



TEORÍA DE COLAS

- Modelo de Cola M/M/s
- Modelo de Cola M/M/s con entrada finita

MODELO DE COLA M/M/s

El modelo supone que los tiempos entre llegadas y los tiempos de servicio son variables aleatorias distribuidas exponencialmente, la disciplina es FIFO y la población es infinita.

Se diferencia respecto al modelo M/M/1 en que el número de servidores s puede ser cualquier número natural tal que $s \geq 1$. Cuando el número de servidores es mayor que 1, las expresiones anteriores no son tan sencillas.

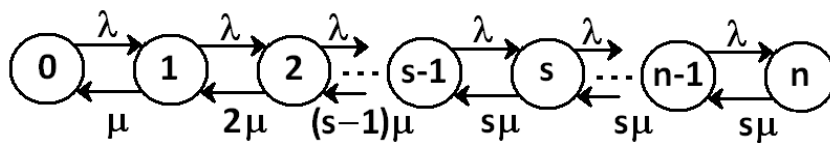
En esta línea, en la tasa de servicio μ_n hay que distinguir dos casos:

$$\mu_n = \begin{cases} \mu_n = n\mu & \text{cuando } n \leq s \\ \mu_n = s\mu & \text{cuando } n > s \end{cases} = \min(n\mu, s\mu)$$

$\mu \equiv$ tasa media de servicio de todos los servidores en conjunto

$s\mu \equiv$ tasa máxima de servicio para s servidores

El siguiente diagrama de tasas (cadena de Markov del modelo M/M/s) representa los posibles estados del sistema y las transiciones entre ellos.



En este caso, la tasa de llegadas no se encuentra afectada por el estado en que se encuentre el sistema, pero sí la tasa media de servicio, pudiendo ser tal múltiplo de la tasa media de servicio por servidor como servidores en activo haya.

Si el factor de utilización (factor de carga/ intensidad tráfico): $\rho = \frac{\lambda}{s\mu}$

