NC	C	C	C	••••
Jugador 2	C	C	C	C	••••

Pagos					
Jugador 1	5	4	4	4	••••
Jugador 2	0	4	4	4	••••

En la etapa 1:

$$u_1^{\bullet} = \underbrace{5+\delta_1} + \overbrace{4.\,\delta_2^2 + 4.\,\delta_2^3 + 4.\,\delta_2^4 + \ \dots} = 5+\delta_1+\frac{4\,\delta_2^2}{1-\delta_2} = 5+\frac{1}{2}+\frac{4\,(1/4)}{1-(1/2)} = 7+\frac{1}{2} \ \rightarrow$$

$$\rightarrow \ 7+\frac{1}{2} < 8$$ no esta incentivado para cambiar

Si el Jugador 1 coopera en la etapa 1 pero no coopera en la etapa 2 obtendrá una ganancia:

Acciones	T = 1	T = 2	T = 3	T = 4	••••
Jugador 1	C	NC	NC	NC	••••
Jugador 2	C	C	NC	NC	••••

Pagos					
Jugador 1	4	5	4	4	••••
Jugador 2	4	0	4	4	••••

En la etapa 2:

$$u_1^{\bullet\bullet} = 4 + \underbrace{5.\,\delta_2 + \delta_2^2} + \overbrace{4.\,\delta_1^3 + 4.\,\delta_1^4 + 4.\,\delta_1^5 + \dots} = 4+5.\,\delta_2+\delta_2^2+\frac{4.\,\delta_1^3}{1-\delta_1} =$$

$$= 4+\frac{5}{2}+\frac{1}{4}+1 = \frac{31}{4} = \frac{28+3}{4} = 7+\frac{3}{4} < 8$$ no esta incentivado para cambiar

por recurrencia:

$$\begin{cases} u_1^{\bullet} = 7+\dfrac{1}{2} = 7+\dfrac{2^1-1}{2^1} \\ u_1^{\bullet\bullet} = 7+\dfrac{3}{4} = 7+\dfrac{2^2-1}{2^2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_1^{n} = 7+\dfrac{2^n-1}{2^n} \end{cases}$$

En la etapa n: Si el jugador 1 colabora hasta la etapa $(n-1)$ inclusive pero decide no colaborar en la etapa n, obtendrá $u_1^n = 7 + \dfrac{2^n - 1}{2^n} < 8$, por lo que no esta incentivado para cambiar.

		Jugador 2	
		C	NC
Jugador 1	C	$(\overline{4}\,,\ \underline{4})$	$(0\,,\ \underline{5})$
	NC	$(\overline{5}\,,\ 0)$	$(1\,,\ 1)$

En definitiva, el jugador 1 no esta incentivado para desviarse de la estrategia propuesta.
En conclusión, el perfil de estrategias del enunciado es un $EN = \{(4, 4)\}$

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....

El juego en forma normal G, con la matriz de pagos expuesta, se repite infinitamente

		Jugador 2	
		C	D
Jugador 1	A	(4 , 1)	(3 , 2)
	B	(1 , 4)	(6 , 3)

Hallar un EN y un factor de descuento δ que lleven a unas ganancias medias de $(6, 3)$

Solución:

Se calculan las correspondencias BR_i de mejor respuesta para ambos jugadores.

			Jugador 2	
			q	$1-q$
			C	D
Jugador 1	p	A	$(\bar{4}, 1)$	$(3, 2)$
	$1-p$	B	$(1, \underline{4})$	$(\bar{6}, \underline{3})$

Las *Utilidades esperadas* o pagos de cada jugador:

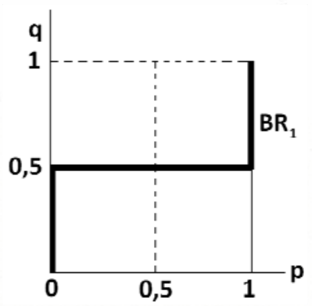
$$E[U_1] = 4\,.\,pq + 3\,.\,p(1-q) + 1\,.\,(1-p)q + 6\,.\,(1-p)(1-q) = 6pq - 3p - 5q + 6$$

Derivando parcialmente respecto a p se puede analizar la influencia sobre la utilidad esperada del Jugador 1

$$\frac{\vartheta E[U_{P1}]}{\vartheta p} = \frac{\vartheta(6pq - 3p - 5q + 6)}{\vartheta p} = 6q - 3 \equiv \begin{cases} < 0 & q < 0{,}5 \\ = 0 & q = 0{,}5 \\ > 0 & q > 0{,}5 \end{cases}$$

Denotando por BR_1 la Mejor Respuesta del Jugador 1, adopta la forma:

$$BR_1(q) = \begin{cases} p = 0 & q < 0{,}5 \\ p \in [0,1] & q = 0{,}5 \\ p = 1 & q > 0{,}5 \end{cases}$$



Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

La Utilidad esperada del Jugador 2:

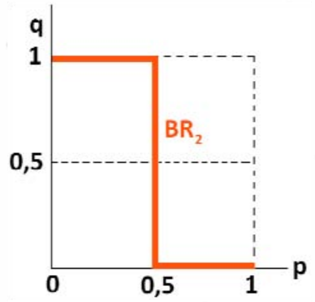
$$E\left[U_2\right] = 1\,.\,pq \,+\, 2\,.\,p(1-q) \,+\, 4\,.\,(1-p)q \,+\, 3\,.\,(1-p)(1-q) = -2pq - p + q + 3$$

Derivando parcialmente respecto a q se puede analizar la influencia sobre la utilidad esperada del Jugador 2

$$\frac{\vartheta E\left[U_2\right]}{\vartheta q} = \frac{\vartheta(-2pq - p + q + 3)}{\vartheta q} = -2p + 1 \equiv \begin{cases} < 0 & p > 0{,}5 \\ = 0 & p = 0{,}5 \\ > 0 & p < 0{,}5 \end{cases}$$

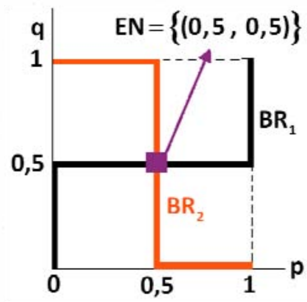
Denotando por BR_2 la Mejor Respuesta del Jugador 2, adopta la forma:

$$BR_2(p) = \begin{cases} q = 0 & p > 0{,}5 \\ q \in [0{,}1] & p = 0{,}5 \\ q = 1 & p < 0{,}5 \end{cases}$$



La solución se encuentra en la intersección.

$$EN = \{(0{,}5\ ,\ 0{,}5)\}$$



El teorema de Friedman establece que si $u_i > e_i$ para cada jugador i y δ está lo suficientemente cerca de uno, existe un ENPS (equilibrio de Nash perfecto en subjuegos) del juego repetido infinitamente $G(\infty, \delta)$ que alcanza $(u_1, u_2, \ \dots\ , u_n)$ como ganancia media.

Pagos o ganancias factibles en el juego de etapa G: $(6, 3) = \{u_1(B, D),\ u_2(B, D)\}$

Pagos o ganancias en el equilibrio de Nash:

$$e_1 = u_1(0{,}5,\ 0{,}5) = u_1(0{,}5,\ B) = 1\,.\,0{,}5 + 6\,.\,0{,}5 = 3{,}5$$

$$e_2 = u_2(0{,}5,\ 0{,}5) = u_2(0{,}5,\ D) = 2\,.\,0{,}5 + 3\,.\,0{,}5 = 2{,}5$$

Siendo $u_1 = 6 > 3{,}5 = e_1$ y $u_2 = 3 > 2{,}5 = e_2$ se puede aplicar el teorema de Friedman

Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

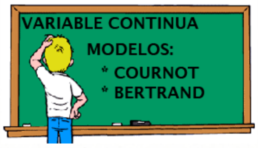
Ejercicio del día ....

Considerando la desviación más ventajosa, el factor de descuento:

$$\delta > \max\left\{\frac{6-u_1}{6-e_1}, \frac{4-u_2}{4-e_2}\right\} = \max\left\{\frac{6-6}{6-3,5}, \frac{4-3}{4-2,5}\right\} = 0,67$$

ESTRATEGIA JUGADOR 1: Juega B a no ser que el Jugador 2 haya jugado alguna vez una estrategia que no sea D. En este caso, el Jugador 1 juega la estrategia mixta 0,5 (estrategia del Jugador 1 en equilibrio de G) para siempre.

ESTRATEGIA JUGADOR 2: Juega D a no ser que el Jugador 1 haya jugado alguna vez una estrategia que no sea B. En este caso, el Jugador 2 juega la estrategia mixta 0,5 (estrategia del Jugador 2 en equilibrio de G) para siempre.



VARIABLE CONTINUA:

En muchos juegos las estrategias puras que pueden elegir dos jugadores no son un número finito, sino que tienen infinitas posibilidades.

La mayoria de las aplicaciones económicas de juegos estáticos se caracterizan por tener un espacio de estrategias continuo.

- Dos oligopolistas que deben decidir qué cantidad de producto sacan al mercado.

El espacio de estrategias se encuentra el intervalo $\left[0,\, q_i\right]$, donde $q_i \equiv$ capacidad de producción máxima para la Empresa i.

- Una estrategia mixta es un ejemplo de variable continua.

Estos juegos se resuelven encontrando la función de Mejor Respuesta o Función de Reacción que indican qué acción escogerá un jugador (Mejor Respuesta) para cada una de las posibles acciones de sus rivales.

FUNCIÓN DE MEJOR RESPUESTA

- Función de pagos diferenciable (Competencia en cantidades, Contribuciones voluntarias a un bien público)

✓ La función de Mejor Respuesta, si la función es cóncava, surge de la condición de primer orden del programa de maximización.

✓ Para otros tipos de funciones hay que considerar las condiciones de orden superior.

- Función de pagos no diferenciable o lineal (Competencia de precios, Problemas de reparto)

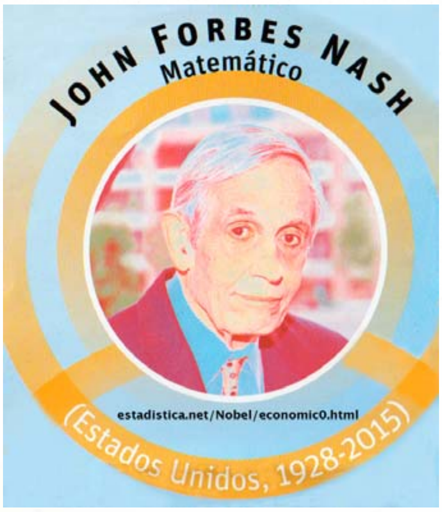
MODELO DE COURNOT

Cournot en 1838 aplicó la teoría de juegos en el ámbito industrial, desarrolló un modelo en el que un número reducido de empresas interactuaban dentro de un mercado en el que se ponía a la venta un producto homogéneo.
Las empresas competían en cantidades, es decir, tenían que determinar la cantidad que querían vender de dicho producto de manera simultánea.
La cantidad puesta a la venta era establecida por la función de demanda inversa, una vez puesta a la venta la determinada cantidad se estipulaba el precio.

En el Modelo de Cournot se distinguen dos casos: El Duopolio, caracterizado por ser una interacción entre dos empresas y el Oligopolio, donde interactuan n empresas.

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....



John Nash desarrolló estudios en torno a la teoría de juegos, que le valieron el Premio Nobel de Economía en 1994.

Identificó puntos básicos sobre estrategias y posibilidades de predicción del comportamiento que se dan en juegos no cooperativos.

El denominado equilibrio de Nash define la confrontación entre la cooperación y el deseo de obtener el máximo beneficio.

Los notables logros de John inspiraron a generaciones de matemáticos, economistas y científicos. John Nash se ganó un lugar especial en la historia por sus contribuciones revolucionarias en áreas tan diversas de las matemáticas como teoría de los juegos, geometría, topología y ecuaciones diferenciales parciales.

Hoja nº ....

UAM
UNIVERSIDAD AUTONOMA
DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....

UNICAMENTE PARA USO ESCOLAR (IMPRESO EN PAPEL RECICLADO)

Hoja nº ....

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

MODELOS ECONÓMICOS.

TEORÍA DE LAS SUBASTAS.


Cournot (1801-1877)


Stackelberg (1901-1946)


Bertrand (1822-1900)


Vickrey (1914-1996)

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

(IMPRESO EN PAPEL RECICLADO) UNICAMENTE PARA USO ESCOLAR

DUOPOLIO DE COURNOT: COMPETENCIA EN CANTIDADES

La competencia entre dos empresas se puede describir por medio del equilibrio de Nash.

La empresa 1 y la empresa 2 compiten en un mercado por un producto homogéneo (no hay diferencia en quién lo produce).

Cada una de ellas utilizará como estrategia la cantidad q_i que produce.

Oferta del mercado: $Q = q_1 + q_2$.

El coste de producción unitario es igual para las dos empresas.

El coste total es función de la cantidad producida $C_i(q_i) = c\,q_i$, y menor que el precio máximo de venta $c < a$

El proceso se realiza sólo una vez (juego estático).

La función de demanda inversa, función que establece los precios, es decreciente y lineal en el intervalo $[0, a/b]$, determinada por la función:

$$P(Q) = \begin{cases} a - bQ & bQ < a \\ 0 & bQ \geq a \end{cases} \quad \text{donde} \begin{cases} a \equiv \text{Tamaño del mercado} \\ -b \equiv \text{Sensibilidad del cosumidor al precio} \end{cases} \qquad b > 0$$

La utilidad de cada empresa es el beneficio que obtienen en la venta del producto. Es decir, la función de pagos (beneficios netos) es:

$$\pi_1(q_1, q_2) = q_1\left[a - b\,q_1 - b\,q_2\right] - c\,q_1 = q_1\left[a - b\,q_1 - b\,q_2 - c\right] = u_1(q_1, q_2)$$

$$\pi_2(q_1, q_2) = q_2\left[a - b\,q_1 - b\,q_2\right] - c\,q_2 = q_2\left[a - b\,q_1 - b\,q_2 - c\right] = u_2(q_1, q_2)$$

Descritas las funciones de demanda, costes y utilidad de las empresas, el objetivo es determinar el punto de equilibrio entre las dos, es decir, determinar el EN.

