Universidad Autónoma de Madrid
Instrumentos Estadísticos Avanzados
Facultad Ciencias Económicas y Empresariales
Departamento de Economía Aplicada
Profesor: Santiago de la Fuente Fernández

PROGRAMACIÓN LINEAL

PROGRAMACIÓN LINEAL

- Método del Simplex.
- Método del Simplex Dual.
- Método de Karmarkar.
- Método del Simplex para la forma matricial.

Hoja nº ....

UAM
Universidad Autónoma de Madrid

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

PROGRAMACIÓN LINEAL

- Método del Simplex.
- Método del Simplex Dual.
- Método de Karmarkar.
- Método del Simplex para la forma matricial.

UNICAMENTE PARA USO ESCOLAR (IMPRESO EN PAPEL RECICLADO)

PROGRAMACIÓN LINEAL: ALGORITMO DEL SIMPLEX

La Programación Lineal está diseñada para modelos con funciones objetivo y restricciones lineales.

Para poder aplicar la programación lineal el modelo matemático debe constar únicamente de igualdades y desigualdades lineales.

El Algoritmo del Simplex es el más utilizado para resolver modelos de Programación Lineal, este método fue creado en 1947 por el matemático norteamericano George Dantzig.

Es un procedimiento iterativo que permite ir mejorando las soluciones a cada paso. El proceso concluye cuando ya no es posible seguir mejorando más dicha solución.

Tiene como base el álgebra matricial y el proceso de eliminación de Gauss-Jordan. Es un proceso de búsqueda que se vuelve sorprendentemente eficiente para solucionar problemas de gran tamaño y complejos.

En la actualidad el Método Simplex se aplica con eficiencia a gran número de paquetes de software que facilitan el proceso de cálculo. Entre otros, en dispositivos Android la aplicación Simplex Android Calculator soporta fracciones sin limitación de variables ni de restricciones.

APLICACIONES DEL SIMPLEX A LA ECONOMÍA Y A LA EMPRESA

Este método o procedimiento cuenta con un sinnúmero de aplicaciones en programación lineal. En Economía y la Empresa entre las aplicaciones más comunes del método Simplex destacan los problemas de Flujo máximo, Transporte, Transbordo, Coste Mínimo, Decisiones en ambiente de incertidumbre.

APLICACIONES PROGRAMACIÓN LINEAL

Marketing	Mano de obra	Manufacturas
Transporte	Mezclas	Finanzas

Otras Decisiones

MÉTODO ABSTRACTO PARA ENCONTRAR UNA SOLUCIÓN ÓPTIMA

Se trata de optimizar una función lineal, llamada objetivo o económica,

$Z = c_1\,x_1 + c_2\,x_2 + c_3\,x_3 + \cdots + c_n\,x_n$ sometida a un sistema de restricciones:

$$\text{Forma regular}\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1n}\,x_n = b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdots + a_{2n}\,x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \cdots + a_{mn}\,x_n = b_m \\ x_i \geq 0 \end{cases} \qquad [1]$$

Un modelo expresado de esta forma se dice que está en forma regular, pues las ecuaciones de restricción son verdaderas ecuaciones (no inecuaciones).

En el caso en que las restricciones sean inecuaciones se sumará o restará (depende del signo de la desigualdad) a cada una de las inecuaciones del sistema de restricciones una variable llamada variable de holgura, que son siempre positivas.

En consecuencia, habrá que añadir al sistema m variables de holgura.

Evidentemente estas variables también aparecerán en la función objetivo, pero para que ésta no varíe los coeficientes c_i correspondientes serán nulos.

Se llama solución del modelo a cualquier conjunto de variables $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ que satisfaga el sistema. Esta solución se llama factible o posible si las $x_i \geq 0$. En el caso en que la solución factible minimice o maximice la función objetivo, se le llama solución óptima.

Una solución es básica no degenerada cuando consta de m valores no nulos, mientras que si existen menos de m se dice que la solución es degenerada.

El sistema de restricciones en forma regular [1] puede expresarse en la forma:

$$\boxed{Z = cX} \quad \text{sujeto a } X \geq 0 \text{ y } AX = b$$

donde, $c = (c_1, c_2, \cdots, c_n)$ es un vector fila y $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ es un vector columna.

Otra representación del sistema [1] es la siguiente:

$$\boxed{Z = cX} \quad \text{sujeto a } X \geq 0 \text{ y } \quad x_1\,P_1 + x_2\,P_2 + \cdots + x_n\,P_n = P_0$$

$A = (a_{ij})$, $b = (b_1, b_2, \cdots, b_m)$ y 0 es un vector columna n-dimensional nulo.

donde P_j $(1 \leq j \leq n)$ es la j-ésima columna de la matriz A y $P_0 = b$

Teorema 1: El conjunto de todas las soluciones posibles al problema de programación lineal es un conjunto convexo.

De todas las soluciones factibles solo interesa las que sean vértices o extremos.

El objetivo es minimizar la función $Z = cX$, solamente se tiene en cuenta este caso porque maximizar una función $\text{Max } Z = -\text{ Min}(-Z)$.

Para encontrar la solución óptima se tendrán que analizar los puntos extremos del conjunto de soluciones factibles y se hace de forma indirecta, asociando a cada vértice un sistema de vectores linealmente independientes como se refleja a continuación.

Se conoce que el sistema de restricciones de la función objetivo $Z = cX$ puede expresarse en la forma $\sum_{j=1}^{n} x_j P_j = P_o$

Teniendo en cuenta que la característica de la matriz es m, se puede afirmar que el número máximo de vectores linealmente independientes entre todos los P_j es m.

En estas condiciones se asocia a cada uno de los P_j linealmente independientes un punto extremo de acuerdo con el siguiente teorema.

Teorema 2: Si puede encontrarse un conjunto $k \leq m$ vectores $(P_1, P_2, \cdots, P_k)$ que es linealmente independiente y tal que

$$x_1 P_1 + x_2 P_2 + \cdots + x_n P_n = P_0 \quad \text{y todas las } x_i \geq 0$$

entonces, el punto $X = (x_1, x_2, \cdots, x_k, 0, \cdots, 0)$ es un punto extremo del conjunto convexo de soluciones posibles. En este caso X es un vector n-dimensional cuyos últimos $(n - k)$ términos son cero.

Recíprocamente, si $X = (x_1, x_2, \cdots, x_k)$ es un punto extremo del conjunto convexo de las soluciones, entonces los vectores asociados con las $x_i \geq 0$ forman un conjunto linealmente independiente. De aquí se sigue que, al menos, m de las x_i son positivas.

Definición 1: Se dice que las variables $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ constituyen un conjunto básico si la matriz de sus coeficientes tiene inversa (no singular), es decir, si los vectores $(P_1, P_2, \cdots, P_m)$ son linealmente independientes.

Las restantes variables son no básicas o auxiliares.

Hay que tener en cuenta que, a lo sumo, hay $\binom{n}{m}$ conjuntos básicos de variables.

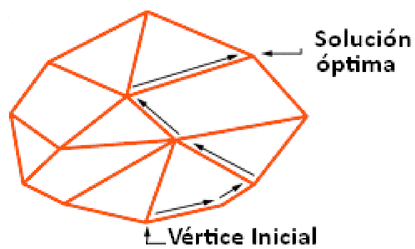
Definición 2: Las soluciones de las ecuaciones de restricción en las que las variables no básicas o auxiliares se hacen iguales a cero, se dice que son soluciones básicas.

Una solución básica contiene $(n - m)$ ceros como mínimo y existe un número finito de soluciones básicas, como máximo $\binom{n}{m}$.

Definición 3: Una solución en la que las variables tienen valores no negativos se llama factible.

EL MÉTODO DEL SIMPLEX

La solución óptima está asociada a un punto extremo de la región factible que satisface todas las restricciones, determinando el valor máximo de la función objetivo z, o en su caso el valor mínimo de z.



Es un método que, una vez se ha determinado una solución básica, permite obtener otra solución que proporcione el mínimo en un número finito de pasos.

Estos pasos o iteraciones consisten en encontrar una nueva solución posible cuyo valor correspondiente de la función objetivo sea menor que el valor de la función objetivo de la solución precedente.

El proceso continúa hasta alcanzar una solución mínima.

Al conocer que todas las soluciones de puntos extremos tienen asociados *m* vectores linealmente independientes, la búsqueda se limita a aquellas soluciones que son generadas por *m* vectores linealmente independientes.

Se parte de que el problema de programación lineal tiene solución, que cada solución factible básica es no degenerada, y que se conoce una solución factible.

SITUACIÓN DEL PROBLEMA

Sea la solución dada $X_0 = (x_{10}, x_{20}, \cdots, x_{m0})$

Y el conjunto de vectores linealmente independientes $(P_1, P_2, \cdots, P_m)$

Se tiene que: $x_{10} P_1 + x_{20} P_2 + \cdots + x_{m0} P_{m0} = P_0$ con todas las $x_{i0} \geq 0$

$$z_0 = c_1 x_{10} + c_2 x_{20} + c_3 x_{30} + \cdots + c_m x_{m0}$$

Las c_i son los coeficientes de coste de la función objetivo y z_0 es el correspondiente valor de la función objetivo para la solución dada.

Puesto que $(P_1, P_2, \cdots, P_m)$ son linealmente independientes se puede expresar cualquier del conjunto $(P_1, P_2, \cdots, P_n)$ en función de $(P_1, P_2, \cdots, P_m)$

Sea P_j dado por: $x_{1j}P_1 + x_{2j}P_2 + \cdots + x_{mj}P_{mj} = P_j \qquad j = 1, 2, \cdots, n$

Y se define, $c_1\, x_{1j} + c_2\, x_{2j} + c_3\, x_{30} + \cdots + c_m\, x_{mj} = Z_j \qquad j = 1, 2, \cdots, n$

Donde los c_i son los coeficientes de costo correspondientes a P_i

Para evitar confusiones en la notación, se designa el vector solución $X = (x_1, x_2, \cdots, x_m)$ por el vector $X_0 = (x_{10}, x_{20}, \cdots, x_{m0})$. Así mismo se indica que los $(n - k)$ valores restantes del vector solución han sido hechos arbitrariamente iguales a cero.

Para aplicar el Método del Simplex es necesario recurrir a los dos teoremas que se exponen a continuación:

Teorema 1: Si para cualquier j fija, se cumple la condición $z_j - c_j > 0$, entonces se puede construir un conjunto de soluciones posibles tal que $z < z_0$ para cualquier miembro del conjunto, donde el límite inferior de z puede ser finito o infinito.

Teorema 2: Si para cualquier solución básica $X_0 = (x_{10}, x_{20}, \cdots, x_{m0})$ las condiciones $z_j - c_j \leq 0$ se cumplen, para todas las $j = 1, 2, \cdots, n$, entonces dicha solución es una solución factible mínima.

PROCEDIMIENTO PARA RESOLVER EL PROBLEMA

Se supone que:

a) Se seleccionan *m* vectores linealmente independientes que dan como resultado una solución posible, y se expresan todos los otros vectores en términos de esta base.

b) La matriz del problema contiene m vectores que pueden ser arreglados explícitamente para formar una matriz diagonal, unidad, de orden m.

a) Sean $(P_1, P_2, \cdots, P_m)$ los m vectores linealmente independientes y se designa la matriz $m \times m$ $(P_1, P_2, \cdots, P_m)$ por B. La matriz B recibe el nombre de base admisible.

Para calcular el vector solución X correspondiente y la representación de los otros vectores en términos de la base, se debe calcular primero B^{-1}, puesto que

$$B X_0 = P_0 \quad \rightarrow \quad X_0 = B^{-1} P_0 \quad \Rightarrow \quad X_j = B^{-1} P_j$$

donde, $X_0 = (x_{10}, x_{20}, \cdots, x_{m0})$ con $x_{i0} \geq 0$ y $X_j = (x_{1j}, x_{2j}, \cdots, x_{mj})$ son vectores columna.

Para comenzar el método del Simplex se agrupan los vectores de la matriz de la forma:

$$\left(P_o \middle| P_1, P_2, \cdots, P_m \middle| P_{m+1}, \cdots, P_n\right) \text{ o bien en la forma } \left(P_o \middle| B \middle| P_{m+1}, \cdots, P_n\right)$$

Multiplicando los elementos de la expresión matricial anterior por B^{-1} se obtiene:

$$B^{-1}\left(P_o \middle| B \middle| P_{m+1}, \cdots, P_n\right) = \left(X_o \middle| I_m \middle| X_{m+1}, \cdots, X_n\right)$$

Como se conocen las c_i, se calculan las $(z_j - c_j)$ y se determina, si para cualquier j la correspondiente $(z_j - c_j) > 0$. Si esto es así, se desarrolla el procedimiento de cómputo descrito en el Teorema 1.