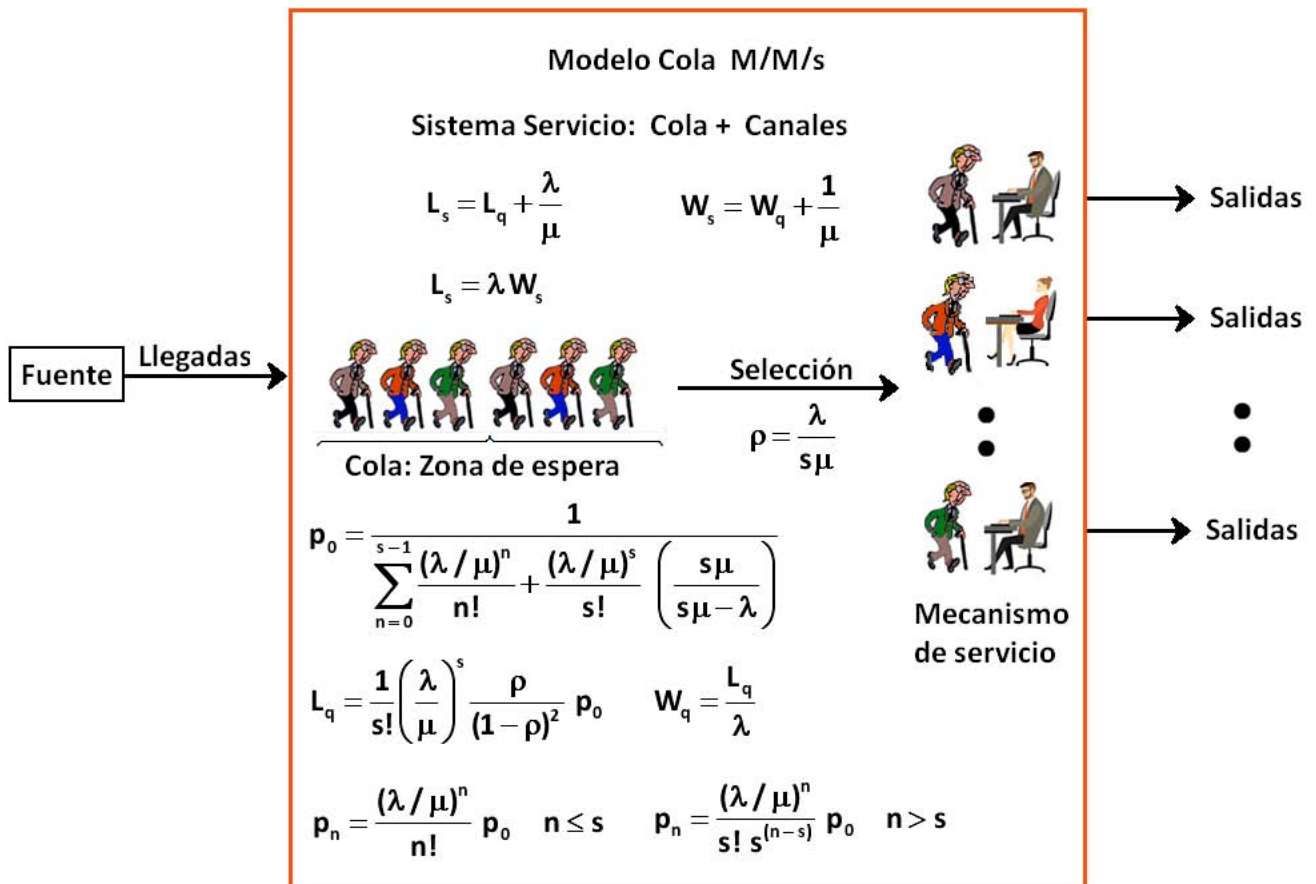
$$c_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} = \begin{cases} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n & n = 1, 2, \dots, s-1 \\ \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^s \left(\frac{\lambda}{s\mu} \right)^{n-s} & n = s, s+1, \dots \end{cases}$$

$$p_n = c_n p_0 = \begin{cases} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n p_0 & n = 1, 2, \dots, s-1 \\ \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^s \left(\frac{\lambda}{s\mu} \right)^{n-s} p_0 & n = s, s+1, \dots \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n p_0 = 1 \rightarrow p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} c_n} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \sum_{n=s}^{\infty} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \left(\frac{\lambda}{s \cdot \mu}\right)^{n-s}} =$$

$$= \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \frac{1}{1-\rho}} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \left(\frac{s \cdot \mu}{s \cdot \mu - \lambda}\right)}$$

Bajo condiciones de estabilidad (factor de utilización $\rho < 1$), al igual que en el modelo M/M/1, se pueden aplicar fórmulas para obtener los principales parámetros del sistema.



MEDIDAS DE RENDIMIENTO:

Tiempo en el servicio: $\frac{1}{\mu}$

Utilización promedio del sistema: $u_s = \frac{\lambda}{\mu}$

Factor de utilización (factor de carga/ intensidad tráfico): $\rho = \frac{\lambda}{s \cdot \mu}$

Probabilidad de que ningún cliente se encuentre en el sistema de colas:
$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \left(\frac{s \cdot \mu}{s \cdot \mu - \lambda} \right)}$$

Probabilidad del estado n:
$$p_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} p_0 \quad n \leq s$$

Probabilidad del estado n:
$$p_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{s! s^{(n-s)}} p_0 \quad n > s$$

Número promedio de clientes en cola:
$$L_q = \frac{(\lambda/\mu)^s \lambda \mu}{(s-1)! (s\mu - \lambda)^2} p_0 = \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^s \frac{\rho}{(1-\rho)^2} p_0$$

Número promedio de clientes en sistema:
$$L_s = L_q + \frac{\lambda}{\mu} \quad (L_s = \lambda W_s)$$