La respuesta óptima de cualquiera de las dos empresas para una estrategia fijada de la otra $(q_1 \text{ o } q_2)$ se determina (en el caso de la empresa 1) resolviendo la función:

$$\max_{q_1} u_1(q_1, q_2) = q_1\,(a - b\,q_1 - b\,q_2 - c) \qquad 0 \leq q_1 \leq a/b$$

Se trata de obtener el máximo beneficio o el máximo pago, solución que tiene que estar en el intervalo $\left[0, a/b\right]$, donde se cumple que la cantidad que van a producir ambas empresas es positiva y además que para cada cantidad producida los beneficios son máximos. Estas dos situaciones se denominan, respectivamente, condiciones de *primer* y *segundo orden*

Condición de primer orden:

$$\frac{\vartheta u_1(q_1,q_2)}{\vartheta q_1}=\frac{\vartheta q_1(a-bq_1-bq_2-c)}{\vartheta q_1}=0 \;\rightarrow\; a-2bq_1-bq_2-c=0 \;\rightarrow\; q_1=\frac{a-bq_2-c}{2b}$$

Análogamente, la respuesta óptima para la empresa 2 sería:

$$\frac{\vartheta u_2(q_1,q_2)}{\vartheta q_2}=\frac{\vartheta q_2(a-bq_1-bq_2-c)}{\vartheta q_2}=0 \;\rightarrow\; a-bq_1-2bq_2-c=0 \;\rightarrow\; q_2=\frac{a-bq_1-c}{2b}$$

Condición de segundo orden (Beneficios máximos):

$$\frac{\vartheta^2 u_1(q_1,q_2)}{\vartheta q_i^2}=\frac{\vartheta(a-2bq_1-bq_2-c)}{\vartheta q_1}=-2b<0 \text{ (es un máximo)}$$

La respuesta óptima de la empresa 1 es $BR_1(q_2)=\dfrac{a-c-bq_2}{2b}$

La mejor respuesta de la empresa 2 es $BR_2(q_1)=\dfrac{a-c-bq_1}{2b}$

Si ambas son las respuestas óptimas, significa que $q_1^{\bullet}=\dfrac{a-bq_2^{\bullet}-c}{2b}$ es la respuesta óptima para $q_2^{\bullet}=\dfrac{a-bq_1^{\bullet}-c}{2b}$ y $q_2^{\bullet}$ es la respuesta óptima de $q_1^{\bullet}$, por tanto $EN=\left\{(q_1^{\bullet},q_2^{\bullet})\right\}$

Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} q_1^{\bullet}=\dfrac{a-c-bq_2^{\bullet}}{2b} \\ q_2^{\bullet}=\dfrac{a-c-bq_1^{\bullet}}{2b}\end{cases} \;\rightarrow\; q_2^{\bullet}=\frac{a-c-b\left(\dfrac{a-c-bq_2^{\bullet}}{2b}\right)}{2b}=\frac{a-c+bq_2^{\bullet}}{4b} \;\rightarrow\; q_2^{\bullet}=\frac{a-c}{3b}$$

Análogamente, $q_1^{\bullet}=\dfrac{a-c}{3b}$

El punto de equilibrio es: $EN=\left\{\left(q_1^{\bullet}=\dfrac{a-c}{3b},\; q_2^{\bullet}=\dfrac{a-c}{3b}\right)\right\}$

Cantidad producida en equilibrio: $Q^{\bullet}=q_1^{\bullet}+q_2^{\bullet}=\dfrac{2(a-c)}{3b}$

Precio en equilibrio: $P(Q^{\bullet}) = a - bQ^{\bullet} = a - \dfrac{2(a-2c)}{3} = \dfrac{a+2c}{3}$

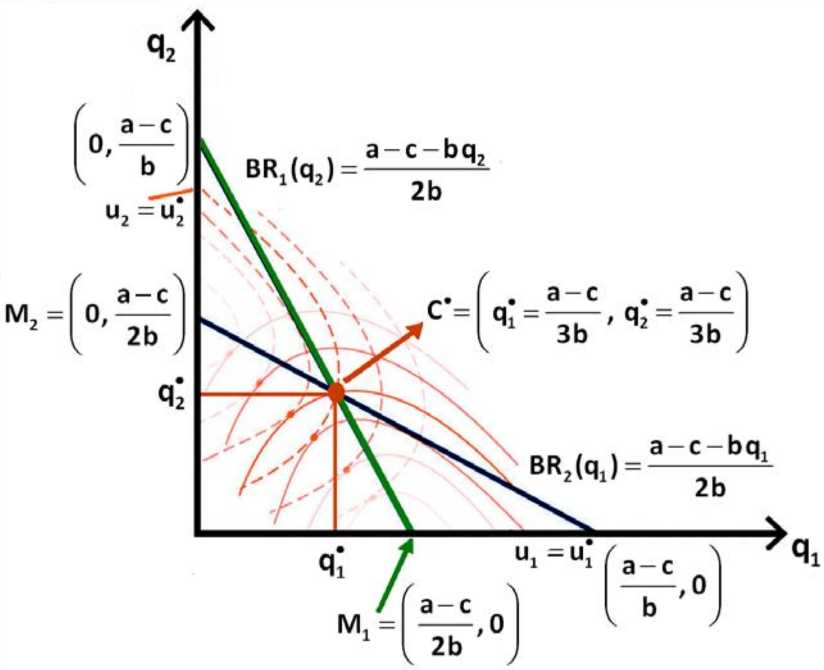
Beneficios en equilibrio:

$$u_1^{\bullet}(q_1^{\bullet}, q_2^{\bullet}) = q_1^{\bullet}\left[a - bq_1^{\bullet} - bq_2^{\bullet} - c\right] = \frac{a-c}{3b}\left[a - \cancel{b}\,\frac{a-c}{3\cancel{b}} - \cancel{b}\,\frac{a-c}{3\cancel{b}} - c\right] = \frac{(a-c)^2}{9b}$$

$$u_2^{\bullet}(q_1^{\bullet}, q_2^{\bullet}) = u_1^{\bullet}(q_1^{\bullet}, q_2^{\bullet}) = \frac{(a-c)^2}{9b}$$

Beneficio total (neto) en equilibrio: $U^{\bullet} = \dfrac{2(a-c)^2}{9b}$

Representación del Duopolio de Cournot



Los puntos M_1 y M_2 son los beneficios que la empresa obtendría en una situación de monopolio.

El punto $C^{\bullet}$ es el equilibrio de Nash.

Las curvas discontinuas reflejan las utilidades que cada empresa obtendría para cada cantidad de producto.

Con las curvas discontinuas se demuestra que $C^{\bullet}$ es el punto de equilibrio de Nash, ya que para otra cantidad fabricada por cualquiera de las dos empresas el beneficio proporcionado por las curvas de utilidad es menor.

Señalar que el Duopolio de Cournot es un dilema del prisionero ya que ambas empresas tienen incentivos a la no cooperación, al ser los beneficios mayores que los que se obtienen cuando cooperan - Esta situación no sería posible por tener prohibida la colusión según la Ley 15/2007 de 3 de julio de defensa de la competencia -.

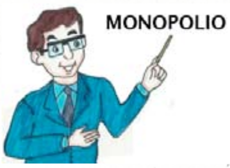
UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....

SIN COOPERAR: Las cantidades a producir por cada una de las empresas serían $q_1^\bullet = \dfrac{a-c}{3b}$ y $q_2^\bullet = \dfrac{a-c}{3b}$, que conducen a unos beneficios individuales, respectivamente, de $u_1^\bullet = \dfrac{(a-c)^2}{9b}$ y $u_2^\bullet = \dfrac{(a-c)^2}{9b}$



COOPERANDO: Las cantidades a fabricar por cada una de las empresas se obtendría dividiendo la cantidad a producir en el monopolio entre las dos.

Es decir, $q_1 = \dfrac{a-c}{4b}$ y $q_2 = \dfrac{a-c}{4b}$

Los beneficios individuales serían:

$$u_1(q_1, q_2) = q_1\left[a - bq_1 - bq_2\right] - cq_1 = \frac{a-c}{4b}\left[a - b\frac{a-c}{4b} - b\frac{a-c}{4b} - c\right] = \frac{(a-c)^2}{8b}$$

$$u_2(q_1, q_2) = q_2\left[a - bq_1 - bq_2\right] - cq_2 = \frac{a-c}{4b}\left[a - b\frac{a-c}{4b} - b\frac{a-c}{4b} - c\right] = \frac{(a-c)^2}{8b}$$

Se observa que los beneficios obtenidos cooperando son superiores a los beneficios obtenidos en la situación del equilibrio de Nash (EN): $\dfrac{(a-c)^2}{8b} > \dfrac{(a-c)^2}{9b}$

Cantidad producida en equilibrio: $Q^\bullet = q_1^\bullet + q_2^\bullet = \dfrac{a-c}{2b}$

Precio en equilibrio: $P(Q^\bullet) = a - bQ^\bullet = a - \dfrac{a-c}{2} = \dfrac{a+c}{2}$

Beneficio total (neto) en equilibrio: $U^\bullet = \dfrac{(a-c)^2}{4b}$

La producción es mayor en un duopolio que en un monopolio: $\dfrac{2(a-c)}{3b} > \dfrac{a-c}{2b}$

El precio es menor en un duopolio que en un monopolio: $\dfrac{a+2c}{3} < \dfrac{a+c}{2}$ $(a > c)$

Incentivo a coludir (formar un cartel): $\dfrac{(a-c)^2}{36}$

Como los carteles normalmente son ilegales, los agentes tratan de coludir tácitamente utilizando estrategias de reducción de producción autoimpuestas, obteniendo un efecto de subida de precios y por consiguiente un aumento en los beneficios.

DUOPOLIO DE STACKELBERG: COMPETENCIA EN CANTIDADES

El duopolio de Stackelberg (1934), conocido también como *modelo de competencia de Stackelberg*, es un modelo de competencia imperfecta basado en el juego no cooperativo. Representa un punto de inflexión en el estudio de estructuras de mercado, especialmente en el análisis de duopolios, dado que se basa en hipótesis iniciales diferentes.

Tiene el mismo planteamiento que el modelo de duopolio de Cournot. En esta situación, las dos empresas no eligen a la vez sus estrategias, sino una después de la otra y conociendo la estrategia elegida por la primera.

Esta situación es muy habitual cuando no son ofertas simultáneas, sino que una empresa toma decisiones de expansión, o de inversión, o de desarrollo, de modo que la segunda empresa actúa en respuesta a la decisión de la primera. En muchos casos, la primera es una empresa líder, y la segunda una empresa con menos poder de mercado.

Pueden ser más empresas, para simplificar se supone que son dos empresas y que sus estrategias son la elección de la cantidad de producción.

El precio unitario de venta, al igual que en el duopolio de Cournot, se considera que varía con las cantidades producidas según la función de demanda inversa en el intervalo $[0, a/b]$:

$$P(Q) = \begin{cases} a - bQ & bQ < a \\ 0 & bQ \geq a \end{cases} \quad \text{donde} \begin{cases} a \equiv \text{Tamaño del mercado} \\ -b \equiv \text{Sensibilidad del cosumidor al precio} \end{cases} \quad b > 0$$

El planteamiento en forma extensiva sería:

1. La empresa 1 elige $q_1 \geq 0$
2. La empresa 2 observa q_1 y elige $q_2 \geq 0$
3. Cada empresa recibe

$$\pi_1(q_1, q_2) = q_1\left[P(q_1 + q_2) - c\right] = q_1\left[a - bq_1 - bq_2 - c\right] = u_1(q_1, q_2)$$
$$\pi_2(q_1, q_2) = q_2\left[P(q_1 + q_2) - c\right] = q_2\left[a - bq_1 - bq_2 - c\right] = u_2(q_1, q_2)$$

Se tienen que decidir los niveles de producción en diferentes momentos de tiempo. La empresa 1 determina $q_1 \geq 0$ y la empresa 2 se fija en q_1 y decide $q_2 \geq 0$. Es una situación en la que hay dos etapas, que se resuelve por inducción hacia atrás.

De esta forma, se comienza resolviendo el problema de maximización de la empresa 2:

$$\max_{u_2} u_2(q_1, q_2) = q_2\left[a - bq_1 - bq_2 - c\right] \qquad 0 \le q_1 + q_2 \le a$$

La condición de primer orden es:

$$\frac{\vartheta u_2(q_1, q_2)}{\vartheta q_2} = \frac{\vartheta q_2(a - bq_1 - bq_2 - c)}{\vartheta q_2} = 0 \;\rightarrow\; a - bq_1 - 2bq_2 - c = 0 \;\rightarrow\; q_2^{\bullet} = \frac{a - bq_1 - c}{2b}$$

La condición de sgundo orden:

$$\frac{\vartheta^2 u_2(q_1, q_2)}{\vartheta q_2^2} = \frac{\vartheta q_2(a - bq_1 - 2bq_2 - c)}{\vartheta q_2} = -2 < 0 \quad \text{(es un máximo)}$$

Se analiza la decisión de la empresa 1, sabiendo que la empresa 2 va a determinar su producción $q_2^{\bullet} = \dfrac{a - bq_1 - c}{2b}$ para cualquier decisión que tome la empresa 1.

La empresa 1 posee cierta ventaja, puesto que puede anticiparse a la respuesta de la empresa 2 al resolver su problema de maximización, sustituyendo q_2 por su valor.

De este modo, el problema de maximización de la empresa 1 es:

$$\max_{u_1} u_1(q_1, q_2^{\bullet}) = q_1(a - bq_1 - bq_2^{\bullet} - c) = q_1\left[a - bq_1 - b\frac{a - bq_1 - c}{2b} - c\right] = q_1\left[\frac{a - bq_1 - c}{2}\right]$$

La condición de primer orden es:

$$\frac{\vartheta u_1(q_1, q_2)}{\vartheta q_1} = \frac{\vartheta}{\vartheta q_1}\left(q_1\left[\frac{a - bq_1 - c}{2}\right]\right) = 0 \;\rightarrow\; a - 2bq_1 - c = 0 \;\rightarrow\; q_1^{\bullet} = \frac{a - c}{2b}$$

Sustituyendo en la ecuación de $q_2^{\bullet}$, resulta:

$$q_2^{\bullet} = \frac{a - bq_1 - c}{2b} \;\rightarrow\; q_2^{\bullet} = \frac{a - b\dfrac{a - c}{2b} - c}{2b} = \frac{a - c}{4b}$$

El equilibrio de Nash perfecto en subjuegos $\text{ENPS} = \left\{\left(q_1^{\bullet} = \dfrac{a - c}{2b}\,,\; q_2^{\bullet} = \dfrac{a - c}{4b}\right)\right\}$

Cantidad producida en equilibrio: $Q^{\bullet} = q_1^{\bullet} + q_2^{\bullet} = \dfrac{a - c}{2b} + \dfrac{a - c}{4b} = \dfrac{3(a - c)}{4b}$

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

Implicaciones:

La cantidad total producida en equilibrio de Stackelberg $\frac{3(a-c)}{4b}$, es mayor que la cantidad total en equilibrio de Cournot $\frac{2(a-c)}{3b}$:

$$\frac{3(a-c)}{4b} > \frac{2(a-c)}{3b} \quad \rightarrow \quad \text{El precio del producto es menor}$$

Si las empresas tienen el mismo nivel de costes, la solución de Stackelberg es más eficiente que la de Cournot, ya que la producción total es más elevada y el precio es más bajo.

La cantidad que ha de producir la empresa 1: $\left(q_1^\bullet = \frac{a-c}{2b}\right)$ es la de monopolio.

Mientras que la cantidad que tiene que producir empresa 2: $\left(q_2^\bullet = \frac{a-c}{4b}\right)$ es la mitad.

Es curioso observar cómo disponer de más información a la hora de actuar no implica obtener una solución mejor, la empresa 1 sabe que cuando actúe la empresa 2 tendrá esa información. La empresa 1 es más ineficiente (tiene costos más altos).

Cuando se trata de eficiencia económica, el resultado es similar al modelo de duopolio de Cournot. El equilibrio de Nash no es Pareto eficiente. No obstante, la perdida es menor en el duopolio de Stackelberg que en el de Cournot.

Precio en equilibrio: $P(Q^\bullet) = a - bQ^\bullet = a - b\,\frac{3(a-c)}{4b} = \frac{a+3c}{4}$

Implicaciones:

El precio en equilibrio de Stackelberg es menor que el precio en equilibrio de Cournot:

$$\frac{a+3c}{4} < \frac{a+2c}{3}$$

Beneficios en equilibrio de las empresas:

$$u_1^\bullet = \left[P(Q^\bullet) - c\right].\,q_1^\bullet = \left(\frac{a+3c}{4} - c\right).\left(\frac{a-c}{2b}\right) = \frac{(a-c)^2}{8b}$$

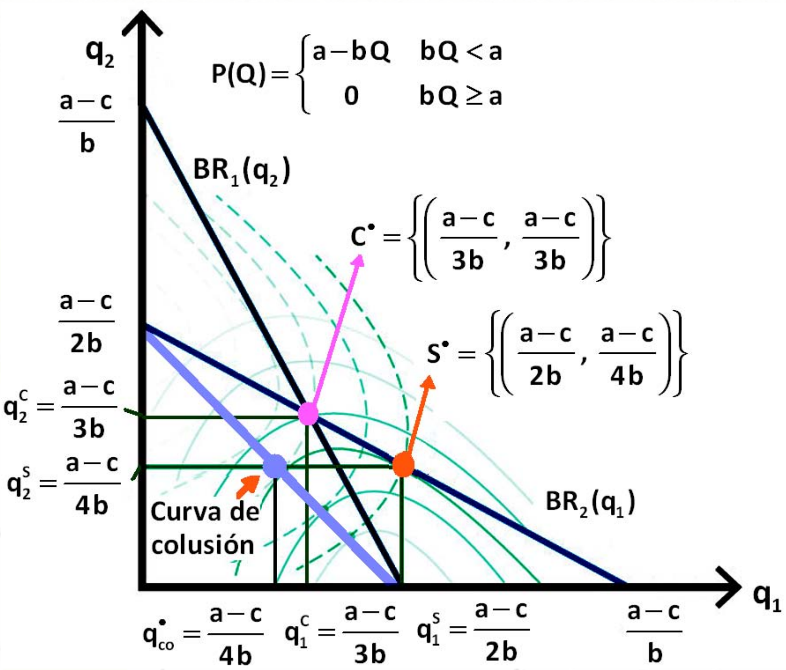
$$u_2^\bullet = \left[P(Q^\bullet) - c\right].\,q_2^\bullet = \left(\frac{a+3c}{4} - c\right).\left(\frac{a-c}{4b}\right) = \frac{(a-c)^2}{16b}$$

Beneficio total (neto) en equilibrio: $U^{\bullet} = \dfrac{(a-c)^2}{8b} + \dfrac{(a-c)^2}{16b} = \dfrac{3(a-c)^2}{16b}$

Implicaciones:

$u_1^{\bullet} = \dfrac{(a-c)^2}{8b} > u_2^{\bullet} = \dfrac{(a-c)^2}{16b}$ $\rightarrow$ La empresa 1 obtiene más beneficios.