Si no es así, se ha encontrado la solución mínima posible.

b) Se parte de un conjunto dado de vectores $(P_1, P_2, \cdots, P_n)$ que contiene m vectores unitarios que pueden ser agrupados para formar una matriz unitaria de orden $m \times m$.

Sean los vectores $(P_1, P_2, \cdots, P_m)$ tomando como base admisible $B = (P_1, P_2, \cdots, P_m)$

Puesto que $B^{-1} = I_m$ y dado que originariamente se supuso que todos los elementos de P_0 eran no negativos, la solución de punto extremo inicial será:

$$X_0 = P_0 \quad y \quad X_j = P_j$$

donde, $X_0 = (x_{10}, x_{20}, \cdots, x_{m0})$ con $x_{i0} \geq 0$ y $X_j = (x_{1j}, x_{2j}, \cdots, x_{mj})$

Para iniciar el Método del Simplex se arregla la matriz del problema como se muestra en la tabla adjunta.

I	Base	c	P_0	c_1	c_2	$\cdots$	c_h	$\cdots$	c_m	c_{m+1}	•	c_j	•	c_k	•	c_n
				P_1	P_2	$\cdots$	P_h	$\cdots$	P_m	P_{m+1}	•	P_j	•	P_k	•	P_n
1	P_1	c_1	x_{10}	1	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$x_{1,m+1}$	•	x_{1j}	•	x_{1k}	•	x_{1n}
2	P_2	c_2	x_{20}	0	1	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$x_{2,m+1}$	•	x_{2j}	•	x_{2k}	•	x_{2n}
•	•	•	•	•	•	$\cdots$	•	$\cdots$	•	•	•	•	•	•	•	•
h	P_h	c_h	x_{h0}	0	0	$\cdots$	1	$\cdots$	0	$x_{h,m+1}$	•	x_{hj}	•	x_{hk}	•	x_{hn}
•	•	•	•	•	•	$\cdots$	•	$\cdots$	•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	$\cdots$	•	$\cdots$	•	•	•	•	•	•	•	•
m	P_m	c_m	x_{m0}	0	0	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$x_{m,m+1}$	•	x_{mj}	•	x_{mk}	•	x_{mn}
$m+1$			z_0	0	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$z_{m+1} - c_{m+1}$		$z_j - c_j$		$z_k - c_k$		$z_n - c_n$

En la práctica no es necesario agrupar entre sí los vectores unitarios, no obstante se hace en esta ocasión con propósito ilustrativo.

De las ecuaciones originales del problema, dadas por $AX = b$, se tiene que $x_{i0} = b_i$, x_{ij} para $j = 1, 2, \cdots, n$ se obtiene tomando el producto escalar c con el vector X_j, es decir:

$$z_0 = \sum_{i=1}^{m} c_i\, x_{i0} \qquad\qquad z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i\, x_{ij} \quad 1 \le j \le n$$

Los elementos z_j y $(z_j - c_j)$ se anotan en sus respectivas columnas en el renglón $(m+1)$.

- La diferencia $(z_j - c_j)$ será cero para aquellos vectores que están en la base.
- Sí todos los números $(z_j - c_j) \le 0$ para $(j = 1, 2, \cdots, n)$, entonces la solución

  $X_0 = (x_{10}, x_{20}, \cdots, x_{m0}) = (b_1, b_2, \cdots, b_m)$ es una solución mínima factible, y el valor correspondiente de la función objetivo es z_0.
- En caso de que al menos una diferencia $(z_j - c_j) > 0$ se calcula una nueva solución factible cuya base contiene $(m-1)$ vectores de la base original $(P_1, P_2, \cdots, P_m)$.

  El vector que debe introducirse es aquel que corresponde a $\boxed{\max_j (z_j - c_j)}$

  Si hay más de un resultado igual, la regla será seguir el orden lexicográfico.

  Suponiendo que en este caso es: $\max_j (z_j - c_j) = z_k - c_k > 0$, el vector que será introducido en la base será P_k.

  A continuación se calcula: $\boxed{\theta_0 = \min_i \dfrac{x_{i0}}{x_{ik}}}$ para los valores $x_{ik} > 0$
- Sí todas las $x_{ik} \le 0$ habría una solución factible donde la función objetivo se puede hacer arbitrariamente pequeña, con lo que finalizaría el proceso.
- Suponiendo que algunas $x_{ik} > 0$ y que $\theta_0 = \min_i \dfrac{x_{i0}}{x_{ik}} = \dfrac{x_{h0}}{x_{hk}}$, el vector eliminado en la base sería P_h. La nueva base para la nueva solución sería $(P_1, P_2, \cdots, P_{h-1}, P_{h+1}, \cdots, P_m, P_k)$

  Ahora hay que calcular explícitamente la nueva solución y expresar cada vector que no se encuentra en la base en términos de esta nueva base.

  Puesto que la base inicial es $(P_1, P_2, \cdots, P_m) = I_m$, se pueden expresar fácilmente todos los vectores P_i en términos de esta base. Teniendo entonces:

$$P_0 = x_{10}\,P_1 + x_{20}\,P_2 + \cdots + x_{h0}\,P_h + \cdots + x_{m0}\,P_m$$
$$P_k = x_{1k}\,P_1 + x_{2k}\,P_2 + \cdots + x_{hk}\,P_h + \cdots + x_{mk}\,P_m$$

Si se despeja en la expresión P_k el valor de P_h y se sustituye en la de P_0 se obtiene:

$$P_k = x_{1k}\,P_1 + x_{2k}\,P_2 + \cdots + x_{hk}\,P_h + \cdots + x_{mk}\,P_m \quad \rightarrow$$
$$\rightarrow \quad P_h = \frac{P_k}{x_{hk}} - \frac{x_{1k}}{x_{hk}}\,P_1 - \frac{x_{2k}}{x_{hk}}\,P_2 - \cdots - \frac{x_{mk}}{x_{hk}}\,P_m$$

$$P_0 = \overbrace{\left(x_{10} - \frac{x_{h0}}{x_{hk}}\,x_{1k}\right)}^{x^\bullet_{10}} P_1 + \overbrace{\left(x_{20} - \frac{x_{h0}}{x_{hk}}\,x_{2k}\right)}^{x^\bullet_{20}} P_2 + \cdots + \overbrace{\frac{x_{h0}}{x_{hk}}}^{x^\bullet_{k0}}\,P_k + \cdots + \overbrace{\left(x_{m0} - \frac{x_{h0}}{x_{hk}}\,x_{mk}\right)}^{x^\bullet_{m0}} P_m$$

La nueva solución posible es $X^\bullet_0 = (x^\bullet_{10}, x^\bullet_{20}, \cdots, x^\bullet_{k0}, \cdots, x^\bullet_{m0})$ con $x^\bullet_{i0} \geq 0$ y dada por

$$\boxed{x^\bullet_{i0} = x_{i0} - \frac{x_{h0}}{x_{hk}}\,x_{ik}} \quad \text{para } i = 1, 2, \cdots, h-1, h+1, \cdots, m$$

De forma análoga, sustituyendo la expresión para P_h en la de P_j, se obtiene la expresión para cada P_j que no se encuentre en la nueva base.

En términos de esta nueva base, resulta:

$$P_j = x_{1j}\,P_1 + x_{2j}\,P_2 + \cdots + x_{hj}\,P_h + \cdots + x_{mj}\,P_m \qquad 1 \leq j \leq n \quad \rightarrow$$
$$\rightarrow \quad P_j = x^\bullet_{1j}\,P_1 + x^\bullet_{2j}\,P_2 + \cdots + x^\bullet_{kj}\,P_k + \cdots + x^\bullet_{mj}\,P_m$$

donde, $\boxed{x^\bullet_{ij} = x_{ij} - \frac{x_{hj}}{x_{hk}}\,x_{ik}}$ $(i \neq h)$ $\boxed{x^\bullet_{kj} = \frac{x_{hj}}{x_{hk}}}$

Puesto que $z^\bullet_j - c_j = c_1 x^\bullet_{1j} + c_2 x^\bullet_{2j} + \cdots + c_k x^\bullet_{kj} + \cdots + c_m x^\bullet_{mj} - c_j$

Se desprende que $z^\bullet_j - c_j = z_j - c_j - \dfrac{x_{hj}}{x_{hk}}(z_k - c_k)$

Así como que $z^\bullet_0 = c_1 x^\bullet_{10} + c_2 x^\bullet_{20} + \cdots + c_k x^\bullet_{k0} \cdots + c_m x^\bullet_{m0} = z_0 - \dfrac{x_{h0}}{x_{hk}}(z_k - c_k)$

De esta forma se observa que, para obtener una nueva solución $X^\bullet_0$, los nuevos vectores $x^\bullet_i$ y las $(z^\bullet_j - c_j)$ correspondientes, cada elemento de la tabla anterior para las filas $(i = 1, 2, \cdots, m-1)$ y las columnas $(j = 0, 1, \cdots, n)$ se transforma mediante las fórmulas:

UAM Universidad Autónoma de Madrid

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

$$\boxed{x^{\bullet}_{ij} = x_{ij} - \frac{x_{hj}}{x_{hk}}\, x_{ik}} \quad (i \neq h) \qquad \boxed{x^{\bullet}_{kj} = \frac{x_{hj}}{x_{hk}}}$$

donde, $z^{\bullet}_0 = x^{\bullet}_{m-1\,0}$ y $(z^{\bullet}_j - c_j) = x^{\bullet}_{m-1\,j}$

Es decir, se aplica las fórmulas a todos los elementos de la tabla, incluyendo la columna P_0 y la fila $(m-1)$

RESUMEN DEL MÉTODO DEL SIMPLEX

- Se calculan los elementos $(z_j - c_j)$ para determinar si se ha encontrado una solución mínima, es decir, sí $(z_j - c_j) \leq 0$ para todo valor de j.
- El vector que se ha de introducir en la base sería el mayor $(z_j - c_j)$
- El vector que ha de ser eliminado de la base, que para asegurar sea una nueva solución ha de ser el vector con $\min\left(\frac{x_{i0}}{x_{ik}}\right)$ para aquellas $x_{ik} > 0$, donde k corresponde al vector seleccionado en el paso 2. Sí todas las $x_{ik} \leq 0$ la solución es ilimitada.
- La transformación de la tabla por el método de eliminación para obtener la nueva solución y los elementos asociados.
- Cada una de estas iteraciones produce una solución nueva y por los teoremas 1 y 2 enunciados se obtiene finalmente una solución mínima, o bien se determina una solución ilimitada.

UNICAMENTE PARA USO ESCOLAR (IMPRESO EN PAPEL RECICLADO)

UAM Universidad Autónoma de Madrid

Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....

(IMPRESO EN PAPEL RECICLADO)

UNICAMENTE PARA USO ESCOLAR

APLICACIÓN DEL MÉTODO SIMPLEX, SOLUCIÓN FACTIBLE MÍNIMA

Minimizar: $z = x_1 - 3x_2 + 2x_3$

sujeto a las restricciones: $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 7 \\ -2x_1 + 4x_2 \qquad \leq 12 \\ -4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 10 \\ x_j \geq 0 \end{cases}$

Se introducen las variables de holgura x_4 , x_5 y x_6 , cuyos coeficientes en la función objetivo son cero, quedando el planteamiento:

Minimizar: $z = x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 0x_4 - 0x_5 - 0x_6$

sujeto a las restricciones: $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 7 \\ -2x_1 + 4x_2 \qquad + x_5 = 12 \\ -4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \qquad + x_6 = 10 \\ x_j \geq 0 \end{cases}$

La base inicial $B_0 = \{P_4, P_5, P_6\}$ y la solución es $X_0 = (x_4 , x_5 , x_6) = (7 , 12 , 10)$

Puesto que $c_4 = c_5 = c_6 = 0$

			0	1	2	3	4	5	6
			c_j	1	−3	2	0	0	0
i	Base	c	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	0	7	3	−1	2	1	0	0
2	P_5	0	12	−2	4	0	0	1	0
3	P_6	0	10	−4	3	8	0	0	1
$z_j - c_j$			0				0	0	0

El valor correspondiente de la función objetivo $z_0 = \sum_{i=1}^{3} c_i\, x_{i0} = 0$

Se selecciona a P_2 para entrar en la base, ya que, $\max_j (z_j - c_j) = z_2 - c_2 = 3 > 0$

Para asegurar una nueva solución ha de ser el vector con $\min(x_{i\,0} / x_{i\,2})$ con $x_{i\,2} > 0$, si todas las $x_{i\,2} \leq 0$ la solución sería ilimitada.