Tiempo promedio de espera en cola:
$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} \quad (L_q = \lambda W_q)$$

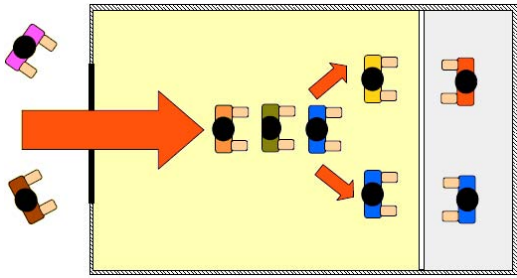
Tiempo promedio de estancia en el sistema:
$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu} \quad \left(W_s = \frac{L_s}{\lambda} \right)$$

A medida que se añaden servidores al sistema las fórmulas van siendo más complicadas, en especial para el cálculo de probabilidades.

Se asume que la probabilidad de la función de tiempos de servicio es una exponencial negativa de parámetro μ_n .

$$P(W > t) = e^{-\mu t} \left(1 + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^s}{s! (1-\rho)} \left(\frac{1 - e^{-\mu t (s-1-\lambda/\mu)}}{s-1-\lambda/\mu} \right) \right)$$

Cuando $s - 1 - \lambda / \mu = 0$ se utiliza $\frac{1 - e^{-\mu t (s-1-\lambda/\mu)}}{s-1-\lambda/\mu} = \mu \cdot t$



Queuing Analysis	
Data Description	ENTRY
Number of servers	
Service rate (per server per hora)	
Customer arrival rate (per hora)	
Queue capacity (maximum waiting space)	M
Customer population	M
Busy server cost per hora	
Idle server cost per hora	
Customer waiting cost per hora	
Customer being served cost per hora	
Cost of customer being balked	
Unit queue capacity cost	

Number of servers (Numero de servidores): $s =$

Service rate (Tasa de servicio): $\mu =$

Customer arrival rate (Tasa de llegada de clientes): $\lambda =$

Queue capacity (Capacidad de la cola: Por defecto aparece M indicando que es infinita. Cuando la cola es finita se pone el tamaño máximo de la cola menos el número de servidores ($k - s$))

Customer population (Tamaño de la población de clientes): Aparece por defecto M, indicando que es infinita. En caso de fuente limitada se pone el tamaño de la población.

Busy server cost per hour: Coste del servidor ocupado $\equiv c_q + c_s$

Idle server cost per hour: Coste del servidor desocupado $\equiv c_s \cdot s$

Customer waiting cost per hour: Coste de espera de los clientes $\equiv c_q$

Customer being served cost per hour: Coste de los clientes siendo servidos

Cost of customer being balked: Coste por la pérdida de clientes, en el caso que la cola sea finita

Unit queue capacity cost: Coste unitario de capacidad de cada unidad de cola

Un terminal de facturación dispone de dos operarios que atienden a los clientes que llegan según una distribución de Poisson de media ochenta clientes por hora, que esperan en una única cola hasta que alguno de los operarios esté libre. El tiempo requerido para atender a un cliente se distribuye exponencialmente con media 1,2 minutos. Se pide:

- ¿Cuál es el número esperado de clientes en el terminal de facturación?
- ¿Cuál es el tiempo medio que un cliente pasa en el terminal de facturación?
- ¿Qué porcentaje de tiempo está libre un determinado operario?