Representación del Duopolio de Stackelberg



Los puntos de equilibrio de Stackelberg $(S^{\bullet})$ y Cournot $(C^{\bullet})$ son estables en modelos estáticos de un solo período.

En entornos más dinámicos, como son los juegos repetidos, se necesitan reconsiderar los modelos.

En relación con la producción y el precio de cada empresa, se tiene la relación:

Empresa Líder: $q_1^S > q_1^C \;\wedge\; u_1^S > u_1^C$

Empresa 2: $q_2^S < q_2^C \;\wedge\; u_2^S < u_2^C$

En relación con las cantidades totales de producción y al precio, se tiene la relación:

$$\underbrace{Q_M}_{\text{Cantidad Total Monopolio}} < \underbrace{Q_C}_{\text{Cantidad Total Cournot}} < \underbrace{Q_S}_{\text{Cantidad Total Stackelberg}} < \underbrace{Q_{CP}}_{\text{Cantidad Total Competencia Perfecta}}$$

$$\underbrace{P_M}_{\text{Precio con Monopolio}} > \underbrace{P_C}_{\text{Precio con Cournot}} > \underbrace{P_S}_{\text{Precio con Stackelberg}} > \underbrace{P_{CP} = CM_g}_{\text{Precio con Competencia Perfecta}}$$

UAM UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

(IMPRESO EN PAPEL RECICLADO)

UNICAMENTE PARA USO ESCOLAR

La función de coalición se emplea fundamentalmente en juegos cooperativos.
Se emplea básicamente para estudiar la repartición de los rendimientos obtenidos en la cooperación entre empresas o jugadores. Trata de contestar a dos cuestiones:

(a) ¿Cuánto es lo mínimo que puede conseguir cada empresa actuando en forma unilateral?
(b) ¿Cuánto es lo mínimo que pueden obtener las dos empresas cooperando?

OLIGOPOLIO DE COURNOT: COMPETENCIA EN CANTIDADES

El mercado está compuesto por *n* empresas que compiten, al igual que en el duopolio de Cournot, con un producto homogéneo y en cantidades, no en precios.
Las empresas participantes $(1, 2, 3, \ \dots \ , n)$ producen $(q_1, q_2, q_3, \ \dots \ , q_n)$, respectivamente.

En una empresa i la cantidad producida será q_i y su demanda inversa:

$$P(Q) = \begin{cases} a - bQ & bQ < a \\ 0 & bQ \geq a \end{cases} \quad \text{donde} \begin{cases} a \equiv \text{Tamaño del mercado} \\ -b \equiv \text{Sensibilidad del cosumidor al precio} \end{cases} \qquad b > 0$$

$$Q = q_1 + q_2 + q_3 + \ \dots \ + q_n$$

La función de costes para cada empresa es: $C_i(q_i) = c\,q_i$, siendo $a > c$, $i \in (1, 2, 3, \ \dots \ , n)$

Los beneficios que obtienen las empresas por la venta del producto, iguales a su utilidad:

$$\pi_i(q_1, q_2, q_3, \ \dots \ , q_n) = q_i\,P(q_i + Q_{-i}) - C(q_i) = q_i\left[a - b(q_i + Q_{-i}) - c\right] = u_i(q_1, q_2, q_3, \ \dots \ , q_n)$$

siendo $Q_{-i} = (1-n)\,q_i$

Para determinar el equilibrio de Nash, la respuesta óptima de cualesquiera de las empresas para una estrategia q_i de las otras, se halla resolviendo la ecuación:

$$\max_{q_i} u_i(q_1, q_2, q_3, \ \dots \ , q_n) = q_i\left[a - b(q_i + Q_{-i}) - c\right] \ \text{cuando } 0 \leq q_i \leq a/b$$

Para la maximización de beneficios se tienen en cuenta la condición de primer y segundo orden:

Condición de primer orden:

$$\frac{\vartheta u_i(q_i, q_{i-i})}{\vartheta q_i} = \frac{\vartheta q_i\left[a - b(q_i + Q_{-i}) - c\right]}{\vartheta q_i} = 0 \ \rightarrow \ a - 2b\,q_i - b\,Q_{-i} - c = 0$$

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

Condición de segundo orden (Beneficios máximos):

$$\frac{\vartheta^2 u_i(q_{i-i}, q_i)}{\vartheta q_i^2} = \frac{\vartheta(a - 2bq_i - bQ_{-i} - c)}{\vartheta q_i} = -2b < 0 \quad \text{(es un máximo)}$$

$(q_1^{\bullet}, q_2^{\bullet}, q_3^{\bullet}, \ \dots \ , q_n^{\bullet})$ es un EN si cumple las *n* condiciones de primer orden:

$$a - 2bq_i^{\bullet} - bQ_{-i}^{\bullet} - c = 0 \ \text{ siendo } \ Q_{-i}^{\bullet} = (1-n)\,q_i^{\bullet} \quad \rightarrow \quad a - 2bq_i^{\bullet} - b(1-n)\,q_i^{\bullet} - c = 0$$

$$q_i^{\bullet} = \frac{a-c}{b(n+1)} \quad \forall i = 1, 2, \ \dots \ , n$$

El punto de equilibrio es: $\text{EN} = \left\{ q_1^{\bullet} = \frac{a-c}{b(n+1)}, \ \dots \ , \ q_i^{\bullet} = \frac{a-c}{b(n+1)}, \ \dots \ , \ q_n^{\bullet} = \frac{a-c}{b(n+1)} \right\}$

Cantidad producida en equilibrio: $Q^{\bullet} = n \,.\, \frac{a-c}{b(n+1)}$

Precio en equilibrio: $P(Q^{\bullet}) = a - bQ^{\bullet} = a - b\,.\,n\,.\,\frac{a-c}{b(n+1)} = \frac{a+nc}{n+1}$

Beneficios en equilibrio: $u_i^{\bullet} = q_i^{\bullet}\left[a - b(q_i + Q_{-i}) - c\right] = \frac{(a-c)}{b(n+1)}\left[a - n\frac{a-c}{n+1} - c\right] = \frac{(a-c)^2}{b(n+1)^2}$

Beneficio total (neto) en equilibrio: $U^{\bullet} = u_1^{\bullet} + u_2^{\bullet} + \ \dots \ + u_n^{\bullet} = \frac{n(a-c)^2}{b(n+1)^2}$

El Oligopolio de Cournot es un dilema del prisionero por tener las empresas incentivos para no cooperar, al ser los beneficios mayores que los que se obtienen cuando cooperan.

<u>Sin cooperar</u>: Las cantidades a producir por cada una de las empresas serían $q_1^{\bullet} = \frac{a-c}{b(n+1)}$ para todo $i = (1, 2, 3, \ \dots \ , n)$ que conducen a unos beneficios individuales de $u_1^{\bullet} = \frac{(a-c)^2}{b(n+1)^2} \quad \forall i \in (1, 2, 3, \ \dots \ , n)$

<u>Cooperando</u>: Cuando se convierten en un monopolio cooperando, la producción de cada una de las empresas es $q_1^{\bullet} = \frac{a-c}{2nb} \quad \forall i \in (1, 2, 3, \ \dots \ , n)$ y sus beneficios individuales serían

$$u_i = q_i\left[a - b(q_i + Q_{-i}) - c\right] = \frac{(a-c)^2}{4nb} \quad \forall i \in (1, 2, 3, \ \dots \ , n)$$

Los beneficios cooperando son mayores que si no cooperan: $\dfrac{(a-c)^2}{4nb} > \dfrac{(a-c)^2}{b(n+1)^2}$

DUOPOLIO DE BERTRAND: COMPETENCIA EN PRECIOS

Una crítica común al modelo de la competencia en cantidades de Cournot es que muchas veces la variable estratégica elegida por las empresas es el precio.

Modelo de Bertrand:

Las empresas producen artículos diferenciados

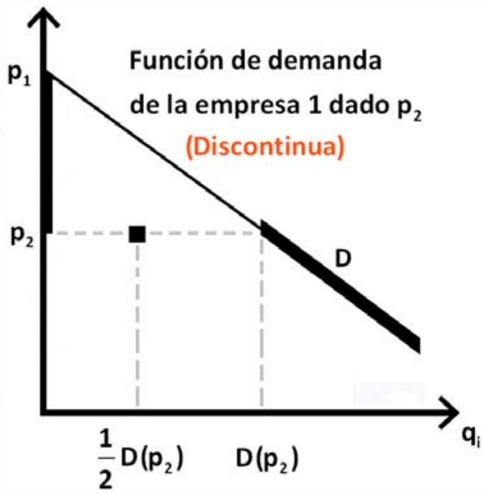
Pueden elegir el precio de venta: p_i precio de venta de la empresa i

La demanda de un producto es elástica: $q_i(p_i, p_j) = a - p_i + b\,p_j$

Coste de producción unitario c igual para las dos empresas

El equilibrio de Bertrand es el equilibrio de Nash de competencia en precios.

$$q_i(p_i, p_j) = \begin{cases} 0 & p_i > p_j \\ \dfrac{1}{2}D(p_i) & p_i = p_j \\ D(p_i) & p_i < p_j \end{cases}$$



Espacio de estrategias de cada empresa $X_i = [0, \infty)$

Función de pagos (beneficios netos):

$$u_1(p_1, p_2) = q_1(p_1, p_2)(p_1 - c) = (a - p_1 + b p_2)(p_1 - c)$$

$$u_2(p_1, p_2) = q_2(p_1, p_2)(p_2 - c) = (a - p_2 + b p_1)(p_2 - c)$$

Se maximizan la función de pagos de las empresas.

Para la empresa 1: $\max_{p_1} u_i(p_1, p_2) = \max_{p_1} (a - p_1 + b p_2)(p_1 - c)$

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....

Para la empresa i, resulta:

$$\frac{\vartheta u_1(p_1,p_2)}{\vartheta p_1}=\frac{\vartheta(a-p_1+bp_2)(p_1-c)}{\vartheta p_1}=a-2p_1+bp_2+c=0 \;\rightarrow\; p_1^{\bullet}=\frac{a+bp_2+c}{2}$$

Análogamente, la respuesta óptima para la empresa 2 sería:

$$\frac{\vartheta u_2(p_1,p_2)}{\vartheta p_2}=\frac{\vartheta(a-p_2+bp_1)(p_2-c)}{\vartheta p_2}=a-2p_2+bp_1+c=0 \;\rightarrow\; p_2^{\bullet}=\frac{a+bp_1+c}{2}$$

La curva de reacción de la empresa 1 es $BR_1(q_2)=\dfrac{a+bp_2+c}{2}$

La curva de reacción de la empresa 2 es $BR_2(q_1)=\dfrac{a+bp_1+c}{2}$

Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} p_1^{\bullet}=\dfrac{a+bp_2+c}{2} \\ p_2^{\bullet}=\dfrac{a+bp_1+c}{2} \end{cases} \;\rightarrow\; p_2^{\bullet}=\frac{a+b\left(\dfrac{a+bp_2+c}{2}\right)+c}{2}=\frac{(2+b)(a+c)}{4-b^2}=\frac{a+c}{2-b} \quad (b<2)$$

Análogamente, $p_1^{\bullet}=\dfrac{a+c}{2-b}$

El punto de equilibrio $(b<2)$ es: $EN=\left\{\left(p_1^{\bullet}=\dfrac{a+c}{2-b},\; p_2^{\bullet}=\dfrac{a+c}{2-b}\right)\right\}$

Obsérvese que si el precio de la empresa rival aumenta, la mejor respuesta es aumentar el precio propio: Los precios son complementarios estratégicos.

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

(IMPRESO EN PAPEL RECICLADO) UNICAMENTE PARA USO ESCOLAR

PARADOJA DE BERTRAND

Surge porque la demanda y los beneficios son discontinuos. Describe una situación en la que dos empresas (jugadores) llegan a un estado de equilibrio de Nash donde ambas empresas cobran un precio igual al costo marginal, pese a que son un duopolio.

La paradoja es que en modelos como la competencia Cournot, un aumento en el número de empresas se asocia a una convergencia de los precios a los costes marginales. En estos modelos alternativos de oligopolio un pequeño número de empresas de obtener beneficios positivos de los precios por encima del coste de carga.

La paradoja de Bertrand aparece raramente en la práctica, ya que los productos reales casi siempre se diferencian de alguna manera aparte del precio, las empresas tienen limitaciones en su capacidad para fabricar y distribuir, y dos empresas rara vez tienen costos idénticos.

MOTIVOS PARA NO APLICAR ESTICTAMENTE LA PARADOJA DE BERTRAND

- A veces las empresas no tienen la capacidad suficiente para satisfacer toda la demanda. Este un punto dio lugar al modelo de Bertrand-Edgeworth.
- Si se diferencian los productos de las empresas, los consumidores no pueden cambiar por completo el producto con el precio más bajo.
- la competencia de precios repetida puede provocar que el precio esté por encima de MC en equilibrio.
- Si una compañía fija su precio un poco más alto, van a seguir recibiendo la misma cantidad de compras, pero más beneficios por cada compra, por lo que la otra compañía elevará su precio, y así sucesivamente (sólo en juegos repetidos, de lo contrario la dinámica de precios son en la otra dirección).
- Si dos empresas se ponen de acuerdo en un precio, que es en su interés a largo plazo para mantener el acuerdo: Los ingresos por reducción de los precios es menor que el doble de los ingresos de mantener el acuerdo, y dura sólo hasta que la otra empresa reduce sus propios precios.

CONTRIBUCIÓN VOLUNTARIA A UN BIEN PÚBLICO

Los consumidores 1 y 2 deciden contribuir a un bien público.

El consumidor 1 tiene una riqueza w_1 y su contribución es c_1, mientras que el consumidor 2 tiene una riqueza w_2 y su contribución es c_2.