Se calcula $\theta_o = \min_i \dfrac{x_{i0}}{x_{i2}} = \dfrac{x_{h0}}{x_{hk}}$ para con $x_{i\,2} > 0 \rightarrow \ \theta_0 = \min\left(\dfrac{x_{20}}{x_{22}} , \dfrac{x_{30}}{x_{22}}\right) \rightarrow \ \theta_0 = \min\left(\dfrac{12}{4} , \dfrac{10}{4}\right)$

Por consiguiente, es P_5 el que sale de la base, entra P_2, $B_1 = \{P_4, P_2, P_6\}$

Se transforma la base: $\begin{cases} x^{\bullet}_{ij} = x_{ij} - \dfrac{x_{hj}}{x_{hk}} x_{ik} & i \neq h \\ x^{\bullet}_{ij} = \dfrac{x_{hj}}{x_{hk}} & i = h \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^{\bullet}_{10} = x_{10} - \dfrac{x_{20}}{x_{22}} x_{12} = 7 - \dfrac{12}{4} \times (-1) = 10 \\ x^{\bullet}_{20} = \dfrac{x_{20}}{x_{22}} = \dfrac{12}{4} = 3 \\ x^{\bullet}_{30} = x_{30} - \dfrac{x_{20}}{x_{22}} x_{32} = 10 - \dfrac{12}{4} \times 3 = 1 \end{cases}$

Se obtiene una nueva solución: $X^{\bullet}_0 = (x_4, x_2, x_6) = (10, 3, 1)$, se calculan los valores para cada P_j (P_1, P_3, P_5) que no se encuentre en la base nueva.

$$x^{\bullet}_{11} = x_{11} - \frac{x_{21}}{x_{22}} x_{12} = 3 - \frac{-2}{4} \times (-1) = \frac{5}{2} \qquad x^{\bullet}_{12} = x_{12} - \frac{x_{22}}{x_{22}} x_{12} = 0$$

$$x^{\bullet}_{21} = \frac{x_{21}}{x_{22}} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \qquad x^{\bullet}_{22} = \frac{x_{22}}{x_{22}} = 1$$

$$x^{\bullet}_{31} = x_{31} - \frac{x_{21}}{x_{22}} x_{32} = -4 - \frac{-2}{4} \times 3 = -\frac{5}{2} \qquad x^{\bullet}_{23} = \frac{x_{23}}{x_{22}} = 0$$

$$x^{\bullet}_{13} = x_{13} - \frac{x_{23}}{x_{22}} x_{12} = 2 - 0 = 2 \qquad x^{\bullet}_{15} = x_{15} - \frac{x_{25}}{x_{22}} x_{12} = 0 - \frac{1}{4} x(-1) = \frac{1}{4}$$

$$x^{\bullet}_{23} = \frac{x_{23}}{x_{22}} = 0 \qquad x^{\bullet}_{25} = \frac{x_{25}}{x_{22}} = \frac{1}{4}$$

$$x^{\bullet}_{33} = x_{33} - \frac{x_{23}}{x_{22}} x_{12} = 8 - 0 = 8 \qquad x^{\bullet}_{35} = x_{35} - \frac{x_{25}}{x_{22}} x_{32} = 0 - \frac{1}{4} \times 3 = -\frac{3}{4}$$

			0	1	2	3	4	5	6
			c_j	1	−3	2	0	0	0
i	Base	c	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	0	10	5 / 2	0	2	1	1 / 4	0
2	P_2	−3	3	−1 / 2	1	0	0	1 / 4	0
3	P_6	0	1	−5 / 2	0	8	0	−3 / 4	1
$z^{\bullet}_j - c^{\bullet}_j$			−9	1 / 2 $\frac{3}{2} - 1$	0 $-3+3$	−2 $0-2$	0	−3 / 4 $-\frac{3}{4} - 0$	0

El valor correspondiente de la función objetivo $z_0 = \sum_{i=1}^{3} c_i x_{i0} = -9$

Se selecciona a P_2 para entrar en la base, ya que, $\max_j (z_j - c_j) = z_2 - c_2 = 3 > 0$

Para asegurar una nueva solución ha de ser el vector con $\min(x_{i0} / x_{i2})$ con $x_{i2} > 0$, si todas las $x_{i2} \le 0$ la solución sería ilimitada.

Se calcula $\theta_o = \min_i \dfrac{x_{i0}}{x_{i2}} = \dfrac{x_{h0}}{x_{hk}}$ para con $x_{i2} > 0 \;\rightarrow\; \theta_0 = \min\left(\dfrac{x_{20}}{x_{22}}, \dfrac{x_{30}}{x_{22}}\right) \rightarrow\; \theta_0 = \min\left(\dfrac{12}{4}, \dfrac{10}{4}\right)$

Por consiguiente, es P_5 el que sale de la base, entra P_2, $B_1 = \{P_4, P_2, P_6\}$

$$\text{Se transforma la base: } \begin{cases} x^{\bullet}_{ij} = x_{ij} - \dfrac{x_{hj}}{x_{hk}} x_{ik} & i \ne h \\[2ex] x^{\bullet}_{ij} = \dfrac{x_{hj}}{x_{hk}} & i = h \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^{\bullet}_{10} = x_{10} - \dfrac{x_{20}}{x_{22}} x_{12} = 7 - \dfrac{12}{4} \text{ x } (-1) = 10 \\[2ex] x^{\bullet}_{20} = \dfrac{x_{20}}{x_{22}} = \dfrac{12}{4} = 3 \\[2ex] x^{\bullet}_{30} = x_{30} - \dfrac{x_{20}}{x_{22}} x_{32} = 10 - \dfrac{12}{4} \text{ x } 3 = 1 \end{cases}$$

Se obtiene una nueva solución: $X^{\bullet}_0 = (x_4\ ,\ x_2\ ,\ x_6) = (10\ ,\ 3\ ,\ 1)$, se calculan los valores para cada P_j (P_1, P_3, P_5) que no se encuentre en la base nueva.

$$x^{\bullet}_{11} = x_{11} - \frac{x_{21}}{x_{22}} x_{12} = 3 - \frac{-2}{4} \text{ x } (-1) = \frac{5}{2} \qquad x^{\bullet}_{12} = x_{12} - \frac{x_{22}}{x_{22}} x_{12} = 0$$

$$x^{\bullet}_{21} = \frac{x_{21}}{x_{22}} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \qquad x^{\bullet}_{22} = \frac{x_{22}}{x_{22}} = 1$$

$$x^{\bullet}_{31} = x_{31} - \frac{x_{21}}{x_{22}} x_{32} = -4 - \frac{-2}{4} \text{ x } 3 = -\frac{5}{2} \qquad x^{\bullet}_{23} = \frac{x_{23}}{x_{22}} = 0$$

$$x^{\bullet}_{13} = x_{13} - \frac{x_{23}}{x_{22}} x_{12} = 2 - 0 = 2 \qquad x^{\bullet}_{15} = x_{15} - \frac{x_{25}}{x_{22}} x_{12} = 0 - \frac{1}{4} \text{x}(-1) = \frac{1}{4}$$

$$x^{\bullet}_{23} = \frac{x_{23}}{x_{22}} = 0 \qquad x^{\bullet}_{25} = \frac{x_{25}}{x_{22}} = \frac{1}{4}$$

$$x^{\bullet}_{33} = x_{33} - \frac{x_{23}}{x_{22}} x_{12} = 8 - 0 = 8 \qquad x^{\bullet}_{35} = x_{35} - \frac{x_{25}}{x_{22}} x_{32} = 0 - \frac{1}{4} \text{x} 3 = -\frac{3}{4}$$

			0	1	2	3	4	5	6
			c_j	1	−3	2	0	0	0
i	Base	c	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	0	10	5/2	0	2	1	1/4	0
2	P_2	−3	3	−1/2	1	0	0	1/4	0
3	P_6	0	1	−5/2	0	8	0	−3/4	1
$z_j^{\bullet} - c_j^{\bullet}$			−9	1/2 $\frac{3}{2}-1$	0 $-3+3$	−2 $0-2$	0	−3/4 $-\frac{3}{4}-0$	0

La función objetivo $z_0^{\bullet} = \sum_{i=1}^{3} c_i \, x_{i0} = -9$

En el segundo paso, puesto que $\max(z_j^{\bullet} - c_j) = z_1^{\bullet} - c_1 = \frac{1}{2} > 0$

Se calcula θ_o para con $x_{i1} > 0 \;\rightarrow\; \theta_0 = \frac{x_{10}}{x_{11}} = \frac{10}{5/2}$

Por tanto, P_1 entra en la base y sale P_4, $B_2 = \{P_1, P_2, P_6\}$

Se transforma la base: $\left\{\begin{array}{ll} x_{ij}^{\bullet\bullet} = x_{ij} - \dfrac{x_{hj}}{x_{hk}} x_{ik} & i \neq h \\ x_{ij}^{\bullet\bullet} = \dfrac{x_{hj}}{x_{hk}} & i = h \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_{10}^{\bullet\bullet} = \dfrac{x_{10}}{x_{11}} = \dfrac{10}{5/2} = 4 \\ x_{20}^{\bullet\bullet} = x_{20} - \dfrac{x_{10}}{x_{11}} x_{21} = 3 - \dfrac{10}{5/2} \times \dfrac{-1}{2} = 5 \\ x_{30}^{\bullet\bullet} = x_{30} - \dfrac{x_{10}}{x_{11}} x_{31} = 1 - \dfrac{10}{5/2} \times \dfrac{-5}{2} = 11 \end{array}\right.$

Se obtiene una nueva solución: $X_0^{\bullet\bullet} = (x_1, x_2, x_6) = (4, 5, 11)$, se calculan los valores para cada P_j (P_3, P_4, P_5) que no se encuentre en la base nueva.

$$x_{13}^{\bullet\bullet} = \frac{x_{13}}{x_{11}} = \frac{2}{5/2} = \frac{4}{5} \qquad x_{14}^{\bullet\bullet} = \frac{x_{14}}{x_{11}} = \frac{1}{5/2} = \frac{2}{5}$$

$$x_{23}^{\bullet\bullet} = x_{23} - \frac{x_{13}}{x_{11}} x_{21} = 0 - \frac{4}{5} \times \frac{-1}{2} = \frac{2}{5} \qquad x_{24}^{\bullet\bullet} = x_{24} - \frac{x_{14}}{x_{11}} x_{21} = 0 - \frac{2}{5} \times \frac{-1}{2} = \frac{1}{5}$$

$$x_{33}^{\bullet\bullet} = x_{33} - \frac{x_{13}}{x_{11}} x_{31} = 8 - \frac{4}{5} \times \frac{-5}{2} = 10 \qquad x_{34}^{\bullet\bullet} = x_{34} - \frac{x_{14}}{x_{11}} x_{31} = 0 - \frac{2}{5} \times \frac{-5}{2} = 1$$

UAM Universidad Autónoma de Madrid

Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....

$$x_{15}^{\bullet\bullet}=\frac{x_{15}}{x_{11}}=\frac{1/4}{5/2}=\frac{1}{10}$$

$$x_{25}^{\bullet\bullet}=x_{25}-\frac{x_{15}}{x_{11}}\,x_{21}=\frac{1}{4}-\frac{1}{10}\ \mathrm{x}\ \frac{-1}{2}=\frac{3}{10}$$

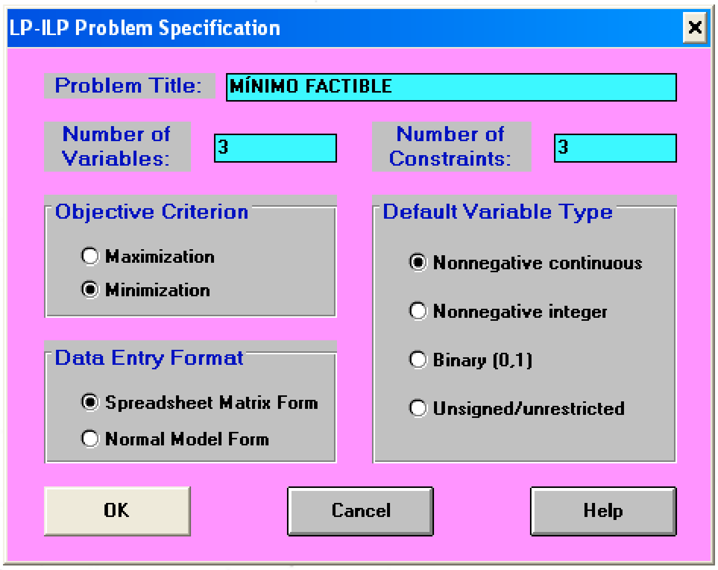
$$x_{35}^{\bullet\bullet}=x_{35}-\frac{x_{15}}{x_{11}}\,x_{31}=\frac{-3}{4}-\frac{1}{10}\ \mathrm{x}\ \frac{-5}{2}=-\frac{1}{2}$$

			0	1	2	3	4	5	6
			c_j	1	−3	2	0	0	0
i	Base	c	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_1	1	4	1	0	4/5	2/5	1/10	0
2	P_2	−3	5	0	1	2/5	1/5	3/10	0
3	P_6	0	11	0	0	10	1	−1/2	1
$z_j^{\bullet\bullet}-c_j^{\bullet\bullet}$			−11	0 $1-1$	0 $-3+3$	−12/5 $-\frac{2}{5}-2$	−1/5 $0-\frac{1}{5}$	−4/5 $0-\frac{4}{5}$	0

Como $\max(z_j^{\bullet\bullet}-c_j^{\bullet\bullet})=0$ la solución $X_0^{\bullet\bullet}=(x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_6)=(4\ ,\ 5\ ,\ 11)$ es una solución factible mínima, con lo que se ha resuelto el problema.