Solución:

a) Es un modelo de cola M/M/2 con $s = 2$ servidores

Tasa de llegadas $\equiv \lambda = 80$ clientes/hora

Tasa de servicio por operario $\equiv \mu = \frac{60}{1,2} = 50$ clientes/hora

Factor de utilización o congestión del sistema: $\rho = \frac{\lambda}{s \cdot \mu} = \frac{80}{2 \times 50} = 0,8$

Probabilidad de que ningún cliente se encuentre en el sistema de colas:

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda / \mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda / \mu)^s}{s!} \times \left(\frac{s\mu}{s\mu - \lambda} \right)} = \frac{1}{\sum_{n=0}^1 \frac{(80 / 50)^n}{n!} + \frac{(80 / 50)^2}{2!} \left(\frac{100}{100 - 80} \right)} = 0,111$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^1 \frac{(80 / 50)^n}{n!} + \frac{(80 / 50)^2}{2!} \times \left(\frac{100}{100 - 80} \right) &= \\ &= \left[\frac{(80 / 50)^0}{0!} + \frac{(80 / 50)}{1!} \right] + \frac{(80 / 50)^2}{2!} \times 5 = (1 + 1,6) + 6,4 = 9 \end{aligned}$$

o bien

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda / \mu)^n}{n!} + \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^s \frac{1}{1 - \rho}} = \frac{1}{\sum_{n=0}^1 \frac{(80 / 50)^n}{n!} + \frac{1}{2} \left(\frac{80}{50} \right)^2 \left(\frac{1}{1 - 0,8} \right)} = 0,111$$

Número promedio de clientes en la cola:

$$L_q = \frac{(\lambda / \mu)^s \lambda \mu}{(s - 1)! (s\mu - \lambda)^2} p_0 = \frac{(80 / 50)^2 \times 80 \times 50}{1! (2 \times 50 - 80)^2} 0,111 = 2,8444 \text{ clientes}$$

Número promedio de clientes en el sistema (terminal de facturación):

$$L_s = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = 2,84 + \frac{80}{50} = 4,4444 \text{ clientes}$$

b) Tiempo medio de espera en cola: $W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{2,84}{80} = 0,0356$

Tiempo medio de estancia en el sistema (terminal de facturación):

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu} = 0,0355 + \frac{1}{50} = 0,0556 \text{ horas} = 3,33 \text{ minutos}$$

Es decir, el tiempo en el sistema es igual al tiempo en la cola (W_q) más el tiempo en el servicio ($1/\mu$)

o bien, $W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{4,44}{80} = 0,0556 \text{ horas} = 3,33 \text{ minutos}$

c) El porcentaje de tiempo que determinado operario esté libre: $p_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} p_0$

$$1 p_0 + \frac{1}{2} p_1 = \frac{(80/50)^0}{0!} p_0 + \frac{1}{2} \frac{(80/50)^1}{1!} p_0 = p_0 + 0,8 \cdot p_0 = 1,8 \cdot p_0 = 1,8 \cdot 0,111 = 0,2$$

Problem Specification

Problem Title: TERMINAL

Time Unit: hora

Entry Format

Simple M/M System

General Queuing System

OK Cancel Help

Queuing Analysis

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

TERMINAL

Data Description	ENTRY
Number of servers	2
Service rate (per server per hora)	50
Customer arrival rate (per hora)	80
Queue capacity (maximum waiting space)	M
Customer population	M
Busy server cost per hora	
Idle server cost per hora	
Customer waiting cost per hora	
Customer being served cost per hora	
Cost of customer being balked	
Unit queue capacity cost	

Queuing Analysis

File Format Results Utilities Window Help

System Performance Summary for TERMINAL

	Performance Measure	Result
1	System: M/M/2	From Formula
2	Customer arrival rate (lambda) per hora =	80,0000
3	Service rate per server (mu) per hora =	50,0000
4	Overall system effective arrival rate per hora =	80,0000
5	Overall system effective service rate per hora =	80,0000
6	Overall system utilization =	80,0000 %
7	Average number of customers in the system (L) =	4,4444
8	Average number of customers in the queue (Lq) =	2,8444
9	Average number of customers in the queue for a busy system (Lb) =	4,0000
10	Average time customer spends in the system (W) =	0,0556 horas
11	Average time customer spends in the queue (Wq) =	0,0356 horas
12	Average time customer spends in the queue for a busy system (Wb) =	0,0500 horas
13	The probability that all servers are idle (Po) =	11,1111 %
14	The probability an arriving customer waits (Pw) or system is busy (Pb) =	71,1111 %