La cantidad total de bien público será la suma de las contribuciones $(c_1 + c_2)$

Los pagos: $\begin{cases} u_1(c_1, c_2) = (c_1 + c_2)(w_1 - c_1) \\ u_2(c_1, c_2) = (c_1 + c_2)(w_2 - c_2) \end{cases}$

Se resuelve el problema de maximización de los consumidores calculando el EN:

$$\max u_i(c_1, c_2) = (c_1 + c_2)(w_1 - c_1) \quad \text{sujeto a } 0 \le c_1 \le w_1$$

$$\frac{\vartheta u_1(c_1, c_2)}{\vartheta c_1} = \frac{\vartheta\left[(c_1 + c_2)(w_1 - c_1)\right]}{\vartheta c_1} = w_1 - 2c_1 - c_2 = 0 \;\rightarrow\; c_1^{\bullet} = \frac{w_1 - c_2}{2}$$

Análogamente el consumidor 2: $c_2^{\bullet} = \dfrac{w_2 - c_1}{2}$

Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} c_1^{\bullet} = \dfrac{w_1 - c_2}{2} \\ c_2^{\bullet} = \dfrac{w_2 - c_1}{2} \end{cases} \;\rightarrow\; c_2^{\bullet} = \frac{w_2 - \dfrac{w_1 - c_2}{2}}{2} \;\rightarrow\; c_2^{\bullet} = \frac{2w_2 - w_1}{3}$$

En consecuencia, $c_1^{\bullet} = \dfrac{2w_1 - w_2}{3}$

El punto de equilibrio es: $EN = \left\{\left(c_1^{\bullet} = \dfrac{2w_1 - w_2}{3},\; c_2^{\bullet} = \dfrac{2w_2 - w_1}{3}\right)\right\}$

Es fácil mostrar que la solución no es eficiente.

UAM UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

(IMPRESO EN PAPEL RECICLADO) ÚNICAMENTE PARA USO ESCOLAR

Un duopolio se enfrenta a la curva de demanda del mercado $P = 30 - Q$, siendo Q la producción total de la industria ofrecida por las empresas A y B. Se supone que las empresas tienen una estructura de dostes tal que sus costes marginales son nulos.

a) Hallar la cantidad producida en equilibrio y los beneficios obtenidos

b) Calcular la cantidad producida en equilibrio y los beneficios obtenidos si las empresas formasen un monopolio.

c) Hallar el equilibrio de cantidades y precios, sabiendo que ambas empresas tienen un coste marginal de 12 u.m.

Solución:

a) La función de demanda inversa, función que establece los precios, es decreciente y lineal en el intervalo $[0, 30]$, determinada por la función:

$$P(Q) = \begin{cases} 30 - Q & Q < 30 \\ 0 & Q \geq 30 \end{cases} \quad \text{donde} \begin{cases} 30 \equiv \text{Tamaño del mercado} \\ -1 \equiv \text{Sensibilidad del cosumidor al precio} \end{cases}$$

$$Q = q_A + q_B \qquad CM_i(q_i) = c\,q_i = 0 \quad i = A, B$$

La utilidad de cada empresa es el beneficio que obtienen en la venta del producto. Es decir, la función de pagos (beneficios netos) es:

$$u_A(q_A, q_B) = q_A\left[30 - q_A - q_B\right] - c\,q_A = q_A\left[30 - q_A - q_B - c\right] = q_A\left[30 - q_A - q_B\right]$$

$$u_B(q_A, q_B) = q_B\left[30 - q_A - q_B\right] - c\,q_B = q_B\left[30 - q_A - q_B - c\right] = q_B\left[30 - q_A - q_B\right]$$

El objetivo es determinar el punto de equilibrio entre las dos empresas, esto es, determinar el equilibrio de Nash.

La respuesta óptima de cualquiera de las dos empresas para una estrategia fijada de la otra $(q_A \text{ o } q_B)$ se determina (en el caso de la empresa A) resolviendo la función:

$$\max_{q_A} u_A(q_A, q_B) = q_A\,(30 - q_A - q_B) \qquad 0 \leq q_A \leq 30$$

Se trata de obtener el máximo beneficio o el máximo pago, solución que tiene que estar en el intervalo $\left[0, 30\right]$, donde se cumple que la cantidad que van a producir ambas empresas es positiva y además que para cada cantidad producida los beneficios son máximos. Estas dos situaciones se denominan, respectivamente, condiciones de *primer* y *segundo orden*

UAM UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....

(IMPRESO EN PAPEL RECICLADO) UNICAMENTE PARA USO ESCOLAR

Condición de primer orden:

$$\frac{\vartheta u_A(q_A, q_B)}{\vartheta q_A} = \frac{\vartheta q_A(30 - q_A - q_B)}{\vartheta q_A} = 0 \;\rightarrow\; 30 - 2q_A - q_B = 0 \;\rightarrow\; q_A = \frac{30 - q_B}{2}$$

Condición de segundo orden (Beneficio máximo):

$$\frac{\vartheta^2 u_A(q_A, q_B)}{\vartheta q_A^2} = \frac{\vartheta(30 - 2q_A - q_B)}{\vartheta q_A} = -2 < 0 \text{ (es un máximo)}$$

La respuesta óptima de la empresa A es $BR_A(q_B) = \dfrac{30 - q_B}{2}$

La mejor respuesta de la empresa B es $BR_B(q_A) = \dfrac{30 - q_A}{2}$

Si ambas son las respuestas óptimas, significa que $q_A^\bullet = \dfrac{30 - q_B^\bullet}{2}$ es la respuesta óptima para $q_B^\bullet = \dfrac{a - q_A^\bullet}{2}$ y $q_B^\bullet$ es la respuesta óptima de $q_A^\bullet$, por tanto $EN = \left\{(q_A^\bullet, q_B^\bullet)\right\}$

Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} q_A^\bullet = \dfrac{30 - q_B^\bullet}{2} \\ q_B^\bullet = \dfrac{30 - q_A^\bullet}{2} \end{cases} \rightarrow\; q_B^\bullet = \frac{30 - \left(\dfrac{30 - q_B^\bullet}{2}\right)}{2} = \frac{30 + q_B^\bullet}{4} \;\rightarrow\; q_B^\bullet = \frac{30}{3} = 10 \text{ u.c}$$

Análogamente, $q_A^\bullet = \dfrac{30}{3} = 10$ u.c

El punto de equilibrio es: $EN = \left\{\left(q_A^\bullet = 10,\ q_B^\bullet = 10\right)\right\}$

Cantidad producida en equilibrio: $Q^\bullet = q_A^\bullet + q_B^\bullet = 2\,.\,10 = 20$ u.m

Precio en equilibrio: $P(Q^\bullet) = 30 - Q^\bullet = 30 - 20 = 10$ u.m

Beneficios en equilibrio: $u_A^\bullet(q_A^\bullet, q_B^\bullet) = q_A^\bullet\left[30 - q_A^\bullet - q_B^\bullet\right] = 10\left[30 - 10 - 10\right] = 100$ u.m

$u_B^\bullet(q_A^\bullet, q_B^\bullet) = u_A^\bullet(q_A^\bullet, q_B^\bullet) = 100$ u.m

Beneficiototal (neto) en equilibrio: $U^\bullet = 200$ u.m

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....

El ejercicio se ha resuelto como una demostración del duopolio de Cournot cuando podía haber sido más rápido.

Si la función de demanda del mercado es

$$P(Q)=\begin{cases} a-bQ & bQ<a \\ 0 & bQ\geq a \end{cases} \quad \text{donde} \begin{cases} a\equiv \text{Tamaño del mercado} \\ -b\equiv \text{Sensibilidad del cosumidor al precio} \end{cases} \quad b>0$$

El punto de equilibrio es: $EN=\left\{\left(q_A^{\bullet}=\dfrac{a-c}{3b},\ q_B^{\bullet}=\dfrac{a-c}{3b}\right)\right\} \rightarrow EN=\left\{\left(q_A^{\bullet}=10,\ q_B^{\bullet}=10\right)\right\}$

Cantidad producida en equilibrio: $Q^{\bullet}=\dfrac{2(a-c)}{3b} \rightarrow Q^{\bullet}=q_A^{\bullet}+q_B^{\bullet}=2\,.\,10=20$ u.c

Precio en equilibrio: $P(Q^{\bullet})=a-bQ^{\bullet}=\dfrac{a+2c}{3} \rightarrow P(Q^{\bullet})=30-Q^{\bullet}=30-20=10$ u.m

Beneficio total (neto) en equilibrio: $U^{\bullet}=\dfrac{2(a-c)^2}{9b} \rightarrow U^{\bullet}=200$ u.m

b) Si las empresas A y B cooperasen formando un monopolio (situación prohibida por la Ley 15/2007 de 3 de julio de defensa de la competencia), si bien se trata de coludir utilizando estrategias de reducción de producción autoimpuestas, obteniendo un efecto de subida de precios y por consiguiente un aumento en los beneficios.

Las cantidades a fabricar por cada una de las empresas serían: $q_A=q_B=\dfrac{a-c}{4b}$

Cantidad producida en equilibrio: $Q^{\bullet}=q_A^{\bullet}+q_B^{\bullet}=\dfrac{a-c}{2b} \rightarrow Q^{\bullet}=15$ u.c

Precio en equilibrio: $P(Q^{\bullet})=a-bQ^{\bullet}=\dfrac{a+c}{2} \rightarrow P(Q^{\bullet})=15$ u.m

Beneficio total (neto) en equilibrio: $U^{\bullet}=\dfrac{(a-c)^2}{4b} \rightarrow U^{\bullet}=225$ u.m

Se observa que formando un monopolio la cantidad producida es menor, mientras que los beneficios obtenidos son mayores.

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

c) $a = 30 \quad , \quad b = 1 \quad , \quad c = 12$

El punto de equilibrio es: $EN = \left\{\left(q_A^\bullet = \dfrac{a-c}{3b},\ q_B^\bullet = \dfrac{a-c}{3b}\right)\right\} \ \rightarrow\ EN = \left\{\left(q_A^\bullet = 6,\ q_B^\bullet = 6\right)\right\}$

Precio en equilibrio: $P(Q^\bullet) = \dfrac{a + 2c}{3} = 18$ u.m

(IMPRESO EN PAPEL RECICLADO) UNICAMENTE PARA USO ESCOLAR

La empresa 1 (líder) y la empresa 2 (duopolio de Stackelberg) tienen una curva de demanda lineal con la siguiente demanda del mercado $P = 30 - Q$, donde $Q = q_1 + q_2$. Sus costes marginales son cero. Calcular la cantidad producida y el precio cobrado y el beneficio obtenido por cada empresa.

Solución:

a) La función de demanda inversa, función que establece los precios, decreciente y lineal en el intervalo $[0, 30]$, viene determinada por la función:

$$P(Q) = \begin{cases} 30 - Q & Q < 30 \\ 0 & Q \geq 30 \end{cases} \quad \text{donde} \begin{cases} a = 30 \equiv \text{Tamaño del mercado} \\ -1 \equiv \text{Sensibilidad del cosumidor al precio} \end{cases}$$

$$Q = q_1 + q_2 \quad CM_i(q_i) = c\,q_i = 0 \quad i = 1, 2$$

Se tienen que decidir los niveles de producción en diferentes momentos de tiempo.
La empresa 1 determina $q_1 \geq 0$ y la empresa 2 se fija en q_1 y decide $q_2 \geq 0$. Es una situación en la que hay dos etapas, que se resuelve por inducción hacia atrás.

De esta forma, se comienza resolviendo el problema de maximización de la empresa 2:

$$\max_{u_2} u_2(q_1, q_2) = q_2\left[30 - q_1 - q_2 - c\right] \qquad 0 \leq q_1 + q_2 \leq 30$$

La condición de primer orden es:

$$\frac{\vartheta u_2(q_1, q_2)}{\vartheta q_2} = \frac{\vartheta q_2(30 - q_1 - q_2 - c)}{\vartheta q_2} = 0 \;\rightarrow\; 30 - q_1 - 2q_2 - c = 0 \;\rightarrow\; q_2^{\bullet} = \frac{30 - q_1 - c}{2}$$

Se analiza la decisión de la empresa 1 (líder), sabiendo que la empresa 2 va a determinar su producción $q_2^{\bullet} = \dfrac{30 - q_1 - c}{2}$ para cualquier decisión que tome la empresa líder.

La empresa líder posee cierta ventaja, puesto que puede anticiparse a la respuesta de la empresa 2 al resolver su problema de maximización, sustituyendo q_2 por su valor.

De este modo, el problema de maximización de la empresa 1 es:

$$\max_{u_1} u_1(q_1, q_2^{\bullet}) = q_1(30 - q_1 - q_2^{\bullet} - c) = q_1\left[30 - q_1 - \frac{30 - q_1 - c}{2} - c\right] = q_1\left[\frac{30 - q_1 - c}{2}\right]$$

La condición de primer orden es:

$$\frac{\vartheta u_1(q_1, q_2)}{\vartheta q_1} = \frac{\vartheta}{\vartheta q_1}\left(q_1\left[\frac{30 - q_1 - c}{2}\right]\right) = 0 \;\rightarrow\; 30 - 2q_1 - c = 0 \;\rightarrow\; q_1^{\bullet} = \frac{30 - c}{2} = \frac{30 - 0}{2} = 15 \text{ u.c}$$

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

Sustituyendo en la ecuación de $q_2^{\bullet}$, resulta:

$$q_2^{\bullet} = \frac{30 - q_1 - c}{2} \;\to\; q_2^{\bullet} = \frac{30 - \dfrac{30-c}{2} - c}{2} = \frac{30-c}{4} = \frac{30-0}{4} = 7{,}5 \text{ u.c}$$

El equilibrio de Nash perfecto en subjuegos $\text{ENPS} = \left\{\left(q_1^{\bullet} = 15\,,\; q_2^{\bullet} = 7{,}5\right)\right\}$

Cantidad producida en equilibrio: $Q^{\bullet} = q_1^{\bullet} + q_2^{\bullet} = 15 + 7{,}5 = 22{,}5$ u.c

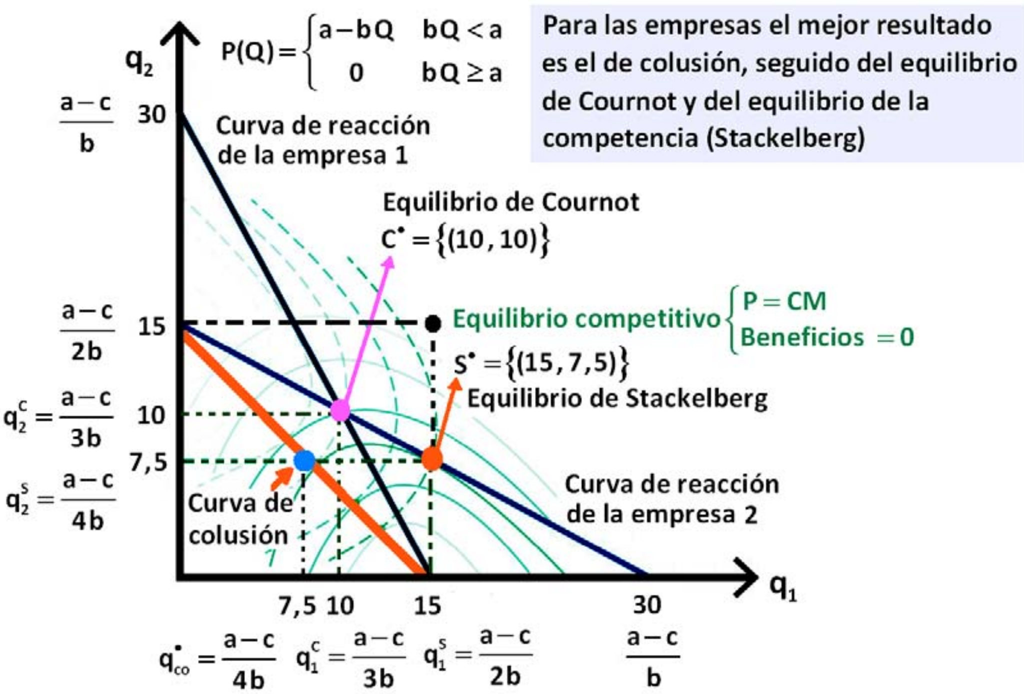
Precio en equilibrio: $P(Q^{\bullet}) = a - Q^{\bullet} = a - \dfrac{3(a-c)}{4} = \dfrac{a+3c}{4} = \dfrac{30+3\,.\,0}{4} = 7{,}5$ u.m

Beneficios en equilibrio de las empresas:

$$u_1^{\bullet} = \left[P(Q^{\bullet}) - c\right].\,q_1^{\bullet} = \left(\frac{a+3c}{4} - c\right).\left(\frac{a-c}{2}\right) = \frac{(a-c)^2}{8} = \frac{30^2}{8} = 112{,}5 \text{ u.m}$$

$$u_2^{\bullet} = \left[P(Q^{\bullet}) - c\right].\,q_2^{\bullet} = \left(\frac{a+3c}{4} - c\right).\left(\frac{a-c}{4b}\right) = \frac{(a-c)^2}{16} = \frac{30^2}{16} = 56{,}25 \text{ u.m}$$

La empresa líder recibe el doble de beneficios que la empresa 2.