WinQSB / Linear and Integer Programming

Minimizar: $z=x_1-3x_2+2x_3$ restricciones: $\begin{cases}3x_1-x_2+2x_3\le 7\\ -2x_1+4x_2\le 12\\ -4x_1+3x_2+8x_3\le 10\\ x_j\ge 0\end{cases}$



Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

Linear and Integer Programming

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

MÍNIMO FACTIBLE

Variable -->	X1	X2	X3	Direction	R. H. S.
Minimize	1	-3	2		
C1	3	-1	2	<=	7
C2	-2	4		<=	12
C3	-4	3	8	<=	10
LowerBound	0	0	0		
UpperBound	M	M	M		
VariableType	Continuous	Continuous	Continuous		

Combined Report for MÍNIMO FACTIBLE

	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
1	X1	4,0000	1,0000	4,0000	0	basic	-M	1,5000
2	X2	5,0000	-3,0000	-15,0000	0	basic	-M	-2,0000
3	X3	0	2,0000	0	2,4000	at bound	-0,4000	M
	Objective	Function	(Min.) =	-11,0000				
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	C1	7,0000	<=	7,0000	0	-0,2000	-3,0000	M
2	C2	12,0000	<=	12,0000	0	-0,8000	-4,6667	34,0000
3	C3	-1,0000	<=	10,0000	11,0000	0	-1,0000	M

La solución óptima es: $x_1 = 4$, $x_2 = 5$, $x_3 = 0$

Valor de la función objetivo: $z = -11$

Precios sombra (Shadow Price): Indican cuánto se estaría dispuesto a pagar por una unidad adicional de cada recurso, o bien, la mejora en el valor de la función objetivo por incremento unitario de cada recurso.

Universidad Autónoma de Madrid

Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....

SIMPLEX DUAL: WinQSB / Linear and Integer Programming

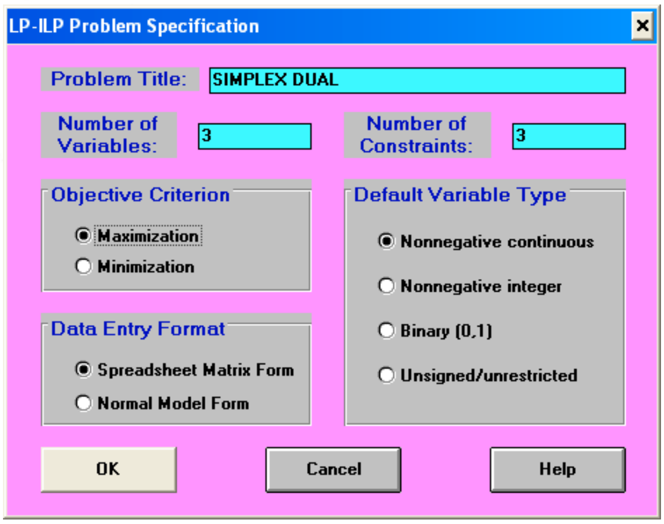
Maximizar: $z = 4x_1 + 7x_2 + 3x_3$ restricciones: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 30 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 45 \\ x_j \ge 0 \end{cases}$

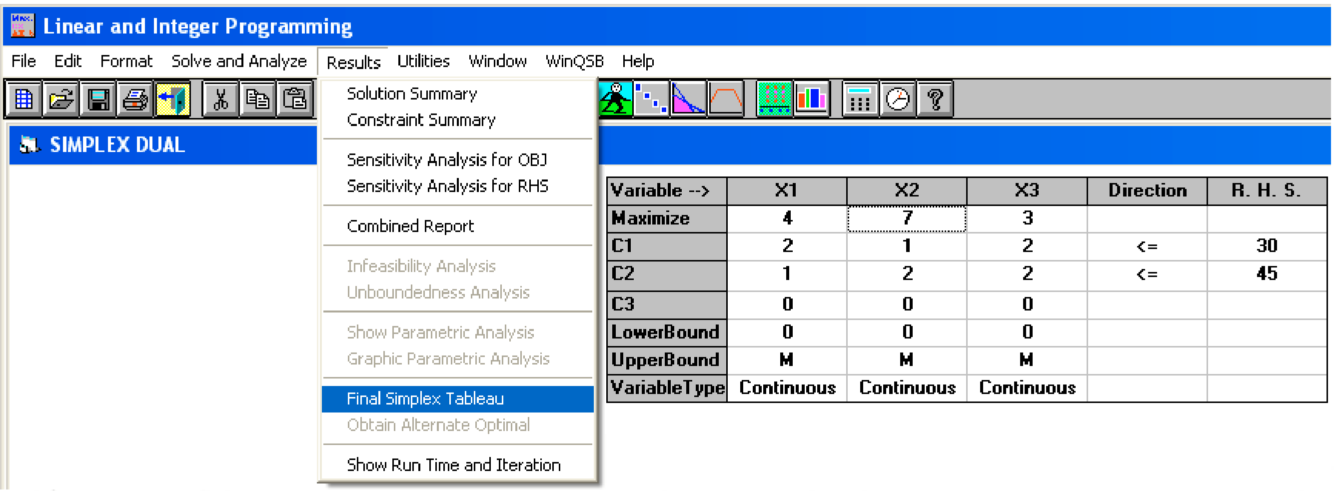
a) Formular y resolver el problema dual

b) ¿Cuánto se pagaría para que la primera restricción fuera 40?

c) Partiendo del problema dual, $(x_1 = 5 \; , \; x_2 = 10 \; , \; x_3 = 5)$, ¿es solución del problema original?

a)





Con la opción Result / Final Simplex Tableau se obtienen las variables básicas, matriz asociada a la base inicial y función objetivo.

(IMPRESO EN PAPEL RECICLADO) UNICAMENTE PARA USO ESCOLAR

UAM Universidad Autónoma de Madrid

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

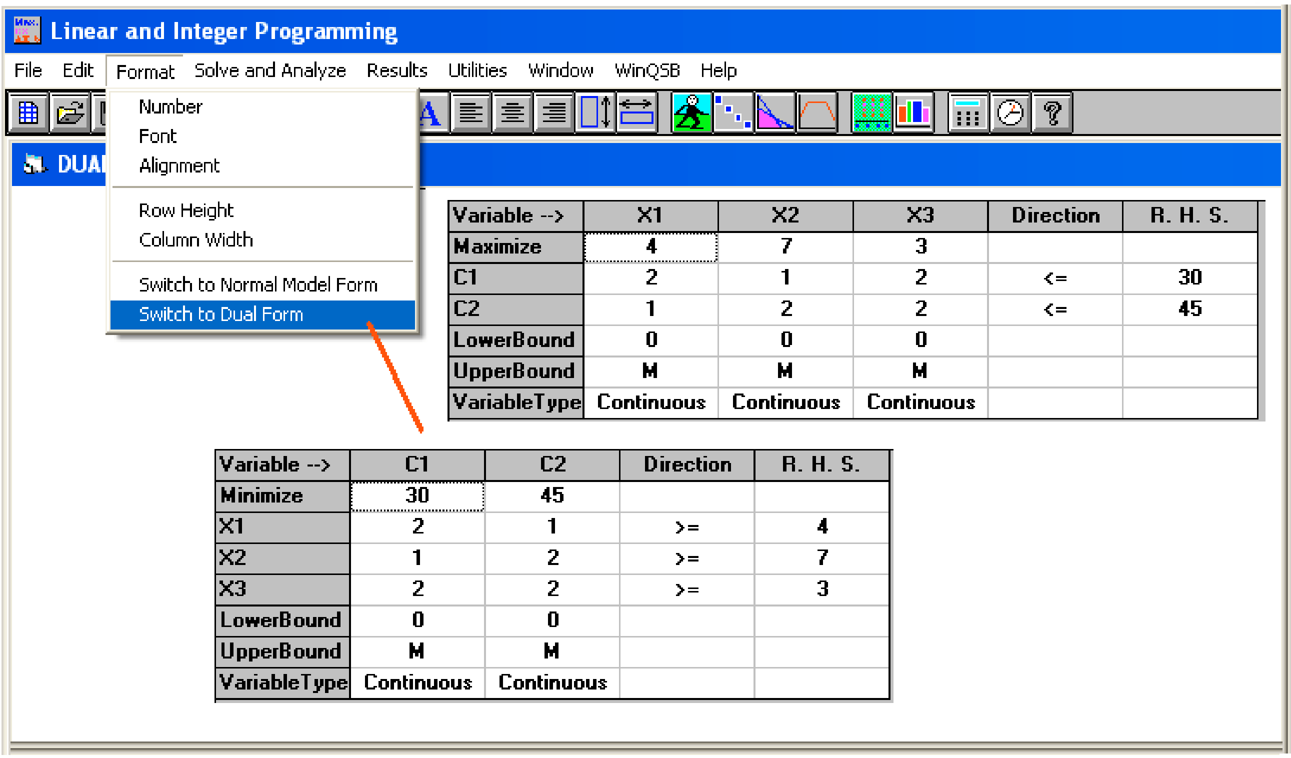
Final Simplex Tableau

		X1	X2	X3	Slack_C1	Slack_C2	Slack_C3		
Basis	C(j)	4,0000	7,0000	3,0000	0	0	0	R. H. S.	Ratio
X1	4,0000	1,0000	0,0000	0,6667	0,6667	-0,3333	0	5,0000	
X2	7,0000	0,0000	1,0000	0,6667	-0,3333	0,6667	0	20,0000	
Slack_C3	0	0	0	0	0	0	1,0000	0	
	C(j)-Z(j)	0	0	-4,3333	-0,3333	-3,3333	0	160,0000	

Las variables básicas son $x_1 = 4$, $x_2 = 7$. El valor de la función objetivo es $z = 160$

La matriz asociada a la base inicial es $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0,6667 & -0,3333 \\ -0,3333 & 0,6667 \end{pmatrix}$

El PROBLEMA DUAL se obtiene con la opción Format / Switch to Dual Form



Variable -->	X1	X2	X3	Direction	R. H. S.
Maximize	4	7	3		
C1	2	1	2	<=	30
C2	1	2	2	<=	45
LowerBound	0	0	0		
UpperBound	M	M	M		
VariableType	Continuous	Continuous	Continuous		

Variable -->	C1	C2	Direction	R. H. S.
Minimize	30	45		
X1	2	1	>=	4
X2	1	2	>=	7
X3	2	2	>=	3
LowerBound	0	0		
UpperBound	M	M		
VariableType	Continuous	Continuous		

Problema Original

Maximizar: $z = 4x_1 + 7x_2 + 3x_3$

restricciones: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 30 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 45 \\ x_j \ge 0 \end{cases}$

Problema Dual

Minimizar: $w = 30y_1 + 45y_2$

restricciones: $\begin{cases} 2y_1 + y_2 \ge 4 \\ y_1 + 2y_2 \ge 7 \\ 2y_1 + 2y_2 \ge 3 \\ y_i \ge 0 \end{cases}$

Hoja nº ....