System Probability Summary for TERMINAL

n	Estimated Probability of n Customers in the System	Cumulative Probability
0	0,11	0,11
1	0,18	0,29
2	0,14	0,43
3	0,11	0,54
4	0,09	0,64
5	0,07	0,71

$$1 p_0 + \frac{1}{2} p_1 = 0,11 + \frac{1}{2} \cdot 0,18 = 0,2$$

📁 En un ambulatorio con tres médicos, los pacientes llegan de forma aleatoria (tiempos de llegada exponenciales) a razón de 12 por hora. Estos son atendidos en orden de llegada por el primer médico que esté libre. Cada médico tarda una media de 13 minutos en atender a cada paciente (tiempos de atención exponenciales).

Se pide:

- Calcular la proporción de tiempo que está cada médico atendiendo a pacientes.
- Calcular el número promedio de pacientes que están en la sala de espera.
Calcular el tiempo promedio total de espera de un paciente.
- ¿Qué ocurriría en el ambulatorio si uno de los tres médicos se ausenta?

Solución:

a) Es un modelo de cola M/M/3 con $s = 3$ servidores

$$\lambda = 12 \text{ pacientes/hora}, \quad \mu = \frac{60}{13} = 4,615 \text{ pacientes/hora}$$

$$\text{Utilización promedio del ambulatorio: } u_s = \lambda / \mu = 12 / 4,615 = 2,6$$

La proporción de tiempo solicitada se expresa en la tasa de utilización del ambulatorio:

$$\rho = \frac{\lambda}{s \cdot \mu} = \frac{12}{3 \times 4,615} = 0,87 \rightarrow 1 - \rho = 1 - 0,87 = 0,13$$

El servicio del ambulatorio está utilizado un 87%, esto es, pasa ocioso el 13% del tiempo, sistema estable al ser $\rho = 0,87 < 1$

$$\text{b) Número promedio de pacientes en la sala de espera: } L_q = \frac{(\lambda / \mu)^s \lambda \mu}{(s - 1)! (s \mu - \lambda)^2} p_0$$

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda / \mu)^n}{n!} + \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^s \frac{1}{1 - \rho}} = \frac{1}{\sum_{n=0}^2 \frac{2,6^n}{n!} + \frac{1}{3!} 2,6^3 \left(\frac{1}{0,13} \right)} = \frac{1}{29,51} = 0,033$$

$$\sum_{n=0}^2 \frac{2,6^n}{n!} + \frac{1}{3!} 2,6^3 \left(\frac{1}{0,13} \right) = \sum_{n=0}^2 \frac{2,6^n}{n!} + 22,53 = 1 + 2,6 + 3,38 + 22,53 = 29,51$$

$$\text{con lo que, } L_q = \frac{(\lambda / \mu)^s \lambda \mu}{(s - 1)! (s \mu - \lambda)^2} p_0 = \frac{2,6^3 \times 12 \times 4,615}{2! \times 1,845^2} \times 0,033 = 4,72 \text{ pacientes}$$

$$\text{Tiempo promedio de espera en cola: } W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{4,72}{12} = 0,39 \text{ horas}$$

$$\text{Tiempo promedio estancia en el sistema: } W_s = W_q + \frac{1}{\mu} = 0,39 + \frac{1}{4,615} = 0,60 \text{ horas}$$

📄 El gerente de una multinacional quiere analizar el coste total por hora del sistema de descargas de su terminal (mano de obra y camiones ociosos). La terminal de carga funciona con cuatro plataformas de descarga, cada una de éstas con un equipo de dos empleados que descargan un semirremolque en una hora, con tiempos de servicios exponenciales, y un coste de cuarenta euros/hora. El tiempo de llegadas de camiones es de tres/hora siguiendo una distribución de Poisson, con un coste estimado de sesenta euros/hora por camión ocioso.