El monopolista establece la cantidad que maximiza sus beneficios: $(q^{\bullet} = 15\,,\; p^{\bullet} = 15)$, con unos beneficios: $u^{\bullet} = q^{\bullet}.\,p^{\bullet} = 15\,.\,15 = 225$ u.m

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

En este caso, sus beneficios coinciden con el de colusión $(CM = 0)$, no lo hacen si los costes marginales no son nulos.

Se podía haber resuelto rápido, considerando el planteamiento general de la función de demanda inversa:

$$P(Q) = \begin{cases} a - bQ & bQ < a \\ 0 & bQ \geq a \end{cases} \quad \text{donde} \begin{cases} a \equiv \text{Tamaño del mercado} \\ -b \equiv \text{Sensibilidad del cosumidor al precio} \end{cases} \quad b > 0$$

$$\text{ENPS} = \left\{\left(q_1^{\bullet} = \frac{a-c}{2b},\ q_2^{\bullet} = \frac{a-c}{4b}\right)\right\} \xrightarrow{a = 30\,,\ b = 1\,,\ c = 0} \text{ENPS} = \left\{\left(q_1^{\bullet} = 15 \text{ u.c}\ ,\ q_2^{\bullet} = 7{,}5 \text{ u.c}\right)\right\}$$

Precio en equilibrio: $P(Q^{\bullet}) = a - bQ^{\bullet} = \dfrac{a+3c}{4} \rightarrow P(Q^{\bullet}) = \dfrac{30}{4} = 7{,}5 \text{ u.m}$

Beneficios en equilibrio de las empresas:

$$u_1^{\bullet} = \frac{(a-c)^2}{8b} \rightarrow u_1^{\bullet} = \frac{30^2}{8} = 112{,}5 \text{ u.m}$$

$$u_2^{\bullet} = \frac{(a-c)^2}{16b} \rightarrow u_2^{\bullet} = \frac{30^2}{16} = 56{,}25 \text{ u.m}$$

Beneficio total (neto) en equilibrio: $U^{\bullet} = \dfrac{(a-c)^2}{8b} = \dfrac{3(a-c)^2}{16b} \rightarrow U^{\bullet} = \dfrac{3\,.\,30^2}{16} = 168{,}75 \text{ u.m}$

Siendo la función de demanda inversa $P = 100 - 0,5Q$, donde $Q = q_1 + q_2$, y las funciones de costos $CT_1 = 5q_1$, $CT_2 = 0,5q_2^2$

a) Hallar el equilibrio desde el punto de vista de Cournot

b) ¿Qué ocurre si la empresa 1 actúa como líder y la empresa 2 como seguidora?

Solución:

a) La utilidad de la empresa 1 es el beneficio que obtiene en la venta del producto. Es decir, la función de pago (beneficio neto) es:

$$u_1(q_1, q_2) = q_1[100 - 0,5q_1 - 0,5q_2] - cq_1 = q_1[100 - 0,5q_1 - 0,5q_2 - c]$$

Descrita la función de demanda, costes y utilidad de las empresas 1, el objetivo es determinar el punto de equilibrio entre las dos empresas, es decir, determinar el EN.

La respuesta óptima de empresa 1 para una estrategia fijada de la empresa 2 (q_2) se determina resolviendo la función:

$$\max_{q_1} u_1(q_1, q_2) = q_1[100 - 0,5q_1 - 0,5q_2 - c_1] \qquad 0 \le q_1 \le 100/0,5 \qquad c_1 = CM_1 = \frac{dCT_1}{dQ_1} = 5$$

Para la maximización de beneficios se tienen en cuenta la condición de primer y segundo orden:

Condición de primer orden:

$$\frac{\vartheta u_1(q_1, q_2)}{\vartheta q_1} = \frac{\vartheta q_1[100 - 0,5q_1 - 0,5q_2 - c_1]}{\vartheta q_i} = 0 \;\rightarrow\; 100 - q_1 - 0,5q_2 - c_1 = 0$$

$$c_1 = CM_1 = \frac{dCT_1}{dQ_1} = 5 \;\rightarrow\; 100 - q_1 - 0,5q_2 - 5 = 0 \;\rightarrow\; q_1 = 95 - 0,5q_2 \quad \text{(función de reacción)}$$

Condición de segundo orden (Beneficio máximo):

$$\frac{\vartheta^2 u_1(q_1, q_2)}{\vartheta q_1^2} = \frac{\vartheta(95 - q_i - 0,5q_2)}{\vartheta q_1} = -1 < 0 \quad \text{(es un máximo)}$$

Análogamente, para la producción de la empresa 2 se obtiene:

$$\max_{q_2} u_2(q_1, q_2) = q_2[100 - 0,5q_1 - 0,5q_2 - c_2]$$

$$\frac{\vartheta u_2(q_1, q_2)}{\vartheta q_2} = \frac{\vartheta q_2[100 - 0,5q_1 - 0,5q_2 - c_2]}{\vartheta q_2} = 0 \;\rightarrow\; 100 - 0,5q_1 - q_2 - c_2 = 0$$

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

$$c_2 = CM_2 = \frac{dCT_2}{dQ_2} = q_2 \;\rightarrow\; 100 - 0,5q_1 - 2q_2 = 0 \;\rightarrow\; q_2 = 50 - 0,25q_1 \quad \text{(función de reacción)}$$

Si ambas son las respuestas óptimas, significa que $q_1^\bullet = (95 - 0,5q_2^\bullet)$ es la respuesta óptima para $(q_2^\bullet = 50 - 0,25q_1^\bullet)$ y $q_2^\bullet$ es la respuesta óptima de $q_1^\bullet$, por tanto $EN = \{(q_1^\bullet, q_2^\bullet)\}$

Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} q_1^\bullet = 95 - 0,5q_2^\bullet \\ q_2^\bullet = 50 - 0,25q_1^\bullet \end{cases} \rightarrow\; q_2^\bullet = 50 - 0,25\,(95 - 0,5q_2^\bullet) \;\rightarrow\; q_2^\bullet = 30 \text{ u.c} \quad q_1^\bullet = 80 \text{ u.c}$$

El punto de equilibrio es: $EN = \{(q_1^\bullet = 80 \text{ u.c},\; q_2^\bullet = 30 \text{ u.c})\}$

Cantidad producida en equilibrio: $Q^\bullet = q_1^\bullet + q_2^\bullet = 80 + 30 = 110$ u.c

El precio en equilibrio, sustituyendo en la función inversa de la demanda:

$$P = 100 - 0,5Q = 100 - 0,5\,.\,110 = 45 \text{ u.m}$$

Beneficios obtenidos por las empresas en equilibrio:

$$u_1(80,30) = 80\,.\,(45 - 5) = 3200 \text{ u.m} \qquad u_2(80,30) = 30\,.\,45 - 0,5\,.\,30^2 = 900 \text{ u.m}$$

Beneficio total de las empresas en equilibrio: $U = 4100$ u.m

b) Según el modelo de Stackelberg, si la empresa 1 es un líder los beneficios que se obtienen por la venta del producto:

$$u_1(q_1, q_2) = q_1\,P(q_1 + q_2) - C(q_1) = q_1\big[100 - 0,5q_1 - 0,5q_2 - c\big]$$

Se tienen que decidir los niveles de producción en diferentes momentos de tiempo.
La empresa líder determina $q_1 \geq 0$ y la empresa 2 se fija en q_1 y decide $q_2 \geq 0$. Es una situación en la que hay dos etapas, que se resuelve por inducción hacia atrás.
De esta forma, se comienza resolviendo el problema de maximización de la empresa 2, donde

$$\max_{u_2} u_2(q_1, q_2) = q_2\big[100 - 0,5q_1 - 0,5q_2 - c_2\big]$$

La condición de primer orden es:

$$\frac{\vartheta u_2(q_1, q_2)}{\vartheta q_2} = \frac{\vartheta q_2\big[100 - 0,5q_1 - 0,5q_2 - c_2\big]}{\vartheta q_2} = 0 \;\rightarrow\; 100 - 0,5q_1 - q_2 - c_2 = 0$$

$$c_2 = CM_2 = \frac{dCT_2}{dQ_2} = q_2 \quad \rightarrow \quad 100 - 0,5\,q_1 - 2\,q_2 = 0 \quad \rightarrow \quad q_2^{\bullet} = 50 - 0,25\,q_1$$

Se analiza la decisión de la empresa 1 (líder), sabiendo que la empresa 2 va a determinar su producción $q_2^{\bullet} = 50 - 0,25\,q_1$ para cualquier decisión que tome la empresa líder

La empresa líder posee cierta ventaja, puesto que puede anticiparse a la respuesta de la empresa 2 al resolver su problema de maximización, sustituyendo q_2 por su valor.
De este modo, el problema de maximización de la empresa 1 es:

$$\max_{u_1} u_1(q_1, q_2^{\bullet}) = q_1\left[100 - 0,5\,q_1 - 0,5\,q_2^{\bullet} - c_1\right] = q_1\left[100 - 0,5\,q_1 - 0,5(50 - 0,25\,q_1) - 5\right] =$$
$$= q_1(70 - 0,375\,q_1) = 70\,q_1 - 0,375\,q_1^2$$

La condición de primer orden es:

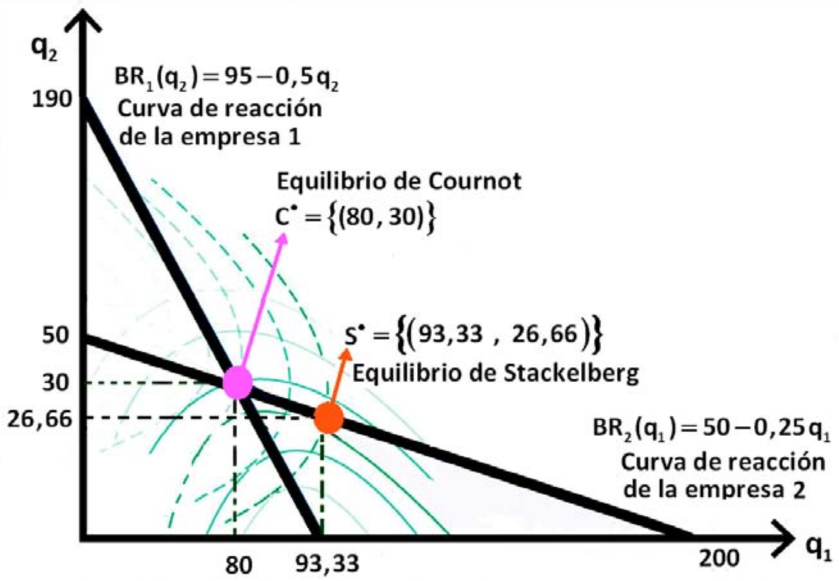
$$\frac{\vartheta u_1(q_1, q_2)}{\vartheta q_1} = \frac{\vartheta\,(70\,q_1 - 0,375\,q_1^2)}{\vartheta q_1} = 0 \quad \rightarrow \quad 70 - 0,75\,q_1 = 0 \quad \rightarrow \quad q_1^{\bullet} = \frac{70}{0,75} = 93,33 \text{ u.c}$$

$$ENPS = \left\{\left(q_1^{\bullet} = 93,33 \text{ u.c}, \; q_2^{\bullet} = 26,66 \text{ u.c}\right)\right\}$$

Cantidad producida en equilibrio: $Q^{\bullet} = q_1^{\bullet} + q_2^{\bullet} = 93,33 + 26,33 = 120$ u.c

Precio en equilibrio: $P(Q^{\bullet}) = 100 - 0,5\,Q^{\bullet} = 100 - 0,5\,.\,120 = 40$ u.m

La producción con Stackelberg es mayor que la solución con Cournot $(120 \text{ u.c} > 110 \text{ u.c})$, mientras que el precio es menor $(40 \text{ u.m} < 45 \text{ u.m})$



Las empresas 1 y 2 fabrican los productos q_1 y q_2, respectivamente, donde las demandas por cada uno de estos productos se representan por: $q_1 = 100 - 2p_1 + p_2$ y $q_2 = 100 - 2p_2 + p_1$. El coste marginal de producción de cada bien es de 10 euros.

a) Determinar cantidades y precios que maximizan el beneficio con el modelo de Bertrand.

b) Determinar cantidades y precios que maximizan el beneficio cuando hay colusión

Solución:

a) Función de pagos (beneficios netos):

$$u_1(p_1, p_2) = q_1(p_1, p_2)(p_1 - c) = (100 - 2p_1 + p_2)(p_1 - 10)$$

$$u_2(p_1, p_2) = q_2(p_1, p_2)(p_2 - c) = (100 - 2p_2 + p_1)(p_2 - 10)$$

Para maximizar la función de pagos de la empresa 1:

$$\frac{\vartheta u_1(p_1, p_2)}{\vartheta p_1} = \frac{\vartheta\left[(100 - 2p_1 + p_2)(p_1 - 10)\right]}{\vartheta p_1} = 120 - 4p_1 + p_2 = 0 \;\rightarrow\; p_1^\bullet = \frac{120 + p_2}{4}$$

Análogamente, para la empresa 2: $p_2^\bullet = \dfrac{120 + p_1}{4}$

Resolviendo el sistema: $\begin{cases} p_1^\bullet = \dfrac{120 + p_2}{4} \\ p_2^\bullet = \dfrac{120 + p_1}{4} \end{cases} \rightarrow \; EN = \left\{(p_1^\bullet = 40 \text{ euros},\; p_2^\bullet = 40 \text{ euros})\right\}$

Cantidad producida en equilibrio:

$$q_1 = 100 - 2p_1 + p_2 = 100 - 80 + 40 = 60 \text{ u.c} \qquad q_2 = 100 - 2p_2 + p_1 = 100 - 80 + 40 = 60 \text{ u.c}$$

Beneficio en equlibrio para cada empresa:

$$u_1(p_1, p_2) = u_2(p_1, p_2) = (100 - 2\,.\,40 + 40)(40 - 10) = 1800 \text{ euros}$$

Beneficio total de las empresas en equilibrio con Bertrand: $U = 3600$ euros

b) Si hay colusión entre las empresas, y de ser el precio la variable a seleccionar, las empresas maximizarán las utilidades conjuntas:

$$U = q_1\,.\,(p_1 - c) + q_2\,.\,(p_2 - c) = (100 - 2p_1 + p_2)(p_1 - 10) + (100 - 2p_2 + p_1)(p_2 - 10)$$

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

Para maximizar la función de pagos de lal empresa 1:

$$\frac{\vartheta}{\vartheta p_1}\left[(100-2p_1+p_2)(p_1-10)+(100-2p_2+p_1)(p_2-10)\right]=110-4p_1+2p_2=0 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow \; p_1^{\bullet}=\frac{110+2p_2}{4}$$

Análogamente, para la empresa 2: $p_2^{\bullet}=\dfrac{110+2p_2}{4}$

Resolviendo el sistema $\begin{cases} p_1^{\bullet}=\dfrac{110+2p_2}{4} \\ p_2^{\bullet}=\dfrac{110+2p_1}{4} \end{cases} \rightarrow \; EN=\left\{(p_1^{\bullet}=55 \text{ euros}, \; p_2^{\bullet}=55 \text{ euros}\right\}$

Cantidad producida en equilibrio en colusión:

$q_1=100-2p_1+p_2=100-110+55=45$ u.c $\qquad q_2=100-2p_2+p_1=100-110+55=45$ u.c

Beneficio en equlibrio para cada empresa en colusión:

$u_1(p_1,p_2)=u_2(p_1,p_2)=45.\,(55-10)=2025$ euros

Beneficio total de las empresas en equilibrio en colusión:

$U=q_1\,.\,(p_1-c)+q_2\,.\,(p_2-c)=45.\,(55-10)+45.\,(55-10)=4050$ euros

Si las empresas están coludidas obtendrían una urilidad de 2025 euros, superiores a las utilidades de 1800 euros que obtendrían en el equilibrio de Bertrand.