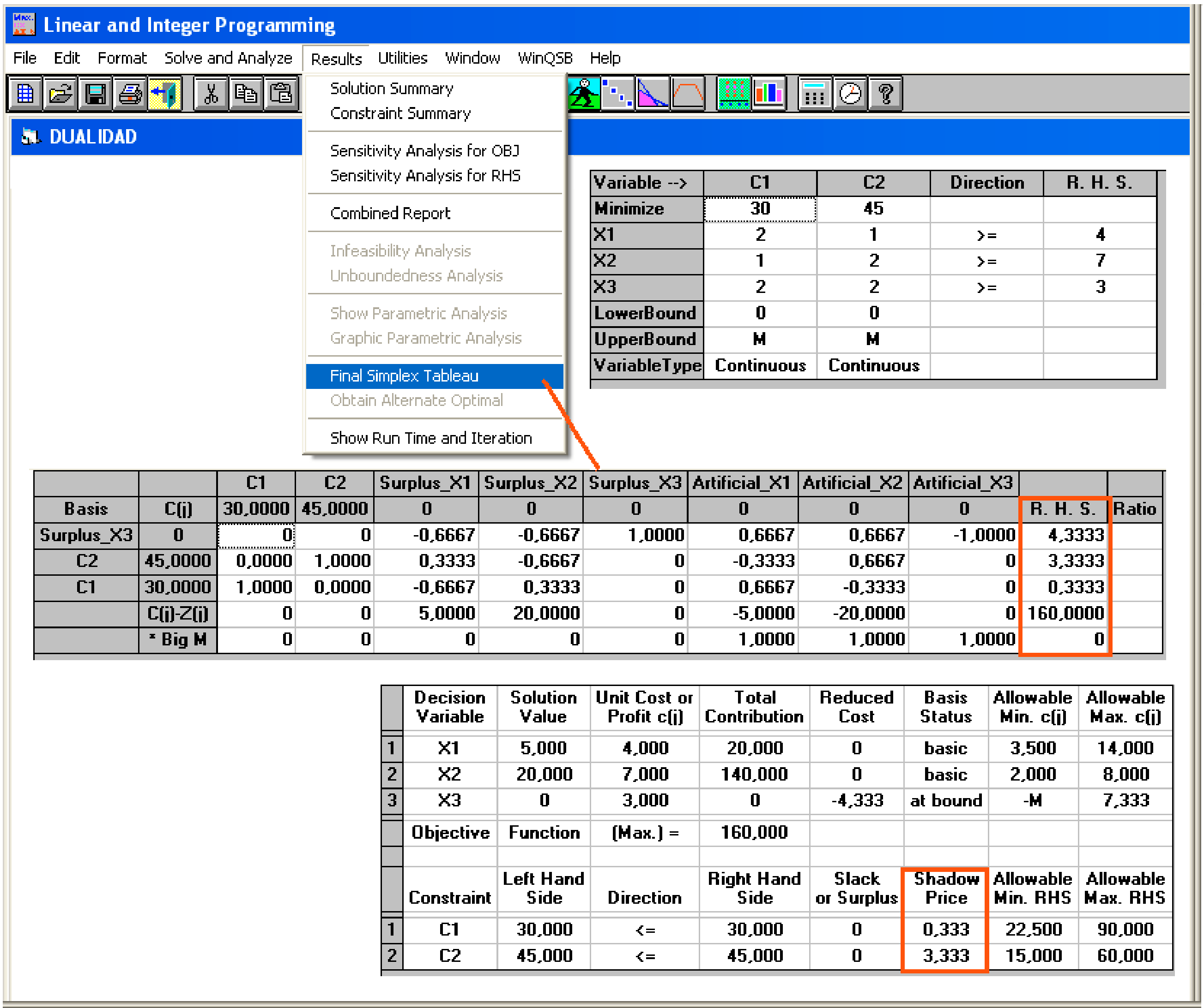
UAM
Universidad Autónoma
de Madrid

Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....

Con la opción Result / Final Simplex Tableau se obtiene la tabla:



Variable -->	C1	C2	Direction	R. H. S.
Minimize	30	45		
X1	2	1	>=	4
X2	1	2	>=	7
X3	2	2	>=	3
LowerBound	0	0		
UpperBound	M	M		
VariableType	Continuous	Continuous		

		C1	C2	Surplus_X1	Surplus_X2	Surplus_X3	Artificial_X1	Artificial_X2	Artificial_X3		
Basis	C(j)	30,0000	45,0000	0	0	0	0	0	0	R. H. S.	Ratio
Surplus_X3	0	0	0	-0,6667	-0,6667	1,0000	0,6667	0,6667	-1,0000	4,3333	
C2	45,0000	0,0000	1,0000	0,3333	-0,6667	0	-0,3333	0,6667	0	3,3333	
C1	30,0000	1,0000	0,0000	-0,6667	0,3333	0	0,6667	-0,3333	0	0,3333	
	C(j)-Z(j)	0	0	5,0000	20,0000	0	-5,0000	-20,0000	0	160,0000	
	* Big M	0	0	0	0	0	1,0000	1,0000	1,0000	0	

	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
1	X1	5,000	4,000	20,000	0	basic	3,500	14,000
2	X2	20,000	7,000	140,000	0	basic	2,000	8,000
3	X3	0	3,000	0	-4,333	at bound	-M	7,333
	Objective	Function	(Max.) =	160,000				
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	C1	30,000	<=	30,000	0	0,333	22,500	90,000
2	C2	45,000	<=	45,000	0	3,333	15,000	60,000

La solución óptima es: $y_1 = 0{,}333$, $y_2 = 3{,}333$, obteniendo un valor para la función objetivo $w = 160$, igual que la obtenida en el problema original.

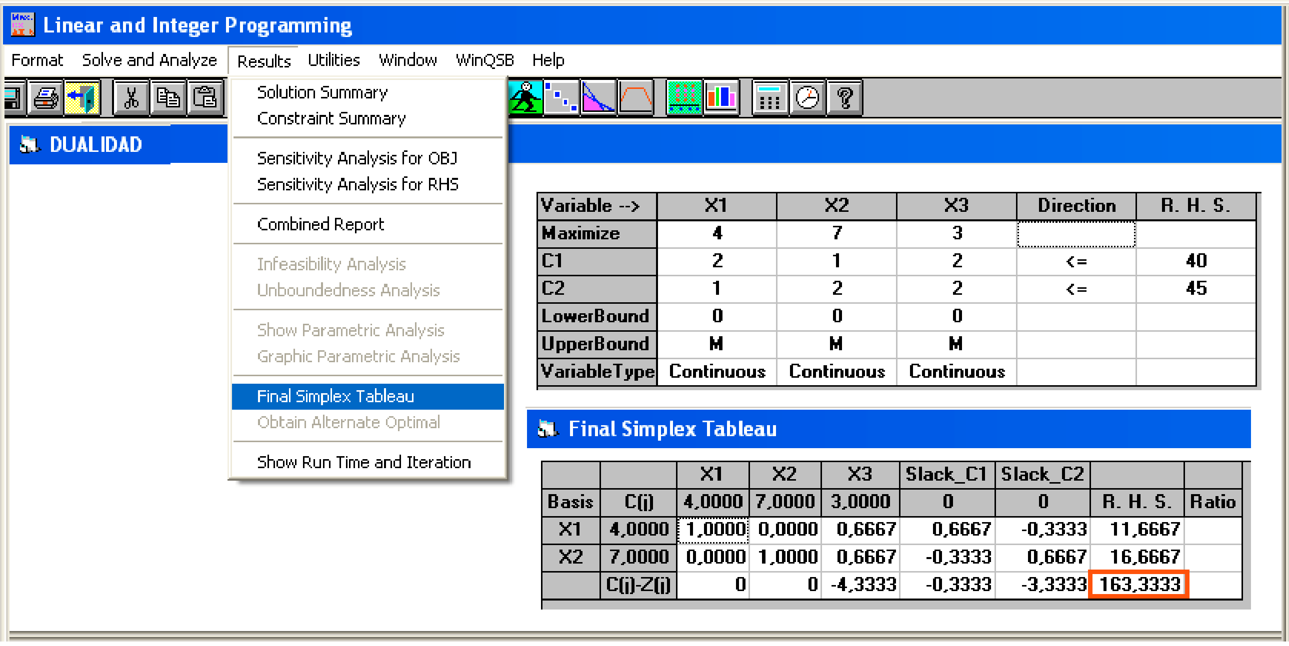
Al observar la tabla resumen del problema original, la solución óptima del problema dual coincide con los precios sombra (Shadow price) asociados al problema original.

Los valores de Shadow price representan el precio que una empresa está dispuesta a pagar por un incremento unitario del recurso disponible.

Nunca se paga más de este precio por unidad suplementaria del recurso; en caso de hacerse, se pagaría por el uso de esa cantidad adicional un precio superior a la mejora que produce en la función objetivo.

b) Si la primera restricción se aumenta en 10 unidades, el problema queda:

Maximizar: $z = 4x_1 + 7x_2 + 3x_3$ restricciones: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 40 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 45 \\ x_j \geq 0 \end{cases}$



Variable -->	X1	X2	X3	Direction	R. H. S.
Maximize	4	7	3		
C1	2	1	2	<=	40
C2	1	2	2	<=	45
LowerBound	0	0	0		
UpperBound	M	M	M		
VariableType	Continuous	Continuous	Continuous		

		X1	X2	X3	Slack_C1	Slack_C2		
Basis	C(j)	4,0000	7,0000	3,0000	0	0	R. H. S.	Ratio
X1	4,0000	1,0000	0,0000	0,6667	0,6667	-0,3333	11,6667	
X2	7,0000	0,0000	1,0000	0,6667	-0,3333	0,6667	16,6667	
	C(j)-Z(j)	0	0	-4,3333	-0,3333	-3,3333	163,3333	

Se obtiene un valor de la función objetivo $z = 163{,}3333$

c) Responder si la solución $(x_1 = 5\ ,\ x_2 = 10\ ,\ x_3 = 5)$ es solución del problema original, se puede hacer de varias formas:

c1) Se sabe que la solución óptima es $x_1 = 5\ ,\ x_2 = 20\ ,\ x_3 = 0$, con lo cual no puede ser óptima.

c2) Resolviendo el problema dual se conoce que la función objetivo es $w = 160$, que coincide con el valor de la función objetivo del problema original.

Para una solución $x_1 = 5\ ,\ x_2 = 10\ ,\ x_3 = 5$ se tendría:

$$z = 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 \;\rightarrow\; z = 4 \times 5 + 7 \times 10 + 3 \times 5 = 105 \neq 160 \;\rightarrow\; \text{No puede ser}$$

c3) Como la solución del dual tiene todas sus componentes no nulas $(y_1 = 0{,}333\ ,\ y_2 = 3{,}333)$ en la solución óptima, las restricciones del problema original serán igualdades.

Se prueba si se verifica en la solución propuesta:

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \times 5 + 10 + 2 \times 5 = 30 \;\rightarrow\; \text{Sí}$$
$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5 + 2 \times 10 + 2 \times 5 = 35 \neq 45 \;\rightarrow\; \text{No}$$

UAM Universidad Autónoma de Madrid

Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....

(IMPRESO EN PAPEL RECICLADO) ÚNICAMENTE PARA USO ESCOLAR

MÉTODO DE KARMARKAR (MÉTODO DEL PUNTO INTERIOR)

La estrategia consiste en la búsqueda del óptimo a través de caminos que recorren la zona interior de la región factible; de ahí su nombre de Método del Punto Interior.

1. Se realizan los cocientes entre cada elemento de la columna P_0 por el homólogo de la columna P_1 (asociada a la variable x_1), que es la variable que va a dejar de ser nula en el vértice adyacente siguiente.

2. El mínimo cociente positivo corresponde a la variable que pasará a ser nula en el vértice siguiente. El elemento de la columna P_1 que haga mínimo el cociente será el elemento pivote (x_{hk}), alrededor de él gira la transformación de los coeficientes de la tabla que permitirá pasar a la segunda tabla del proceso.