Solución:

Es un modelo de cola M/M/4 con $s = 4$ servidores

Para calcular el coste total de mano de obra y de los camiones ociosos hay que saber el tiempo promedio de espera en el sistema de descarga y el número promedio de camiones en el mismo.

Tasa de llegadas: $\lambda = 3$ camiones/hora

Tasa de servicio por empleado $\equiv \mu = 4 \times \frac{0,5}{2} = 1$ camiones/hora

Utilización promedio del sistema: $u_s = \lambda / \mu = 3 / 1 = 3$

Utilización promedio de las cuatro plataformas: $\rho = \frac{\lambda}{s \cdot \mu} = \frac{3}{4 \times 1} = 0,75$

Probabilidad de que no haya ningún camión en el sistema de descargas:

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda / \mu)^n}{n!} + \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^s \frac{1}{1-\rho}} = \frac{1}{\sum_{n=0}^3 \frac{3^n}{n!} + \frac{1}{4!} 3^4 \left(\frac{1}{0,25} \right)} = \frac{1}{26,5} = 0,03774$$

$$\sum_{n=0}^3 \frac{3^n}{n!} + \frac{1}{4!} 3^4 \left(\frac{1}{0,25} \right) = \sum_{n=0}^3 \frac{3^n}{n!} + 13,5 = 1 + 3 + 4,5 + 4,5 + 13,5 = 26,5$$

Número promedio de camiones en espera:

$$L_q = \frac{(\lambda / \mu)^s \lambda \mu}{(s-1)! (s\mu - \lambda)^2} p_0 = \frac{3^4 \times 3 \times 1}{3! (4-3)^2} \times 0,03774 = 1,5284$$

Tiempo promedio de espera de camiones cola: $W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{1,5284}{3} = 0,5094$ hora

Tiempo promedio de estancia de camiones en el sistema:

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu} = 0,5094 + \frac{1}{1} = 1,5094 \text{ horas}$$

Número promedio camiones en sistema: $L_s = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = 1,5284 + 3 = 4,5284$ camiones

o bien, $L_s = \lambda W_s = 3 \times 1,5094 = 4,5282$ camiones

Costes: $c_q = 60$, $c_s = 40$, $c_q + c_s = 100$

Coste total de espera: $CQ = c_q \cdot L_q = 60 \cdot 1,5284 = 91,6981$ euros/hora

Coste total servicio: $CS = c_s \cdot s = 40 \cdot 4 = 160$ euros/hora

Coste total sistema: $CTS = c_q \cdot L_s + c_s \cdot s = 60 \cdot 4,5282 + 40 \cdot 4 = 431,6982$ euros/hora
(Coste total = (Coste camiones ociosos + Coste mano de obra ociosa))

Data Description	ENTRY
Number of servers	4
Service rate (per server per hora)	1
Customer arrival rate (per hora)	3
Queue capacity (maximum waiting space)	M
Customer population	M
Busy server cost per hora	$c_q + c_s = 100$
Idle server cost per hora	$c_s = 40$
Customer waiting cost hora	$c_q = 60$
Customer being served cost per hora	
Cost of customer being balked	
Unit queue capacity cost	euro

System Performance Summary for TERMINAL

	Performance Measure	Result
1	System: M/M/4	From Formula
2	Customer arrival rate (λ) per hora =	3,0000
3	Service rate per server (μ) per hora =	1,0000
4	Overall system effective arrival rate per hora =	3,0000
5	Overall system effective service rate per hora =	3,0000
6	Overall system utilization =	75,0000 %
7	Average number of customers in the system (L) =	4,5283
8	Average number of customers in the queue (Lq) =	1,5283
9	Average number of customers in the queue for a busy system (Lb) =	3,0000
10	Average time customer spends in the system (W) =	1,5094 horas
11	Average time customer spends in the queue (Wq) =	0,5094 horas
12	Average time customer spends in the queue for a busy system (Wb) =	1,0000 horas
13	The probability that all servers are idle (Po) =	3,7736 %
14	The probability an arriving customer waits (Pw) or system is busy (Pb) =	50,9434 %
15	Average number of customers being balked per hora =	0
16	Total cost of busy server per hora =	300,0000
17	Total cost of idle server per hora =	40,0000
18	Total cost of customer waiting per hora = $60 \cdot 1,5284 = 91,6981$	91,6981
19	Total cost of customer being served per hora =	0
20	Total cost of customer being balked per hora =	0
21	Total queue space cost per hora =	0
22	Total system cost per hora = $60 \cdot 4,5282 + 40 \cdot 4 = 431,6982$	431,6982