El modelo de Bertrand es más realista y tiene más sentido cuando las empresas compiten vendiendo productos diferenciados. Esta diferenciación puede ser real o percibida. Prácticamente todos los productos tienen algún grado de diferenciación, con la excepción de algunos productos financieros - la acciòm de cierta empresa o un gramo de oro de 18 quilates es el mismo independientemente a quién se compre -

Según el modelo de competencia de Bertrand, si se rompe la colusión se da inicio a una bajada de precios, hasta que llega al equilibrio de Nash en el punto de competencia perfecta.

UNICAMENTE PARA USO ESCOLAR (IMPRESO EN PAPEL RECICLADO)

Dos compañías aéreas 1 y 2 compiten como duopolistas en una ruta. Los pasejeros consideran que el servicio de estas empresas es idéntico. La curva de demanda del mercado viene definido por $Q = 339 - P$, donde Q son miles de pasajeros y P es el precio en euros. Los costes totales para cada aerolínea son $CT_i = 147 Q_i$.

a) Según el modelo de Cournot, determinar las cantidades y precios que maximizan el beneficio de las aerolíneas. Calcular el beneficio de cada aerolínea.

b) Considerar que la aerolínea 1 es un líder de Stackelberg.

c) Determinar el equlibrio de Bertrand, calcular el precio, la producción y el beneficio de las aerolíneas.

d) Sí las aerolíneas forman un Cartel donde cada una de ellas tiene la misma importancia. Calcular producción, precio y beneficio óptimo.

e) ¿Existen incentivos para no cumplir con la cuota de producción del Cartel?

Solución:

a) Modelo de Cournot, Sea $Q = 339 - P \quad \rightarrow \quad P = 339 - Q$

La utilidad de cada aerolínea es el beneficio que obtienen en la venta de billetes. Es decir, la función de pagos (beneficios netos) es:

$$u_1(q_1, q_2) = q_1\left[339 - q_1 - q_2\right] - c\,q_1 = q_1\left[339 - q_1 - q_2 - c\right]$$

$$u_2(q_1, q_2) = q_2\left[339 - q_1 - q_2\right] - c\,q_2 = q_2\left[339 - q_1 - q_2 - c\right]$$

La respuesta óptima de cualquiera de las dos aerolíneas para una estrategia fijada de la otra $(q_1 \text{ o } q_2)$. Se determina (en el caso de la aerolínea 1) resolviendo la función:

$$\max_{q_1} u_1(q_1, q_2) = q_1 (339 - q_1 - q_2 - c) \qquad 0 \le q_1 \le 339$$

Se trata de obtener el máximo beneficio o el máximo pago, solución que tiene que estar en el intervalo $\left[0, 339\right]$, donde se cumple que la cantidad que van a producir ambas empresas es positiva y además que para cada cantidad producida los beneficios son máximos. Estas dos situaciones se denominan, respectivamente, condiciones de *primer* y *segundo orden*

Condición de primer orden:

$$\frac{\vartheta u_1(q_1, q_2)}{\vartheta q_1} = \frac{\vartheta q_1 (339 - q_1 - q_2 - c)}{\vartheta q_1} = 0 \;\rightarrow\; 339 - 2q_1 - q_2 - c = 0 \;\rightarrow\; q_1 = \frac{339 - q_2 - c}{2}$$

Análogamente, la respuesta óptima para la aerolínea 2 sería:

$$\frac{\vartheta u_2(q_1, q_2)}{\vartheta q_2} = \frac{\vartheta q_2 (339 - q_1 - q_2 - c)}{\vartheta q_2} = 0 \;\rightarrow\; 339 - q_1 - 2q_2 - c = 0 \;\rightarrow\; q_2 = \frac{339 - q_1 - c}{2}$$

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....

Condición de segundo orden (Beneficios máximos):

$$\frac{\vartheta^2 u_1(q_1, q_2)}{\vartheta q_i^2} = \frac{\vartheta(339 - 2q_1 - q_2 - c)}{\vartheta q_1} = -2 < 0 \text{ (es un máximo)}$$

La respuesta óptima de la aerolínea 1 es $BR_1(q_2) = \dfrac{339 - c - q_2}{2}$ (curva de reacción)

La mejor respuesta de la aerolínea 2 es $BR_2(q_1) = \dfrac{339 - c - q_1}{2}$ (curva de reacción)

Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} q_1^\bullet = \dfrac{339 - c - q_2^\bullet}{2} \\ q_2^\bullet = \dfrac{339 - c - q_1^\bullet}{2} \end{cases} \to \; q_2^\bullet = \frac{339 - c - \left(\dfrac{339 - c - q_2^\bullet}{2}\right)}{2} = \frac{339 - c + q_2^\bullet}{4} \;\to\; q_2^\bullet = \frac{339 - 147}{3} = 64$$

$$CT_i = 147\,Q_i \quad \Rightarrow \quad CM_i = \frac{dCT_i}{dQ_i} = 147$$

Análogamente, $q_1^\bullet = 64$

El punto de equilibrio es: $EN = \left\{\left(q_1^\bullet = 64 \text{ billetes}, \; q_2^\bullet = 64 \text{ billetes}\right)\right\}$

Cantidad producida en equilibrio: $Q^\bullet = q_1^\bullet + q_2^\bullet = 128$ billetes

El precio en equilibrio, sustituyendo en la función inversa de la demanda:

$$P = 339 - Q = 339 - 128 = 211 \text{ euros}$$

Beneficios obtenidos por las aerolíneas en equilibrio:

$$u_1(64, 64) = 64\,.\,(211 - 147) = 4096 \text{ euros} \qquad u_2(64, 64) = 64\,.\,(211 - 147) = 4096 \text{ euros}$$

Beneficio total de las aerolíneas en equilibrio: $U = 8192$ euros

b) Según el modelo de Stackelberg hay decidir los niveles de producción en diferentes momentos de tiempo. La aerolínea líder determina $q_1 \geq 0$ y la aerolínea 2 se fija en q_1 y decide $q_2 \geq 0$.
Es una situación en la que hay dos etapas, que se resuelve por inducción hacia atrás.
De esta forma, se comienza resolviendo el problema de maximización de la aerolínea 2 , donde:

$$\max_{q_1} u_1(q_1, q_2) = q_1(339 - q_1 - q_2 - c)$$

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

$$\frac{\vartheta u_2(q_1,q_2)}{\vartheta q_2}=\frac{\vartheta q_2(339-q_1-q_2-c)}{\vartheta q_2}=0 \;\rightarrow\; 339-q_1-2q_2-c=0 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; q_2=\frac{339-q_1-147}{2}=96-\frac{q_1}{2}$$

Se analiza la decisión de la aerolínea líder, sabiendo que la aerolínea 2 va a determinar su producción $q_2^{\bullet}=96-\dfrac{q_1}{2}$ para cualquier decisión que tome la aerolínea líder.

La aerolínea líder posee cierta ventaja, puesto que puede anticiparse a la respuesta de la aerolínea 2 al resolver su problema de maximización, sustituyendo q_2 por su valor.
De este modo, el problema de maximización de la aerolínea 1 es:

$$\max_{u_1} u_1(q_1,q_2^{\bullet})=q_1(339-q_1-q_2^{\bullet}-c)=q_1\left[339-q_1-\left(96-\frac{1}{2}q_1\right)-147\right]=$$

$$=q_1\left(96-\frac{1}{2}q_1\right)=96q_1-\frac{1}{2}q_1^2$$

La condición de primer orden es:

$$\frac{\vartheta}{\vartheta q_1}\left(96q_1-\frac{1}{2}q_1^2\right)=0 \;\rightarrow\; 96-q_1=0 \;\rightarrow\; q_1^{\bullet}=96 \text{ billetes}$$

$$q_2^{\bullet}=96-\frac{1}{2}q_1 \;\rightarrow\; q_2^{\bullet}=48 \text{ billetes}$$

$$\text{ENPS}=\left\{\left(q_1^{\bullet}=96 \text{ billetes},\; q_2^{\bullet}=48 \text{ billetes}\right)\right\}$$

Cantidad producida en equilibrio: $Q^{\bullet}=q_1^{\bullet}+q_2^{\bullet}=96+48=144$ billetes

Precio en equilibrio: $P(Q^{\bullet})=339-Q^{\bullet}=339-144=195$ euros

Beneficio en equlibrio para la aerolínea líder y la aerolínea 2, respectivamente, es:

$$u_1=195\,.\,96-147\,.\,96=4608 \text{ euros} \qquad u_2=195\,.\,48-147\,.\,48=2304 \text{ euros}$$

Beneficio total de las aerolíneas en equilibrio con Stackelberg: $U=6912$ euros

La producción con Stackelberg es mayor que la producción con Cournot $(144 \text{ billetes} > 128 \text{ billetes})$, mientras que el precio es menor $(195 \text{ euros} < 211 \text{ euros})$

c) La paradoja de Bertrand surge porque la demanda y los beneficios son discontinuos: Quien vende al menor precio se lleva toda la demanda. Una forma de escapar a la paradoja es tener un producto diferenciado.

PARADOJA: Sí los clientes estiman que el servicio es idéntico demandarán pasajes a la aerolínea que venda billetes a menor precio. Sí una aeeolínea baja su precio se apodera de todo el mercado y actúa como monopolista.
La reacción de la otra aerolínea es bajar más el precio para quedarse con todo el mercado actuando de monopolista.
La guerra de precios continuará hasta que el precio baje al nivel del coste marginal. Siendo el mismo coste marginal $CM_i = 147 \ (i = 1, 2)$, el precio bajará hata el coste marginal:

$$P = 339 - Q = CM = 147 \quad \to \quad Q = 192 = 96 + 96 \quad \to \quad u_1 = u_2 = 0 \quad \to \quad U = 0$$

Se asume que $q_1 = q_2 = 96$ pensando que la competitividad entre las aerolíneas conducirá como máximo a tomar la mitad del mercado.

d) Un Cartel es el acuerdo entre las dos aerolíneas con el fin de eliminar la competencia, obteniendo un poder sobre el mercado aeronáutico para obtener los mayores beneficios posibles en perjuicio de los pasajeros. Las consecuencias son las mismas que con un mercado monopolista, a diferencia que se reparten los beneficios totales.
Actualmente, el término se aplica a los acuerdos que regulan la competencia en el comercio internacional.

Siendo $q_1 = q_2$, la utilidad de cada aerolínea será:

$$u_1(q_1, q_2) = q_1\left[339 - q_1 - q_2\right] - c\,q_1 = q_1\left[339 - 2q_1 - c\right]$$

$$u_2(q_1, q_2) = q_2\left[339 - q_1 - q_2\right] - c\,q_2 = q_2\left[339 - 2q_2 - c\right]$$

El beneficio óptimo de la aerolínea 1 se obtiene maximizando la función:

$$\max_{q_1} u_1(q_1, q_2) = q_1(339 - 2q_1 - 147) = q_1(192 - 2q_1) = 192\,q_1 - 2\,q_1^2$$

$$\frac{\vartheta}{\vartheta q_1}(192\,q_1 - 2q_1^2) = 192 - 4\,q_1 = 0 \quad \to \quad q_1^\bullet = 48 \text{ billetes}$$

Análogamente, $q_2^\bullet = 48$ billetes

Cantidad producida en equilibrio: $Q^\bullet = q_1^\bullet + q_2^\bullet = 48 + 48 = 96$ billetes

Precio en equilibrio: $P(Q^\bullet) = 339 - Q^\bullet = 339 - 96 = 243$ euros

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

Beneficio en equlibrio para cada aerolínea:

$$u_1 = u_2 = 243\,.\,48 - 147\,.\,48 = 4608 \text{ euros}$$

Beneficio total de las aerolíneas en equilibrio: $U = 9216$ euros

e) El Cartel maximiza beneficios conjuntos en el mercado si la producción conjunta es de 96 unidades, asumiendo (en la medida que las aerolíneas tienen los mismos costes) producirá 48 unidades cada una.

Si la aerolínea 1 sabe que la aerolínea 2 va a producir 48 unidades cumpliendo su acuerdo en el cartel, la demanda residual del mercado será:

$$Q = 339 - P \quad \rightarrow \quad Q_1 + 48 = 339 - P \quad \rightarrow \quad Q_1 = 291 - P$$

La utilidad de la aerolínea 1 será:

$$u_1(q_1, q_2) = q_1\left[291 - q_1 - 147\right] = q_1\left[144 - q_1\right] = 144\,q_1 - q_1^2$$

Para maximizar el beneficio de la aerolínea 1:

$$\frac{\vartheta}{\vartheta q_1}(144\,q_1 - q_1^2) = 144 - 2\,q_1 = 0 \quad \rightarrow \quad q_1^{\bullet} = 72 \text{ billetes}$$

Cantidad producida en equilibrio: $Q^{\bullet} = q_1^{\bullet} + 48 = 72 + 48 = 120$ billetes

Precio en equilibrio: $P(Q^{\bullet}) = 339 - Q^{\bullet} = 339 - 120 = 219$ euros

Beneficio en equlibrio para cada aerolínea:

$$u_1 = 219\,.\,72 - 147\,.\,72 = 5184 \text{ euros} \qquad u_2 = 219\,.\,48 - 147\,.\,48 = 3456 \text{ euros}$$

Beneficio total de las aerolíneas en equilibrio: $U = 8640$ euros

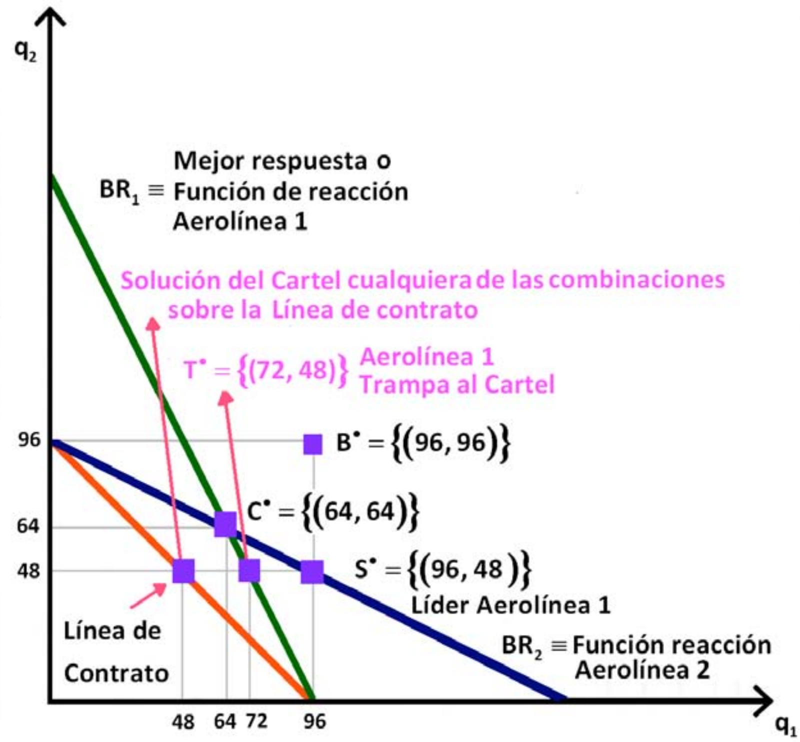
Se observa que si las dos aerolíneas respetan las cuotas de producción establecidas por el Cartel, cada una obtiene un beneficio de 4608 euros.