3. La fila del pivote se divide por el valor del pivote.

4. La columna del pivote se hace 0 salvo el elemento del pivote que vale 1.

5. Las columnas de las variables que con respecto a la tabla anterior que siguen en base quedan inalteradas. Cualquier otro elemento se transforma según la regla que se adjunta:

$$x^{\bullet}_{ij} = x_{ij} - \frac{x_{hj}}{x_{hk}}\, x_{ik} \quad i \neq h \qquad\qquad x^{\bullet}_{kj} = \frac{x_{hj}}{x_{hk}} \quad i = h$$

6. Que la actividad h tome el valor o nivel k_1, en lugar del valor 0 que tomaba antes es $k_1\,(c_h - z_h)$ en lugar de $k_1 c_h$, debido a que para producir la actividad h es necesario distraer una parte de los recursos destinados a las actividades que en el vértice V_0 eran no nulas.

Esta reducción sobre el beneficio unitario c_h que produce una unidad de la actividad h viene dada por el coste de substitución: $z_h = \sum_{i=1}^{n} c^{\bullet}_i\, x^{\bullet}_{ih}$

Las cantidades $(c_h - z_h)$, en el caso de variables físicas reales, reciben el nombre de beneficios reducidos, en tanto que las magnitudes $(z_h - c_h)$ reciben el nombre de costes reducidos.

7. El proceso es reiterado hasta que no sea posible encontrar una cantidad de beneficios reducidos $(c_h - z_h) > 0$, en cuyo momento habrá alcanzado el óptimo y finaliza el algoritmo.

El razonamiento en el caso de mínimo es similar, aunque las valoraciones en el caso de analizar el valor de z_j se hagan en sentido contrario al desarrollado en el caso de máximo.

APLICACIÓN DEL MÉTODO KARMARKAR, CÁLCULO DEL ÓPTIMO

Maximizar la función económica o función objetivo: $z = 80\,x_1 + 70\,x_2$

Con las restricciones: $\begin{cases} 10\,x_1 + 20\,x_2 \le 8000 \\ 15\,x_1 + 10\,x_2 \le 6000 \\ 18\,x_1 + 6\,x_2 \le 6300 \\ x_1 \ge 0 \qquad x_2 \ge 0 \end{cases}$

Se comienza por convertir las desigualdades en igualdades introduciendo sendas variables de holgura no negativas en cada restricción.

Maximizar $z = 80\,x_1 + 70\,x_2 + 0\,x_3 + 0\,x_4 + 0\,x_5$

Restricciones: $\begin{cases} 10\,x_1 + 20\,x_2 + x_3 = 8000 \\ 15\,x_1 + 10\,x_2 + x_4 = 6000 \\ 18\,x_1 + 6\,x_2 + x_5 = 6300 \\ x_j \ge 0 \end{cases}$

Se aplica el método de Karmarkar, una de las variantes del Simplex, un buscador de óptimos a partir de puntos interiores, siendo ésta la gran novedad en relación con el método Simplex.

El problema así formulado parte de un espacio de cinco dimensiones, con una base inicial formada por $B = \{P_3, P_4, P_5\} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$. Con solución $X_0 = (x_3, x_4, x_5) = (8000, 6000, 6300)$ y un vértice inicial $V_0 = (0, 0, 8000, 6000, 6300)$

La variable que va a pasar a ser nula en la siguiente solución se determina calculando los cocientes entre cada elemento de la columna P_0 por el homólogo de la columna P_1, asociada a la x_1 que es la variable que va a dejar de ser nula en el vértice adyacente siguiente. Estos cocientes son:

$$\frac{8000}{10} = 800 \qquad \frac{6000}{15} = 400 \qquad \frac{6300}{18} = 350$$

El cociente mínimo positivo corresponde a la variable x_5, que pasará a ser nula en el vértice siguiente. El elemento de la columna P_1 que determina este cociente es 18 que pasa a ser el elemento pivote, la variable x_1 entra en la base sustituyendo a la variable x_5.

La columna del pivote se hace 0 excepto el elemento pivote que vale 1.

Se divide toda fila del pivote por 18.

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

		c_j	80	70	0	0	0
Base	$c_i^{\bullet}$	P_0	$P_1 \searrow$	P_2	P_3	P_4	P_5
x_3	0	8000	10	20	1	0	0
x_4	0	6000	15	10	0	1	0
x_5	0	6300	18	6	0	0	1
Coste sustitución z_j		0	0	0	0	0	0
Beneficio reducido $(c_j - z_j)$			80	70	0	0	0

Las columnas de las variables que con respecto a la tabla anterior siguen en base quedan inalteradas, $P_3 = (1, 0, 0)$ y $P_4 = (0, 1, 0)$

Cualquier otro elemento de la tabla, siendo el elemento pivote es $x_{hk} \equiv x_{31}$, donde $h = 3$, $k = 1$, se

transforma según la regla: $x_{ij}^{\bullet} = x_{ij} - \dfrac{x_{hj}}{x_{hk}} x_{ik} \quad i \neq h \qquad x_{kj}^{\bullet} = \dfrac{x_{hj}}{x_{hk}} \quad i = h$

$$\begin{cases} x_{10}^{\bullet} = x_{10} - \dfrac{x_{30}}{x_{31}} x_{11} = 8000 - \dfrac{6300}{18} 10 = 4500 \\ x_{20}^{\bullet} = x_{20} - \dfrac{x_{30}}{x_{31}} x_{21} = 6000 - \dfrac{6300}{18} 15 = 750 \\ x_{12}^{\bullet} = x_{12} - \dfrac{x_{32}}{x_{31}} x_{11} = 20 - \dfrac{6}{18} 10 = \dfrac{300}{18} \\ x_{22}^{\bullet} = x_{22} - \dfrac{x_{32}}{x_{31}} x_{21} = 10 - \dfrac{6}{18} 15 = 5 \end{cases}$$

$$x_{15}^{\bullet} = x_{15} - \frac{x_{35}}{x_{31}} x_{11} = 0 - \frac{1}{18} 10 = \frac{-10}{18}$$

$$x_{25}^{\bullet} = x_{25} - \frac{x_{35}}{x_{31}} x_{21} = 0 - \frac{1}{18} 15 = \frac{-15}{18}$$

		c_j	80	70	0	0	0
Base	$c_i^{\bullet}$	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
x_3	0	4500	0	300 / 18	1	0	–10 / 18
x_4	0	750	0	5	0	1	–15 / 18
$x_1^{\bullet}$	80	350	1	6 / 18	0	0	1 / 18
Coste sustitución z_j		$\boxed{28.000}$	80	80 / 3	0	0	80 / 18
Beneficio reducido $(c_j - z_j)$			0	130 / 3	0	0	–80 / 18

Coste de sustitución: $z_h = \displaystyle\sum_{i=1}^{3} c_i^{\bullet} x_{ih}^{\bullet}$

$$z_0 = \sum_{i=1}^{3} c_i^{\bullet} x_{i0}^{\bullet} = c_1^{\bullet} x_{30}^{\bullet} = 80 \times 350 = 28.000 \qquad z_2 = \sum_{i=1}^{3} c_i^{\bullet} x_{i2}^{\bullet} = c_1^{\bullet} x_{32}^{\bullet} = 80 \times \frac{6}{18} = \frac{80}{3}$$

$$z_1 = \sum_{i=1}^{3} c_i^{\bullet}\, x_{i1}^{\bullet} = c_1^{\bullet}\, x_{31}^{\bullet} = 80 \times 1 = 80 \qquad z_5 = \sum_{i=1}^{3} c_i^{\bullet}\, x_{i5}^{\bullet} = c_1^{\bullet}\, x_{35}^{\bullet} = 80 \times \frac{1}{18} = \frac{80}{18}$$

Beneficio reducido: $(c_h - z_h):\ (c_2 - z_2) = 70 - \dfrac{80}{3} = \dfrac{130}{3} \qquad (c_5 - z_5) = 0 - \dfrac{80}{18} = -\dfrac{80}{18}$

Sale de la base inicial P_5 y entra P_1, con solución $X_0^{\bullet} = (x_1, x_3, x_4) = (4500, 6000, 6300)$, el vértice cambia $V_1 = (350, 0, 4500, 750, 0)$ y la función objetivo pasa a valer 28.000.

Como en la tabla hay valores $(c_j - z_j) > 0$ la solución puede mejorarse, introduciendo en la base la variable x_2, a la que corresponde ese beneficio marginal positivo.

Para continuar el proceso se hacen los cocientes cada elemento de la columna P_0 por los homólogos de P_2 (columna correspondiente a la variable que entra en la nueva base).

La selección del mínimo cociente positivo indica que variable sale de la base y el pivote.

Los cocientes son: $\dfrac{4500}{300/18} = 270 \qquad \dfrac{750}{\boxed{5}} = 150 \qquad \dfrac{350}{6/18} = 1050$

El elemento pivote es $x_{hk} = x_{22} = 5$ donde, $h = 2$, $k = 2$.

		c_j	80	70	0	0	0	
Base	$c_i^{\bullet}$	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	
x_3	0	4500	0	300 / 18	1	0	−10 / 18	270
x_4	0	750	0	$\boxed{5}$	0	1	−15 / 18	150
$x_1^{\bullet}$	80	350	1	6 / 18	0	0	1 / 18	1050
Coste sustitución z_j		28.000	80	80 / 3	0	0	80 / 18	
Beneficio reducido $(c_j - z_j)$			0	130 / 3	0	0	0	

La columna del pivote se hace 0 excepto el elemento pivote que vale 1.

Se divide toda fila del pivote por 5.

Sale de la base la variable x_4 y entra la variable x_2 con base $P_2 = (0, 1, 0)$, hay que modificar P_4 y P_5

Las columnas de las variables que con respecto a la tabla anterior siguen en base quedan inalteradas, $P_1 = (0, 0, 1)$ y $P_3 = (1, 0, 0)$

Cualquier otro elemento de la tabla, siendo el elemento pivote es $x_{hk} \equiv x_{22}$, donde $h = 2$, $k = 2$, se transforma según la regla: $x_{ij}^{\bullet} = x_{ij} - \dfrac{x_{hj}}{x_{hk}} x_{ik} \quad i \neq h \qquad x_{kj}^{\bullet} = \dfrac{x_{hj}}{x_{hk}} \quad i = h$

$$\begin{cases} x^{\bullet}_{10} = x_{10} - \dfrac{x_{20}}{x_{22}}\, x_{12} = 4500 - \dfrac{750}{5}\,\dfrac{300}{18} = 2000 \\[2ex] x^{\bullet}_{30} = x_{30} - \dfrac{x_{20}}{x_{22}}\, x_{32} = 350 - \dfrac{750}{5}\,\dfrac{6}{18} = 300 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^{\bullet}_{14} = x_{14} - \dfrac{x_{24}}{x_{22}}\, x_{12} = 0 - \dfrac{1}{5}\,\dfrac{300}{18} = -\dfrac{10}{3} \\[2ex] x^{\bullet}_{24} = \dfrac{x_{24}}{x_{22}} = \dfrac{1}{5} \\[2ex] x^{\bullet}_{34} = x_{34} - \dfrac{x_{24}}{x_{22}}\, x_{32} = 0 - \dfrac{1}{5}\,\dfrac{6}{18} = -\dfrac{1}{15} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^{\bullet}_{15} = x_{15} - \dfrac{x_{25}}{x_{22}}\, x_{12} = -\dfrac{10}{18} + \dfrac{15/18}{5}\,\dfrac{300}{18} = \dfrac{20}{9} \\[2ex] x^{\bullet}_{25} = \dfrac{x_{25}}{x_{22}}\, x_{22} = -\dfrac{15/18}{5} = -\dfrac{1}{6} \\[2ex] x^{\bullet}_{35} = x_{35} - \dfrac{x_{25}}{x_{22}}\, x_{32} = \dfrac{1}{18} + \dfrac{15/18}{5}\,\dfrac{6}{18} = \dfrac{1}{9} \end{cases}$$

		c_j	80	70	0	0	0
Base	$c^{\bullet}_i$	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
x_3	0	2000	0	0	1	$-10/3$	$20/9$
$x^{\bullet}_2$	70	150	0	1	0	$1/5$	$-1/6$
$x^{\bullet}_1$	80	300	1	0	0	$-1/15$	$1/9$
Coste sustitución z_j		34.500	80	70	0	$26/3$	$-25/9$
Beneficio reducido $(c_j - z_j)$			0	0	0	$-26/3$	$25/9$

Costes de sustitución: $z_h = \sum_{i=1}^{3} c^{\bullet}_i\, x^{\bullet}_{ih}$

$$z_0 = \sum_{i=1}^{3} c^{\bullet}_i\, x^{\bullet}_{i0} = c^{\bullet}_1\, x^{\bullet}_{30} + c^{\bullet}_2\, x^{\bullet}_{20} = 80 \times 300 + 70 \times 150 = 34.500$$

$$z_4 = \sum_{i=1}^{3} c^{\bullet}_i\, x^{\bullet}_{i4} = c^{\bullet}_1\, x^{\bullet}_{14} + c^{\bullet}_2\, x^{\bullet}_{24} = 80 \times \frac{-1}{15} + 70 \times \frac{1}{5} = \frac{26}{3}$$

$$z_5 = \sum_{i=1}^{3} c^{\bullet}_i\, x^{\bullet}_{i5} = c^{\bullet}_1\, x^{\bullet}_{15} + c^{\bullet}_2\, x^{\bullet}_{25} = 80 \times \frac{1}{9} + 70 \times \frac{-1}{6} = -\frac{25}{9}$$

Beneficio reducido: $(c_h - z_h)$: $(c_4 - z_4) = 0 - \dfrac{26}{3} = -\dfrac{26}{3}$ $\quad (c_5 - z_5) = 0 + \dfrac{25}{9} = \dfrac{25}{9}$

Sale de la base inicial P_4 y entra P_2, con solución $X^{\bullet}_0 = (x_1, x_2, x_4) = (300, 150, 6300)$

Los vértices han ido cambiando con las iteraciones:

Del vértice inicial $V_0 = (0, 0, 8000, 6000, 6300)$, en la primera etapa cambia el vértice a $V_1 = (350, 0, 4500, 750, 0)$, en la segunda etapa a $V_2 = (300, 150, 2000, 0, 0)$

La función objetivo pasa de 28.000 a 34.500.