Coste total de espera: $CQ = c_q \cdot L_q = 60 \cdot 1,5284 = 91,6981$ euros/hora

Coste total servicio: $CS = c_s \cdot s = 40 \cdot 4 = 160$ euros/hora

Coste total sistema: $CTS = c_q \cdot L_s + c_s \cdot s = 60 \cdot 4,5282 + 40 \cdot 4 = 431,6982$ euros/hora

(Coste total = (Coste camiones ociosos + Coste mano de obra ociosa)



TEORÍA DE COLAS: HOSPITAL - *Queuing Analysis*

La sala de urgencias de un hospital tiene una tasa media de 3 pacientes a la hora, siguiendo una distribución de Poisson. La sala cuenta con dos enfermeras que invierten un promedio de 15 minutos por paciente, según una distribución exponencial. Para evitar la cola de espera surgen dos opiniones: El jefe de sala solicita una enfermera más, la dirección del hospital plantea que en ocasiones las dos enfermeras están ociosas y considera que se debe reducir a una la cantidad de enfermeras. Se sabe que una enfermera cobre 10 euros/hora y se ha valorado que por cada hora que un paciente permanece en la sala el coste es de 5 euros/hora.

¿Cuántas enfermeras debe tener la sala para minimizar el coste total del sistema?

Problem Specification

Problem Title: **HOSPITAL**

Time Unit: **hora**

Entry Format:

Simple M/M System

General Queuing System

OK Cancel Help

$s = 2$ servidores

$\lambda = 3$ pacientes/hora

$\mu = 4 \cdot 15 = 60$ pacientes/hora

Costes: $c_q = 5$, $c_s = 10$

Queuing Analysis

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQ5B Help

HOSPITAL

Data Description	ENTRY
Number of servers	2
Service rate (per server per hora)	4
Customer arrival rate (per hora)	3
Queue capacity (maximum waiting space)	M
Customer population	M
Busy server cost per hora	15
Idle server cost per hora	10
Customer waiting cost per hora	5
Customer being served cost per hora	
Cost of customer being balked	
Unit queue capacity cost	euro

System Performance Summary for HOSPITAL		
	Performance Measure	Result
1	System: M/M/2	From Formula
2	Customer arrival rate (λ) per hora =	3,0000
3	Service rate per server (μ) per hora =	4,0000
4	Overall system effective arrival rate per hora =	3,0000
5	Overall system effective service rate per hora =	3,0000
6	Overall system utilization =	37,5000 %
7	Average number of customers in the system (L) =	0,8727
8	Average number of customers in the queue (Lq) =	0,1227
9	Average number of customers in the queue for a busy system (Lb) =	0,6000
10	Average time customer spends in the system (W) =	0,2909 horas
11	Average time customer spends in the queue (Wq) =	0,0409 horas
12	Average time customer spends in the queue for a busy system (wb) =	0,2000 horas
13	The probability that all servers are idle (Po) =	45,4545 %
14	The probability an arriving customer waits (Pw) or system is busy (Pb) =	20,4545 %
15	Average number of customers being balked per hora =	0
16	Total cost of busy server per hora =	\$11,2500
17	Total cost of idle server per hora =	\$12,5000
18	Total cost of customer waiting per hora =	\$0,6136
19	Total cost of customer being served per hora =	\$0
20	Total cost of customer being balked per hora =	\$0
21	Total queue space cost per hora =	\$0
22	Total system cost per hora =	\$24,3636