Si la aerolínea 1 asume que la aerolínea 2 va a respetar el acuerdo del Cartel encuentra más beneficioso que ella no lo respete, consiguiendo 72 billetes (en lugar de 48) y un beneficio de 5184 euros.

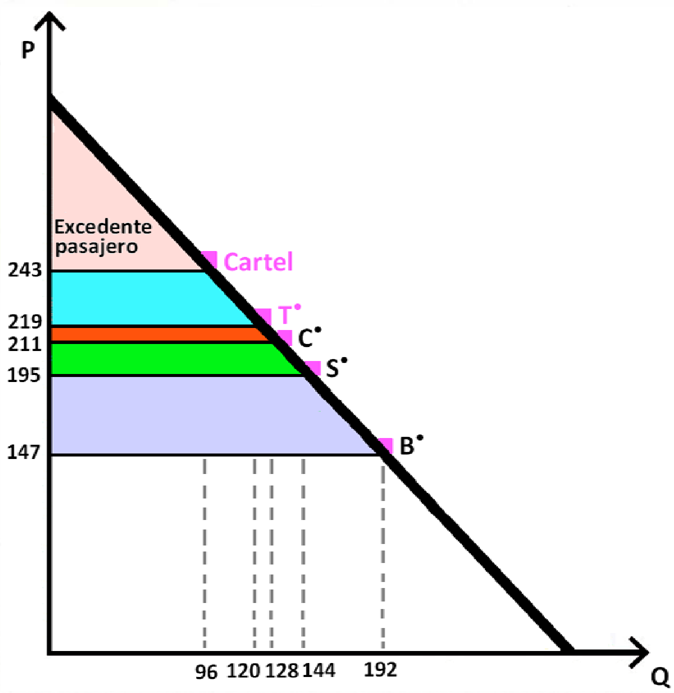
Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....



Considerando las producciones calculadas sobre la función de demanda del mercado, se puede hacer una estimación del excedente del pasajero (cantidad máxima que está dispuesto a pagar y lo que en realidad paga) para cada una de estas situaciones.



El excedente se puede interpretar como áreas de triángulos que se pegan unos encima de otros.

Mientras más alto el precio de la solución menor será el excedente del pasajero, como ocurre en la solución bajo Cartel. El precio es 243 y el excente del consumidor es el área del triángulo.

En esta línea, el excedente del consumidor es mayor en la solución de Bertrand $B^{\bullet}$ y menor en la solución de Cournot $C^{\bullet}$

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

TEORÍA DE LAS SUBASTAS

Una subasta es un mecanismo de venta o compra caracterizado por un conjunto de reglas por el que se determina la asignación de recursos y su precio en función de las pujas de los participantes

La Teoría de las Subastas se estudian por:

- Formación de precios: Identificar cómo se forman los precios en presencia de información asimétrica.
- Relevancia empírica: Subastas de arte, licencias de franquicia, construcciones públicas, y en todos los mercados.

Porqué se utilizan ciertos mecanismos de subastas.

Mejora en el diseño de mecanismos.

ESTRATEGIA DEL VENDEDOR DEL OBJETO SUBASTADO:

¿Cuál es el mejor mecanismo para maximizar ingresos?

¿Es conveniente exigir un pago para participar?

¿Conviene establecer un precio mínimo?

¿Conviene revelar información sobre el valor del objeto?

¿Qué hacer para evitar la colusión?

ESTRATEGIA DEL COMPRADOR DEL OBJETO SUBASTADO:

¿Cuál deberia ser mi puja óptima?

¿Cuál es el comportamiento esperado de los otros pujadores?

¿Se puede obtener informacióm sobre el valor del objeto a través de las pujas de los otros compradores?

Si puedo influir en el tipo de subasta, ¿qué tipo de subasta me conviene más?

UAM UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

CLASIFICACIÓN DE LAS SUBASTAS:

Valoraciones de los compradores:
- Privadas (Objeto de un pintor)
- Comunes (Explotaciones pretolíferas)

Información sobre las valoraciones de otros compradores:
- Completa: Subastas eléctricas
- Incompleta: Subastas de UMTS

Número de objetos a la venta:
- Único: Una obra de arte
- Múltiples: Subastas de bonos del Estado

SUBASTAS DE UN OBJETO:

A SOBRE CERRADO:
- Al primer precio (contratación pública)
- Al segundo precio

En subatas al primer precio el pujagor con la puja más alta gana y paga su propia puja.

En subastas al segundo precio el pujador con la puja más alta gana y paga la siguiente puja.

ABIERTAS ORALES:
- Descendente u Holandesa (lonjas de pescado)
- Ascendente o Inglesa (subastas de arte)

En la subata Descendente u Holandesa el precio baja hasta que un pujador lo compra.

En la subata Ascendente o Inglesa el precio sube hasta que solo queda un pujador.

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

INFORMACIÓN INCOMPLETA: ESCENARIO SUBASTA A SOBRE CERRADO

Dos jugadores (compradores) participan en una subasta a sobre cerrado para adquirir un objeto. Las acciones posibles con sus pujas son $A_1 = A_2 = b_i \geq 0 \quad i = 1, 2$

Los jugadores tienen una valoración v_i independiente y uniformemente distribuida $[0, 1]$, que es información privada.

SUBASTA AL PRIMER PRECIO: Es el formato estandarizado de subastas para licitaciones gubernamentales. Cada comprador potencial determina y envía su puja de manera privada.
El subastador se encarga de vender el objeto a quien haya hecho la puja mas alta.
En caso de empates, el subastador suele asumir un sorteo aleatorio entre aquellos que hayan presentado la puja más alta.

Utilidad o pago: $u_i(b_1, b_2; v_1, v_2) = \begin{cases} 0 & b_i < b_j \\ \dfrac{v_i - b_i}{2} & b_i = b_j \\ v_i - b_i & b_i > b_j \end{cases}$

Se prueba que $ENB = \left\{ \left(b_1(v_1) = \dfrac{v_1}{2} \,,\ b_2(v_2) = \dfrac{v_2}{2} \right) \right\}$ Equilbrio de Nash Bayesaiano

Con *n* jugadores el equilibrio es $b_i(v_i) = \dfrac{(n-1)v_1}{n}$

Dada la estrategia del jugador 2, el jugador 1 gana la subasta si puja $b > \dfrac{v_2}{2} \quad \rightarrow \quad v_2 < 2b$

El pago del jugador 1 es: $u_1 = (v_1 - b)\ .\ p(v_2 < 2b)$

$$u_1 = (v_1 - b)\,.\int_0^{2b} f(v_2)\,dv_2 = (v_1 - b)\,.\left[v_2\right]_0^{2b} = 2b(v_1 - b)$$

El valor que maximiza u_1 es: $\dfrac{\vartheta\left[2b(v_1 - b)\right]}{\vartheta b} = 2v_1 - 4b = 0 \quad \rightarrow \quad b_1(v_1) = \dfrac{v_1}{2}$

Análogamente, el valor que maximiza u_2 es $b_2(v_2) = \dfrac{v_2}{2}$

En el equilibrio cada jugador (comprador) puja la mitad de su valoración. Consecuencia de que se enfrentan a una tensión:

- Cuanto mayor es la puja, mayor es la probabilidad de ganar.
- Cuanto menor es la puja, mayor es el pago en caso de ganar.

SUBASTA AL SEGUNDO PRECIO:

Subastas de Vickrey, propuestas y analizadas en 1961 por William Vickrey (Nobel de Economía en 1996). En la atualidad constituyen el paradigma económico predominante para pensar las subastas.
Vickrey sostenía la necesidad del uso de subastas diseñadas especialmente cuando se trata de bienes publicos importantes. En una subasta de Vickrey el bien es vendido al postor mas alto, al precio de la puja perdedora más alta.
Gana el jugador que hace la puja más alta, pero paga por el objeto una cantidad igual a la segunda puja más alta.

Se modela como en la subasta al primer precio:

Utilidad o pago: $u_i(b_1, b_2; v_1, v_2) = \begin{cases} 0 & b_i < b_j \\ \dfrac{v_i - b_i}{2} & b_i = b_j \\ v_i - b_i & b_i > b_j \end{cases}$

Se prueba que $\text{ENB} = \{(b_1(v_1) = v_1,\ b_2(v_2) = v_2)\}$

Dada la estrategia del jugador 2, con la regla de decisión $b(v) = v$, el jugador 1 gana la subasta si puja $b > v_2 \quad \to \quad v_2 < b$

En tal caso, la ganancia del jugador 1 es: $u_1 = (v_1 - v_2)$

$$u_1 = \int_0^b (v_1 - v_2)\, b(v_2)\, dv_2 = \int_0^b (v_1 - v_2)\, v_2\, dv_2 = \int_0^b v_1 v_2\, dv_2 - \int_0^b v_2 v_2\, dv_2 =$$

$$= v_1 \left[v_2\right]_0^b - \left[\frac{1}{2} v_2^2\right]_0^b = b v_1 - \frac{1}{2} b^2$$

El valor que maximiza u_1 es: $\dfrac{\vartheta}{\vartheta b}\left[b v_1 - \dfrac{1}{2} b^2\right] = v_1 - b = 0 \quad \to \quad b_1(v_1) = v_1$

Ya no existe la tensión de la subasta al primer precio, ahora cada jugador puja su valor.

UAM UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....

CÁLCULO DE PUJAS EN SUBASTA A SOBRE CERRADO AL PRIMER PRECIO

Los jugadores que son neutrales al riesgo

Se supone simetría, todas las valoraciones proceden de la misma distribución

El jugador i tiene una valoración v_i independiente, que es una extracción aleatoria de una distribución uniforme $U[0,k]$

Cada jugador conoce su valoración pero no conoce la de los demás, aunque sabe que proceden de una distribución $U[0,k]$

Las funciones de puja de cada jugador son $b_i = \alpha_i\, v_i$, siendo $0 \leq \alpha_i \leq 1$

El pago del jugador i se resuelve: $\max\, u_{b_i} = (v_i - b_i)\,.\,p(ganar/b_i) + 0\,.\,[1 - p(ganar/b_i)]$

$p(ganar/b_i) \equiv$ Probabilidad que tiene el jugador i de ganar la subasta cuando realiza una puja igual a b_i

$$p(ganar/b_i) = p(b_i > b_j) = p(b_i > \alpha_j\, v_j) = p\left(\frac{b_i}{\alpha_j} > v_j\right) = p\left(v_j < \frac{b_i}{\alpha_j}\right) \overset{v_j \sim U[0,k]}{=} \frac{1}{k}\,\frac{b_i}{\alpha_j} = \frac{b_i}{k\,\alpha_j}$$

$$\max\, u_{b_i} = (v_i - b_i)\,.\,p(ganar/b_i) = (v_i - b_i)\,.\,\frac{b_i}{k\,\alpha_j} = \left(v_i\,.\,\frac{b_i}{k\,\alpha_j} - \frac{b_i^2}{k\,\alpha_j}\right)$$

Para calcular el valor que maximiza u_{b_i} :

$$\frac{\vartheta}{\vartheta b_i}\left(v_i\,.\,\frac{b_i}{k\,\alpha_j} - \frac{b_i^2}{k\,\alpha_j}\right) = v_i - 2b_i = 0 \quad \rightarrow \quad b_i = \frac{v_i}{2} \quad \text{puja óptima}$$

LA OFERTA GANADORA AUMENTA CON EL NÚMERO DE PUJANTES

Considerando tres jugadores, el jugador i gana la subasta cuando realiza una puja igual a b_i

$$p(ganar/b_i) = p(b_i > \alpha_j\, v_j)\,.\,p(b_i > \alpha_k\, v_k) = \left(\frac{b_i}{k\,\alpha}\right)^2$$

$$\max\, u_{b_i} = (v_i - b_i)\,.\,p(ganar/b_i) = (v_i - b_i)\,.\,\frac{b_i^2}{k^2\,\alpha^2} = \left(v_i\,.\,\frac{b_i^2}{k^2\,\alpha^2} - \frac{b_i^3}{k^2\,\alpha^2}\right)$$

UAM UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....

Para calcular el valor que maximiza u_{b_i} :

$$\frac{\vartheta}{\vartheta b_i}\left(v_i \,.\, \frac{b_i^2}{k^2\alpha^2} - \frac{b_i^3}{k^2\alpha^2}\right) = 2b_i\, v_i - 32b_i^2 = 0 \;\rightarrow\; b_i = \frac{2v_i}{3} \quad \text{puja óptima}$$

Si se consideran *n* jugadores:

$$p(\text{ganar}\,/\,b_i) = p(b_i > \alpha_j\, v_j)\,.\,p(b_i > \alpha_k\, v_k)\;\ldots\;p(b_i > \alpha_n\, v_n) = \left(\frac{b_i}{k\alpha}\right)^{n-1}$$

$$\max\, u_{b_i} = (v_i - b_i)\;.\;p(\text{ganar}\,/\,b_i) = (v_i - b_i)\;.\;\frac{b_i^{n-1}}{k^{n-1}\alpha^{n-1}} = \left(v_i\,.\,\frac{b_i^{n-1}}{k^{n-1}\alpha^{n-1}} - \frac{b_i^{n}}{k^{n-1}\alpha^{n-1}}\right)$$

Para calcular el valor que maximiza u_{b_i} :

$$\frac{\vartheta}{\vartheta b_i}\left(v_i\,.\,\frac{b_i^{n-1}}{k^{n-1}\alpha^{n-1}} - \frac{b_i^{n}}{k^{n-1}\alpha^{n-1}}\right) = (n-1)\,b_i^{n-2}\,v_i - n\,b_i^{n-1} = 0 \;\rightarrow\; b_i = \frac{(n-1)\,v_i}{n} \quad \text{puja óptima}$$

Se observa que a medida que aumenta el número de jugadores aumenta la valoración.

PRECIO ESPERADO EN LA SUBASTA

El precio esperado por el subastador cuando se extraen *n* valoraciones independientemente de una distribución $U[0,k]$ es: $\left(\frac{n-1}{n+1}k\right)$

El valor esperado de la valoración más alta: $\frac{n}{n+1}k$

El precio esperado en la subasta y por tanto el valor esperado de la puja más alta:

$$\left(\frac{n-1}{n}\right).\left(\frac{n}{n+1}k\right) = \frac{n-1}{n+1}k$$

PUJAS EN INCERTIDUMBRE EN SUBASTA A SOBRE CERRADO AL PRIMER PRECIO

El riesgo que asume cada jugador está estrechamente ligado a la opción que maximice su utilidad esperada con la obtención del bien que se está subastando.

Existe la probabilidad que en una subasta se enfrenten jugadores con diferentes tipos de riesgo. En este sentido, se analizan casos en que dos jugadores asume su riesgo (diferente al de su adversario). El objetivo es determinar cuál sería la puja óptima de un jugador cuando se enfrenta a un contrincante con diferente riesgo al suyo.