Como en la tabla $(c_5 - z_5) > 0$ la solución puede mejorarse, introduciendo en la base la variable x_5, a la que corresponde ese beneficio marginal positivo.

Para continuar el proceso se hacen los cocientes cada elemento de la columna P_0 por los homólogos de P_5 (columna correspondiente a la variable que entra en la nueva base).

La selección del mínimo cociente positivo indica que variable sale de la base y el pivote.

Los cocientes son: $\dfrac{2000}{\boxed{20/9}} = 900 \qquad \dfrac{150}{-1/6} = -900 \qquad \dfrac{300}{1/9} = 2700$

Como entre los cocientes hay dos positivos, se selecciona el menor, que corresponde a la variable x_3.

El elemento pivote es $x_{hk} = x_{15} = \dfrac{20}{9}$ donde, $h = 1$, $k = 5$.

		c_j	80	70	0	0	0	
Base	$c_i^\bullet$	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	
x_3	0	2000	0	0	1	$-10/3$	$\boxed{20/9}$	900
$x_2^\bullet$	70	150	0	1	0	$1/5$	$-1/6$	-900
$x_1^\bullet$	80	300	1	0	0	$-1/15$	$1/9$	2700
Coste sustitución z_j		34.500	80	70	0	$26/3$	$26/3$	
Beneficio reducido $(c_j - z_j)$			0	0	0	$-26/3$	$25/9$	

La columna del pivote se hace 0 excepto el elemento pivote que vale 1.

Se divide toda fila del pivote por $\dfrac{20}{9}$

Las columnas de las variables que con respecto a la tabla anterior siguen en base quedan inalteradas, $P_1 = (0, 0, 1)$ y $P_2 = (0, 1, 0)$

Sale de la base la variable x_3 y entra la variable x_5 con base $P_5 = (1, 0, 0)$. En consecuencia, hay que modificar P_3 y P_4.

Cualquier otro elemento de la tabla, siendo el elemento pivote es $x_{hk} \equiv x_{22}$, donde $h = 1$, $k = 5$, se transforma según la regla: $x_{ij}^\bullet = x_{ij} - \dfrac{x_{hj}}{x_{hk}} x_{ik} \quad i \neq h \qquad x_{kj}^\bullet = \dfrac{x_{hj}}{x_{hk}} \quad i = h$

$$\begin{cases} x^{\bullet}_{10} = \dfrac{x_{10}}{x_{15}} = \dfrac{2000}{20/9} = 900 \\[2ex] x^{\bullet}_{20} = x_{20} - \dfrac{x_{10}}{x_{15}}\, x_{25} = 150 + \dfrac{2000}{20/9}\,\dfrac{1}{6} = 300 \\[2ex] x^{\bullet}_{30} = x_{30} - \dfrac{x_{10}}{x_{15}}\, x_{35} = 300 - \dfrac{2000}{20/9}\,\dfrac{1}{9} = 200 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^{\bullet}_{13} = \dfrac{x_{13}}{x_{15}} = \dfrac{1}{20/9} = \dfrac{9}{20} \\[2ex] x^{\bullet}_{23} = x_{23} - \dfrac{x_{12}}{x_{15}}\, x_{25} = 0 + \dfrac{1}{20/9}\,\dfrac{1}{6} = \dfrac{3}{40} \\[2ex] x^{\bullet}_{33} = x_{33} - \dfrac{x_{13}}{x_{15}}\, x_{35} = 0 - \dfrac{1}{20/9}\,\dfrac{1}{9} = -\dfrac{1}{20} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^{\bullet}_{14} = \dfrac{x_{14}}{x_{15}} = \dfrac{-10/3}{20/9} = -\dfrac{3}{2} \\[2ex] x^{\bullet}_{24} = x_{24} - \dfrac{x_{14}}{x_{15}}\, x_{25} = \dfrac{1}{5} - \dfrac{10/3}{20/9}\,\dfrac{1}{6} = -\dfrac{1}{20} \\[2ex] x^{\bullet}_{34} = x_{34} - \dfrac{x_{14}}{x_{15}}\, x_{35} = -\dfrac{1}{15} + \dfrac{10/3}{20/9}\,\dfrac{1}{9} = \dfrac{1}{10} \end{cases} \qquad \begin{cases} x^{\bullet}_{15} = \dfrac{x_{15}}{x_{15}} = 1 \\[2ex] x^{\bullet}_{25} = x_{25} - \dfrac{x_{15}}{x_{15}}\, x_{25} = 0 \\[2ex] x^{\bullet}_{35} = x_{35} - \dfrac{x_{15}}{x_{15}}\, x_{35} = 0 \end{cases}$$

		c_j	80	70	0	0	0
Base	$c^{\bullet}_i$	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
$x^{\bullet}_5$	0	900	0	0	$9/20$	$-3/2$	1
$x^{\bullet}_2$	70	300	0	1	$3/40$	$-1/20$	0
$x^{\bullet}_1$	80	200	1	0	$-1/20$	$1/10$	0
Coste sustitución z_j		37.000	80	70	$5/4$	$9/2$	0
Beneficio reducido $(c_j - z_j)$			0	0	$-5/4$	$-9/2$	0

Costes de sustitución: $z_h = \sum_{i=1}^{3} c^{\bullet}_i\, x^{\bullet}_{ih}$

$$z_0 = \sum_{i=1}^{3} c^{\bullet}_i\, x^{\bullet}_{i0} = c^{\bullet}_1\, x^{\bullet}_{30} + c^{\bullet}_2\, x^{\bullet}_{20} + c^{\bullet}_3\, x^{\bullet}_{10} = 80 \text{ x } 200 + 70 \text{ x } 300 + 0 \text{ x } 900 = 37.000$$

$$z_3 = \sum_{i=1}^{3} c^{\bullet}_i\, x^{\bullet}_{i3} = c^{\bullet}_1\, x^{\bullet}_{33} + c^{\bullet}_2\, x^{\bullet}_{23} + c^{\bullet}_3\, x^{\bullet}_{13} = 80 \text{ x } \frac{-1}{20} + 70 \text{ x } \frac{3}{40} + 0 \text{ x } \frac{9}{20} = \frac{5}{4}$$

$$z_4 = \sum_{i=1}^{3} c^{\bullet}_i\, x^{\bullet}_{i4} = c^{\bullet}_1\, x^{\bullet}_{34} + c^{\bullet}_2\, x^{\bullet}_{24} + c^{\bullet}_3\, x^{\bullet}_{14} = 80 \text{ x } \frac{1}{10} + 70 \text{ x } \frac{-1}{20} + 0 \text{ x } \frac{-3}{2} = \frac{9}{2}$$

Beneficio reducido: $(c_h - z_h)$: $(c_3 - z_3) = 0 - \dfrac{5}{4} = -\dfrac{5}{4}$ $\quad (c_4 - z_4) = 0 - \dfrac{9}{2} = -\dfrac{9}{2}$

Como en la tabla no hay ningún beneficio reducido $(c_j - z_j) > 0$ la solución no puede mejorar y el algoritmo ha finalizado.

La función objetivo pasa de 34.500 a 37.000

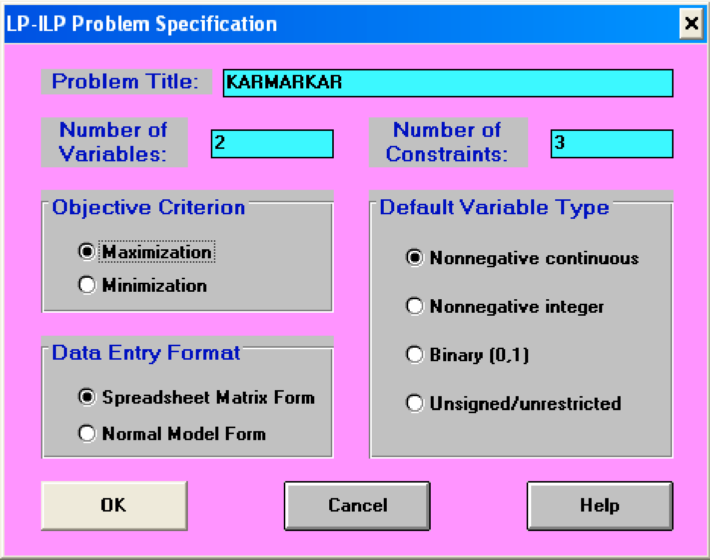
Universidad Autónoma de Madrid

Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....

WinQSB / Linear and Integer Programming



KARMARKAR

Variable -->	X1	X2	Direction	R. H. S.
Maximize	80	70		
C1	10	20	<=	8000
C2	15	10	<=	6000
C3	18	6	<=	6300
LowerBound	0	0		
UpperBound	M	M		
VariableType	Continuous	Continuous		

Combined Report for KARMARKAR

	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
1	X1	200,0000	80,0000	16.000,0000	0	basic	35,0000	105,0000
2	X2	300,0000	70,0000	21.000,0000	0	basic	53,3333	160,0000
	Objective	Function	(Max.) =	37.000,0000				
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	C1	8.000,0000	<=	8.000,0000	0	1,2500	6.000,0000	12.000,0000
2	C2	6.000,0000	<=	6.000,0000	0	4,5000	4.000,0000	6.600,0000
3	C3	5.400,0000	<=	6.300,0000	900,0000	0	5.400,0000	M

PROCEDIMIENTO DEL MÉTODO SIMPLEX PARA LA FORMA MATRICIAL

Partiendo de un problema de Programación Lineal en forma estándar, se determinan las matrices:

$A\,,\ b\,,\ B\,,\ c_j\,,\ c_B\,,\ X_B$

$A \equiv$ Matriz de coeficientes de las variables en las restricciones

$b \equiv$ Lado derecho de las restricciones (limitaciones)

$B \equiv$ Matriz que proporciona la Solución Inicial Básica Factible y está formada por las columnas de las variables básicas, es decir aquellas que están en solución.

$c_j \equiv$ Coeficientes de las variables en la función objetivo

$c_B \equiv$ Coeficientes de las variables básicas en la Función Objetivo.

$X_B \equiv$ Valores de las variables básicas que dan solución al problema.

$z = c_B X_B$ siendo $X_B \equiv B^{-1} b$

a) Se determina la variable que entra en la base de solución. Se obtienen los $(z_j - c_j)$ para las variables no básicas, donde $Y_j = B^{-1} a_j$, $z_j = c_B\, Y_j$

Las Y_j de las variables básicas forman las columnas de la matriz identidad y las $(z_j - c_j)$ de las variables básicas son cero.

Las Y_j son las columnas actualizadas a las transformaciones de renglón de la matriz A, para generar la columna de la matriz identidad que aporta la columna de la variable que entra en solución.