OBTENCIÓN DE LAS PUJAS ÓPTIMAS A PARTIR DE UNA FUNCIÓN DE PUJA

$$\text{Diferentes pujas con distintos tipos de riesgo} \begin{cases} \text{Neutral al riesgo: } b_i = \alpha_i\, v_i \\ \text{Adverso al riesgo: } b_i = \alpha_i \sqrt{v_i} \\ \text{Amante del riesgo: } b_i = \alpha_i\, v_i^2 \end{cases}$$

Dos jugadores, uno neutral al riesgo (b_i) y otro amante al riesgo (b_j)

$$p(\text{ganar}/b_i) = p(b_i > b_j) = p(b_i > \alpha_j\, v_j^2) = p\left(\sqrt{\frac{b_i}{\alpha_j}} > v_j\right) = p\left(v_j < \sqrt{\frac{b_i}{\alpha_j}}\right) \overset{v_j \sim U[0,k]}{=} \frac{1}{k}\sqrt{\frac{b_i}{\alpha_j}}$$

$$\max u_{b_i} = (v_i - b_i)\ .\ p(\text{ganar}/b_i) = (v_i - b_i)\ .\ \frac{1}{k}\sqrt{\frac{b_i}{\alpha_j}} = \frac{v_i\, b_i^{1/2}}{k\sqrt{\alpha_j}} - \frac{b_i^{3/2}}{k\sqrt{\alpha_j}}$$

Para calcular el valor que maximiza u_{b_i} :

$$\frac{\vartheta}{\vartheta b_j}\left[\frac{v_i\, b_i^{1/2}}{k\sqrt{\alpha_j}} - \frac{b_i^{3/2}}{k\sqrt{\alpha_j}}\right] = v_i - 3b_i = 0 \ \rightarrow\ b_i = \frac{v_i}{3} \quad \text{puja óptima neutral al riesgo}$$

Análogamente, para el jugador amante (b_j) al riesgo

$$p(\text{ganar}/b_j) = p(b_j > b_i) = p(b_j > \alpha_i\, v_i) = p\left(\frac{b_j}{\alpha_i} > v_i\right) = p\left(v_i < \frac{b_j}{\alpha_i}\right) \overset{v_i \sim U[0,k]}{=} \frac{1}{k}\frac{b_j}{\alpha_i}$$

$$\max u_{b_j} = (v_j - b_j)\ .\ p(\text{ganar}/b_j) = (v_j - b_j)\ .\ \frac{1}{k}\frac{b_j}{\alpha_i} = \frac{v_j\, b_j}{k\,\alpha_i} - \frac{b_j^2}{k\,\alpha_i}$$

Para calcular el valor que maximiza u_{b_j} :

$$\frac{\vartheta}{\vartheta b_j}\left[\frac{v_j\, b_j}{k\,\alpha_i}-\frac{b_j^2}{k\,\alpha_i}\right]=v_j-2b_j=0 \;\rightarrow\; b_j=\frac{v_j}{2} \quad \text{puja óptima amante al riesgo}$$

Dos jugadores, uno amante al riesgo (b_i) y otro adverso al riesgo (b_j)

$$p(ganar/b_i)=p(b_i>b_j)=p(b_i>\alpha_j\sqrt{v_j})=p\left(\frac{b_i}{\alpha_j}>\sqrt{v_j}\right)=p\left(v_j<\frac{b_i^2}{\alpha_j^2}\right)\overset{v_j\sim U[0,\,k]}{=}\frac{1}{k}\,\frac{b_i^2}{\alpha_j^2}$$

$$\max\, u_{b_i}=(v_i-b_i)\;.\;p(ganar/b_i)=(v_i-b_i)\;.\frac{1}{k}\,\frac{b_i^2}{\alpha_j^2}=\frac{v_i\, b_i^2}{k\,\alpha_j^2}-\frac{b_i^3}{k\,\alpha_j^2}$$

Para calcular el valor que maximiza u_{b_i} :

$$\frac{\vartheta}{\vartheta b_i}\left[\frac{v_i\, b_i^2}{k\,\alpha_j^2}-\frac{b_i^3}{k\,\alpha_j^2}\right]=2b_1 v_i-3b_i^2=0 \;\rightarrow\; b_i=\frac{2\,v_i}{3} \quad \text{puja óptima amante al riesgo}$$

Análogamente, para el jugador adverso (b_j) al riesgo

$$p(ganar/b_j)=p(b_j>b_i)=p(b_j>\alpha_i\, v_i^2)=p\left(\sqrt{\frac{b_j}{\alpha_i}}>v_i\right)=p\left(v_i<\sqrt{\frac{b_j}{\alpha_i}}\right)\overset{v_i\sim U[0,\,k]}{=}\frac{1}{k}\,\frac{b_j^{1/2}}{\alpha_1^{1/2}}$$

$$\max\, u_{b_j}=(v_j-b_j)\;.\;p(ganar/b_j)=(v_j-b_j)\;.\;\frac{1}{k}\,\frac{b_j^{1/2}}{\alpha_1^{1/2}}=\frac{v_j\, b_j^{1/2}}{k\,\alpha_1^{1/2}}-\frac{b_j^{3/2}}{k\,\alpha_1^{1/2}}$$

Para calcular el valor que maximiza u_{b_j} :

$$\frac{\vartheta}{\vartheta b_j}\left[\frac{v_j\, b_j^{1/2}}{k\,\alpha_1^{1/2}}-\frac{b_j^{3/2}}{k\,\alpha_1^{1/2}}\right]=v_j-3b_j=0 \;\rightarrow\; b_j=\frac{v_j}{3} \quad \text{puja óptima adverso al riesgo}$$

Dos jugadores, uno adverso al riesgo (b_i) y otro neutral al riesgo (b_j)

$$p(ganar/b_i)=p(b_i>b_j)=p(b_i>\alpha_j\, v_j)=p\left(\frac{b_i}{\alpha_j}>v_j\right)=p\left(v_j<\frac{b_i}{\alpha_j}\right)\overset{v_j\sim U[0,\,k]}{=}\frac{1}{k}\,\frac{b_i}{\alpha_j}$$

$$\max\, u_{b_i}=(v_i-b_i)\;.\;p(ganar/b_i)=(v_i-b_i)\;.\frac{1}{k}\,\frac{b_i}{\alpha_j}=\frac{v_i\, b_i}{k\,\alpha_j}-\frac{b_i^2}{k\,\alpha_j}$$

Para calcular el valor que maximiza u_{b_i} :

$$\frac{\vartheta}{\vartheta b_i}\left[\frac{v_i\, b_i}{k\,\alpha_j} - \frac{b_i^2}{k\,\alpha_j}\right] = v_i - 2\, b_i = 0 \quad \rightarrow \quad b_i = \frac{v_i}{2} \quad \text{puja óptima adverso al riesgo}$$

Análogamente, para el jugador neutral (b_j) al riesgo

$$p(\text{ganar} / b_j) = p(b_j > b_i) = p(b_j > \alpha_i \sqrt{v_i}) = p\left(\frac{b_j^2}{\alpha_1^2} > v_i\right) = p\left(v_i < \frac{b_j^2}{\alpha_1^2}\right) \overset{v_i \sim U[0,\,k]}{=} \frac{1}{k}\,\frac{b_j^2}{\alpha_1^2}$$

$$\max\, u_{b_j} = (v_j - b_j)\ .\ p(\text{ganar} / b_j) = (v_j - b_j)\ .\ \frac{1}{k}\,\frac{b_j^2}{\alpha_1^2} = \frac{v_j\, b_j^2}{k\,\alpha_1^2} - \frac{b_j^3}{k\,\alpha_1^2}$$

Para calcular el valor que maximiza u_{b_j} :

$$\frac{\vartheta}{\vartheta b_j}\left[\frac{v_j\, b_j^2}{k\,\alpha_1^2} - \frac{b_j^3}{k\,\alpha_1^2}\right] = 2 v_j - 3 b_j^2 = 0 \quad \rightarrow \quad b_j = \frac{2\, v_j}{3} \quad \text{puja óptima neutral al riesgo}$$

UAM UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

(IMPRESO EN PAPEL RECICLADO) UNICAMENTE PARA USO ESCOLAR

En una subasta hay dos jugadores, donde todos pagan por su puja sin importar si ganó el objeto subastado. Cada jugador conoce su valoración pero no sabe cuál es la valoración del contricante, solo sabe que es una variable aleatoria que se distribuye $U[0,1]$

a) Encontrar la oferta óptima del jugador si el oponente sigue la regla de decisión $b(v) = k\,v^2$

b) En equilibrio la oferta óptima del jugador i debe seguir $b(v) = k\,v^2$, ¿cuál es el ENB?

Solución:

a) $p(\text{ganar}/b_i) = p(b_i > b_j) = p(b_i > k\,v_j^2) = p\left(\sqrt{\dfrac{b_i}{k}} > v_j\right) = p\left(v_j < \sqrt{\dfrac{b_i}{k}}\right) \overset{v_j \sim U[0,k]}{=} \sqrt{\dfrac{b_i}{k}} = \dfrac{b_i^{1/2}}{k^{1/2}}$

$$\max u_{b_i} = v_i \,.\, p(\text{ganar}/b_i) - b_i = \frac{v_i\, b_i^{1/2}}{k^{1/2}} - b_i$$

Para calcular el valor que maximiza u_{b_i}: $\dfrac{\vartheta}{\vartheta b_i}\left[\dfrac{v_i\, b_i^{1/2}}{k^{1/2}} - b_i\right] = v_i - 2\sqrt{k\,b_i} = 0 \;\rightarrow\; b_i = \dfrac{v_i^2}{4k}$

b) $b_i = \dfrac{v_i^2}{4k} = k\,v_1^2 \;\rightarrow\; k = \dfrac{1}{2} \;\rightarrow\; \text{ENB} = \left\{\left(b_1 = \dfrac{v^2}{2}\,,\; b_2 = \dfrac{v^2}{2}\right)\right\}$

Demostrar que en una subasta de primer precio entre dos jugadores, que un jugador ofrezca su valoración, con la regla de decisión $b(v) = v$, $v \sim U[0,1]$, no es un equilibrio de Nash.

Solución:

a) $p(\text{ganar}/b_i) = p(b_i > b_j) = p(b_i > v_j) = p\left(v_j < b_i\right) \overset{v_j \sim U[0,1]}{=} b_i$

$$\max u_{b_i} = (v_i - b_i)\,.\,p(\text{ganar}/b_i) = (v_i - b_i)\,.\,b_i$$

Para calcular el valor que maximiza u_{b_i}: $\dfrac{\vartheta}{\vartheta b_i}\left[(v_i - b_i)\,.\,b_i\right] = v_i - 2b_i = 0 \;\rightarrow\; b_i = \dfrac{v_i}{2}$

$$\text{ENB} = \left\{\left(b_1 = \frac{v_1}{2}\,,\; b_2 = \frac{v_2}{2}\right)\right\}$$

Si el jugador 2 puja su valoración, el jugador 1 puja prefiere pujar la mitad de la suya, con lo que no es un ENB porque tiene incentivos unilaterales a desviarse.

Herencia Subastada: Dos hermanos heredan la empresa de su padre, para decidir quien se queda con la herencia de la empresa hacen una subasta de primer precio entre ellos donde la puja más alta gana, paga su puja y se queda con la empresa. La diferencia con una subasta normal de primer precio es que el perdedor se queda con la puja del ganador. Es decir, si el hermano i gana con b_i, entonces el se queda con $v_i - b_i$ y el perdedor se queda con b_i.

Se supone que cada uno conoce su valoración, pero no la de su hermano y sabe que $v_i \sim U[0,\,1]$ y en equilibrio $b(v) = k\,v$.

Calcular la utilidad esperada en equilibrio.

Utilidad esperada: $u_i = (v_i - b_i)\,.\,p(b_i > b_j) + \int_{b_j/k}^{1} b_j(v_j)\,dv_j$

$$p(\text{ganar} / b_i) = p(b_i > b_j) = p(b_i > k\,v_j) = p\left(\frac{b_i}{k} > v_j\right) = p\left(v_j < \frac{b_i}{k}\right) \overset{v_j \sim U[0,\,1]}{=} \frac{b_i}{k}$$

$$\int_{b_j/k}^{1} b_j(v_j)\,dv_j = \int_{b_i/k}^{1} k\,v_j\,dv_j = k\int_{b_i/k}^{1} v_j\,dv_j = \frac{k}{2}\left[v_j^2\right]_{b_i/k}^{1} = \frac{k}{2} - \frac{b_i^2}{2k}$$

$$u_i = (v_i - b_i)\,.\,\frac{b_i}{k} + \frac{k}{2} - \frac{b_i^2}{2k^2} = \frac{v_i\,b_i}{k} - \frac{b_i^2}{k} + \frac{k}{2} - \frac{b_i^2}{2k}$$

Para calcular el valor que maximiza la utilidad esperada:

$$\frac{\vartheta}{\vartheta b_i}\left[\frac{v_i\,b_i}{k} - \frac{b_i^2}{k} + \frac{k}{2} - \frac{b_i^2}{2k}\right] = \frac{v_i}{k} - \frac{2b_i}{k} - \frac{b_i}{k} = 0 \;\rightarrow\; v_i - 3b_i = 0 \;\rightarrow\; v_i - 3\,k\,v_i = 0 \;\rightarrow\; k = \frac{1}{3}$$

La utilidad esperada en equilibrio: $u_i = \left(v_i - \frac{v_i}{3}\right).\,v_i + \frac{3}{2}\left[v_i^2\right]_{v_i}^{1} = \frac{3}{2} - \frac{5}{6}v_1^2$

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

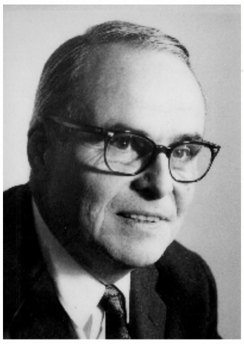
Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....

TEORÍA DE JUEGOS - TEORÍA DE LAS SUBASTAS

Von Neumann (1903-1957)

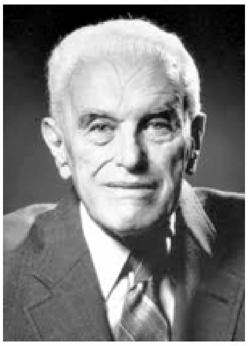


Tucker (1905-1995)

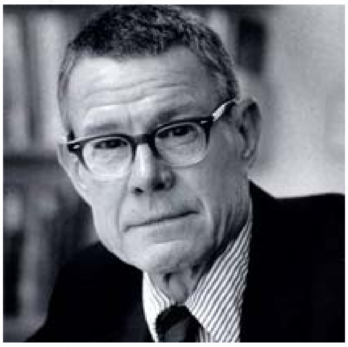
Flood (1908 - 1991)

Dresher (1911-1992)

Vickrey (1914-1996)
Nobel Economía 1996



Harsanyi (1920-2000)
Nobel Economía 1994



Schelling (1921-2016)
Nobel Economía 2004

Morgenstern (1922-1977)

Nash (1928-2015)
Nobel Economía 1994

Selten (1930-2016)
Nobel Economía 1994

Aumann (1930 -)
Nobel Economía 2004

Hoja nº ....

UAM
Universidad Autónoma de Madrid

Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....

(IMPRESO EN PAPEL RECICLADO)

UNICAMENTE PARA USO ESCOLAR

Hoja nº ....

Universidad Autónoma de Madrid

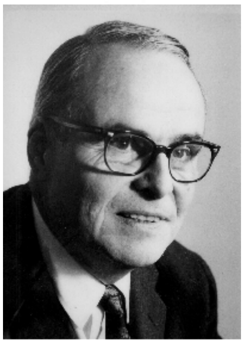
Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....

TEORÍA DE JUEGOS - TEORÍA DE LAS SUBASTAS

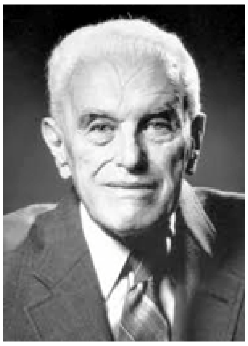

Von Neumann (1903-1957)

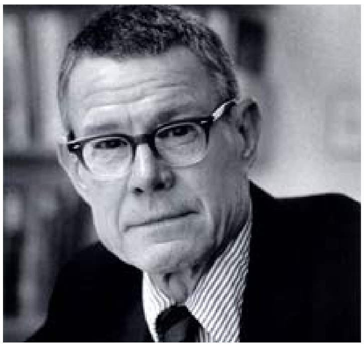

Tucker (1905-1995)


Flood (1908 - 1991)


Dresher (1911-1992)


Vickrey (1914-1996)
Nobel Economía 1996


Harsanyi (1920-2000)
Nobel Economía 1994


Schelling (1921-2016)
Nobel Economía 2004


Morgenstern (1922-1977)


Nash (1928-2015)
Nobel Economía 1994


Selten (1930-2016)
Nobel Economía 1994


Aumann (1930 -)
Nobel Economía 2004

Instrumentos Estadísticos Avanzados
Facultad Ciencias Económicas y Empresariales
Departamento de Economía Aplicada
Profesor: Santiago de la Fuente Fernández