Maximizar: Entra la variable que tenga el mayor valor negativo $(z_j - c_j)$, alcanzando la solución óptima cuando todos los $(z_j - c_j) \geq 0$

Minimizar: Entra la variable que tenga el mayor valor positivo $(z_j - c_j)$, alcanzando la solución óptima cuando todos los $(z_j - c_j) \leq 0$

El beneficio que se tendrá en z es $(c_j - z_j)$ por cada unidad de valor que tenga la variable X_r que entra en la solución.

b) VARIABLE QUE SALE DE LA SOLUCIÓN: Se analiza cada columna de las variables no básicas junto con el valor de las variables básicas X_B.

La variable que sale de la solución es el $\text{Min}\left(\dfrac{X_{Bi}}{Y_{ir}}\,,\ Y_{ir} > 0\right) = \text{Min}\left(\dfrac{X_{B1}}{Y_{1r}}\,,\ \dfrac{X_{B2}}{Y_{2r}}\,,\ \cdots\ ,\ \text{con } Y_{ir} > 0\right),$

donde r corresponde a la columna de la variable que entra en la solución.

La columna de la variable que entra en la solución debe aportar la columna de la matriz identidad.

En la matriz B, la columna de la variable con el $\text{Min}\left(\dfrac{X_{Bi}}{Y_{ir}}\right)$ abandona la base de solución y entra en su lugar la columna de la variable r.

c) Se reinicia el proceso en el apartado (a) hasta que se cumpla el criterio de optimización, bien hasta que todos los $(z_j - c_j) \geq 0$ en caso de maximización, o bien hasta que todos los $(z_j - c_j) \leq 0$ en caso de minimización.

Maximizar en forma matricial $z = 5x_1 + 3x_2$ sujeto a las restricciones: $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \leq 15 \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$

En forma estándar: $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + x_3 \qquad = 15 \\ 5x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 = 10 \\ x_i \geq 0 \quad x_3 \text{ y } x_4 \text{ son variables de holgura} \end{cases}$

Dado que $b = \begin{bmatrix} 15 \\ 10 \end{bmatrix}$, $c_j = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, las columnas a_3 y a_4 forman las columnas de la matriz identidad (x_3 y x_4 son variables básicas), se hace: $b_1 = a_3$ y $b_2 = a_4$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X_B = B^{-1}\, b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_{B1} \\ x_{B2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x_3 = x_{B1} = 15 \\ x_4 = x_{B2} = 10 \end{matrix} \qquad x_1 = x_2 = 0$$

El valor de la función objetivo es: $z_0 = c_B\, X_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 \\ 10 \end{bmatrix} = 0$

Se analiza la variable que entra en la solución: $Y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & 1 & 0 \\ y_{21} & y_{22} & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$y_1 = \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{bmatrix} = B^{-1} a_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} y_{11} = 3 \\ y_{21} = 5 \end{matrix}$$

$$y_2 = \begin{bmatrix} y_{12} \\ y_{22} \end{bmatrix} = B^{-1} a_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} y_{12} = 5 \\ y_{22} = 2 \end{matrix}$$

$$z_1 = c_B\, y_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = 0 \qquad z_2 = c_B\, y_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = 0$$

Entra la variable con mayor valor negativo $(z_j - c_j): \begin{cases} z_1 - c_1 = 0 - 5 = -5 \\ z_2 - c_2 = 0 - 3 = -3 \end{cases} \rightarrow$ Entra x_1

Se analiza la variable que sale de la solución donde, r es la fila en cuestión, j corresponde a la variable que entra en solución.

$$\frac{x_{Br}}{y_{rj}} = \text{Min}\left\{\frac{x_{Bi}}{y_{rj}}\,,\ y_{rj} > 0\right\} = \text{Min}\left\{\frac{x_{B1}}{y_{1j}}\,,\ \frac{x_{B2}}{y_{2j}}\,,\ y_{rj} > 0\right\} = \text{Min}\left\{\frac{15}{3}\,,\ \frac{10}{5}\right\} \rightarrow \frac{10}{5} = \frac{x_4}{y_{21}}$$

Por consiguiente, x_4 sale de la solución.

El valor de z mejorado es: $z_1 = z_0 + \dfrac{x_4}{y_{21}}(c_1 - z_1) = 0 + \dfrac{10}{5}(5-0) = 10$

La razón de cambio es $(c_1 - z_1)$, por cada unidad que tenga la variable x_1 que entra en la solución, la función objetivo se verá mejorada en $(c_1 - z_1)$ unidades.

Se inicia el proceso iterativo: Las variables básicas x_3 y x_4 pasan a ser x_3 y x_1

Se hace $b_1 = a_3$, $b_2 = a_1$, con lo que:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3/5 \\ 0 & 1/5 \end{bmatrix}$$

$$X_B = B^{-1} b = \begin{bmatrix} 1 & -3/5 \\ 0 & 1/5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 15 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_{B1} \\ x_{B2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x_3 = x_{B1} = 9 \\ x_1 = x_{B2} = 2 \end{matrix} \quad x_2 = x_4 = 0$$

El valor de la función objetivo es: $z_1 = c_B X_B = \begin{bmatrix} 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 \\ 2 \end{bmatrix} = 10$

Se analiza la variable que entra en la solución: $Y = \begin{bmatrix} 0 & y_{12} & 1 & y_{14} \\ 1 & y_{22} & 0 & y_{24} \end{bmatrix}$

$$y_2 = \begin{bmatrix} y_{12} \\ y_{22} \end{bmatrix} = B^{-1} a_2 = \begin{bmatrix} 1 & -3/5 \\ 0 & 1/5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19/5 \\ 2/5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} y_{12} = 19/5 \\ y_{22} = 2/5 \end{matrix}$$

$$y_4 = \begin{bmatrix} y_{14} \\ y_{24} \end{bmatrix} = B^{-1} a_4 = \begin{bmatrix} 1 & -3/5 \\ 0 & 1/5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/5 \\ 1/5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} y_{14} = -3/5 \\ y_{24} = 1/5 \end{matrix}$$

$$z_2 = c_B\, y_2 = \begin{bmatrix} 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 19/5 \\ 2/5 \end{bmatrix} = 2 \qquad z_4 = c_B\, y_4 = \begin{bmatrix} 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3/5 \\ 1/5 \end{bmatrix} = 1$$

Entra la variable con mayor valor negativo $(z_j - c_j): \begin{cases} z_2 - c_2 = 2 - 3 = -1 \\ z_4 - c_4 = 1 - 0 = 1 \end{cases} \rightarrow$ Entra x_2

UAM Universidad Autónoma de Madrid

Asignatura .... Grupo ....
Apellidos .... Nombre ....
Ejercicio del día ....

Se analiza la variable que sale de la solución donde, r es la fila en cuestión, j corresponde a la variable que entra en solución.

$$\frac{x_{Br}}{y_{rj}} = \text{Min}\left\{\frac{9}{19/5}, \frac{2}{2/5}, \ y_{ij} > 0\right\} = \frac{9}{19/5} = \frac{45}{19} = \frac{x_3}{y_{12}} \quad \rightarrow \quad \text{Sale } x_3$$

El valor de z mejorado es: $z_2 = z_1 + \frac{x_3}{y_{12}}(c_2 - z_2) = 10 + \frac{45}{19}(3-2) = \frac{235}{19}$

Se inicia el proceso iterativo: Las variables básicas x_3 y x_1 pasan a ser x_2 y x_1

Se hace $b_1 = a_2$, $b_2 = a_1$, con lo que:

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 5/19 & -3/19 \\ -2/19 & 5/19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2632 & -0,1579 \\ -0,1053 & 0,2632 \end{bmatrix}$$

$$X_B = B^{-1} b = \begin{bmatrix} 5/19 & -3/19 \\ -2/19 & 5/19 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 15 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45/19 \\ 20/19 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_{B1} \\ x_{B2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} x_2 = x_{B1} = 45/19 \\ x_1 = x_{B2} = 20/19 \end{array} \quad x_3 = x_4 = 0$$

El valor de la función objetivo es: $z = c_B X_B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 45/19 \\ 20/19 \end{bmatrix} = \frac{235}{19} = 12,3684$

Se analiza la variable que entra en la solución: $Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & y_{13} & y_{14} \\ 1 & 0 & y_{23} & y_{24} \end{bmatrix}$

$$y_3 = \begin{bmatrix} y_{13} \\ y_{23} \end{bmatrix} = B^{-1} a_3 = \begin{bmatrix} 5/19 & -3/19 \\ -2/19 & 5/19 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/19 \\ -2/19 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} y_{13} = 5/19 \\ y_{23} = -2/19 \end{array}$$

$$y_4 = \begin{bmatrix} y_{14} \\ y_{24} \end{bmatrix} = B^{-1} a_4 = \begin{bmatrix} 5/19 & -3/19 \\ -2/19 & 5/19 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/19 \\ 5/19 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} y_{14} = -3/19 \\ y_{24} = 5/19 \end{array}$$

$$z_3 = c_B y_3 = \begin{bmatrix} 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5/19 \\ -2/19 \end{bmatrix} = \frac{5}{19} \qquad z_4 = c_B y_4 = \begin{bmatrix} 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3/19 \\ 5/19 \end{bmatrix} = \frac{16}{19}$$

Entra la variable con mayor valor negativo $(z_j - c_j)$: $\begin{cases} z_3 - c_3 = 5/19 - 0 = 5/19 \\ z_4 - c_4 = 16/19 - 0 = 16/19 \end{cases}$

Todos los valores $(z_j - c_j) \geq 0$, con lo cual ninguna variable entra en la solución ya que es óptima.

En consecuencia, $z = c_B X_B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 45/19 \\ 20/19 \end{bmatrix} = \frac{235}{19} = 12,3684$

x_2 y x_1 son variables básicas $x_B = \begin{bmatrix} 45/19 \\ 20/19 \end{bmatrix}$, ya que con estos valores la función objetivo óptima es

$z^{\bullet} = 12,3684$

(IMPRESO EN PAPEL RECICLADO) UNICAMENTE PARA USO ESCOLAR

Hoja nº ....

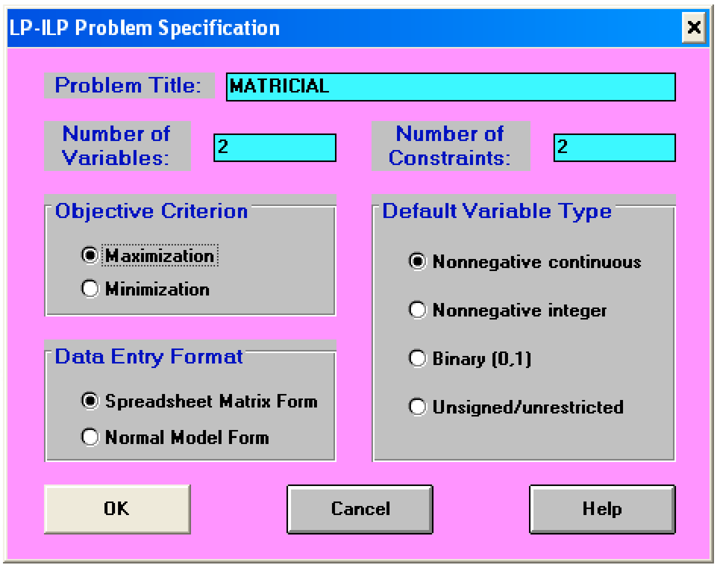
UAM
Universidad Autónoma de Madrid

Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....

WinQSB / Linear and Integer Programming



FORMA MATRICIAL – Final Simplex Tableau

Variable -->	X1	X2	Direction	R. H. S.
Maximize	5	3		
C1	3	5	<=	15
C2	5	2	<=	10
LowerBound	0	0		
UpperBound	M	M		
VariableType	Continuous	Continuous		

		X1	X2	Slack_C1	Slack_C2		
Basis	C(j)	5,0000	3,0000	0	0	R. H. S.	Ratio
X2	3,0000	0,0000	1,0000	0,2632	-0,1579	2,3684	
X1	5,0000	1,0000	0,0000	-0,1053	0,2632	1,0526	
	C(j)-Z(j)	0	0	-0,2632	-0,8421	12,3684	

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0,2632 & -0,1579 \\ -0,1053 & 0,2632 \end{bmatrix}$$

$$z^{*} = 12,3684$$

Hoja nº ....

Universidad Autónoma de Madrid

Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....

(IMPRESO EN PAPEL RECICLADO)

UNICAMENTE PARA USO ESCOLAR

Universidad Autónoma de Madrid

Asignatura .... Grupo ....

Apellidos .... Nombre ....

Ejercicio del día ....

Instrumentos Estadísticos Avanzados
Facultad Ciencias Económicas y Empresariales
Departamento de Economía Aplicada
Profesor: Santiago de la Fuente Fernández