7. Número medio de clientes en el sistema: $L_s = 0,8727$ clientes
8. Número medio de clientes en la cola: $L_q = 0,1227$ clientes
9. Número medio de clientes en la cola cuando el sistema esté lleno: $L_b = 0,6$ clientes
10. Tiempo medio de estancia de un cliente en el sistema: $W_s = 0,2909$ horas
11. Tiempo medio de estancia de un cliente en la cola: $W_q = 0,0409$ horas
12. Tiempo medio de estancia de clientes en la cola cuando el sistema está lleno: $W_b = 0,2000$ hora
13. Probabilidad de que no haya clientes en el sistema o probabilidad de que todos los servidores estén ociosos: $p_0 = 45,4545\%$
14. Probabilidad de que un cliente llegue al sistema y tenga que esperar, equivalente a la probabilidad de que esté ocupado el sistema: $P(T > 0) = 20,4545\%$
15. Número medio de clientes que abandonan la cola por hora (para el caso de cola finita), en este caso como la cola es infinita es cero.
18. Costo total de la espera de los clientes por hora: $CQ = c_q \cdot L_q = 5 \cdot 0,1227 = 0,6136$ euros/hora
22. Costo total del sistema por hora: $CTS = c_q \cdot L_s + c_s \cdot s = 5 \cdot 0,8727 + 10 \cdot 2 = 24,3635$ euros/hora

Un mayorista de agencias de viajes tiene un sistema de reservas por teléfono, atendido por 4 comerciales, las llamadas en espera son atendidas después en estricto orden de llegada. Se sabe que las llamadas son aleatorias con un promedio de 20 llamadas a la hora, mientras que el tiempo medio de respuesta (tiempo que una llamada permanece en el sistema) es de 6,51 minutos, y el número medio de llamadas en espera es de 0,17. Se pide:

- Tiempo medio que una llamada ha de esperar hasta ser atendida por uno de los comerciales.
- Qué ocurriría con el uso del sistema si hubiera dos comerciales menos.
- Si el mayorista valora la hora de inactividad de cada comercial en doscientos euros, ¿cuál es la pérdida media por hora debida a la inactividad de los comerciales?
- Si los tiempos entre llamadas y los tiempos de atención al cliente son variables aleatorias exponenciales, representar el diagrama de tasas de transición entre estados. Si la probabilidad de que el estado esté vacío es $2/19$, calcular la probabilidad de que una llamada quede en espera.

Solución:

a) Tasa de llegadas: $\lambda = 20$ clientes/hora

$$\text{Tiempo medio de respuesta: } W_s = \frac{6,51}{60} = 0,1085 \text{ horas} \quad \left(W_s = W_q + \frac{1}{\mu} \right)$$

Número medio de clientes en la cola: $L_q = 0,17$ clientes

Luego,

$$\text{Tiempo medio de espera en cola: } W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{0,17}{20} = 0,0085 \text{ horas}$$

$$b) \quad W_s = W_q + \frac{1}{\mu} \rightarrow \frac{1}{\mu} = W_s - W_q = 0,1085 - 0,0085 = 0,1 \rightarrow \mu = 10 \text{ clientes/hora}$$

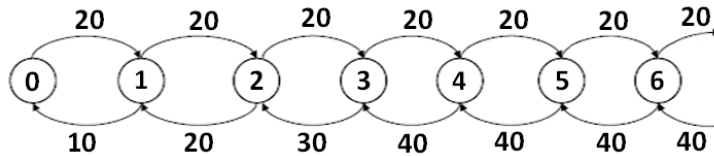
$$\text{Factor de utilización del sistema: } \rho = \frac{\lambda}{s\mu} = \frac{20}{4 \times 10} = 0,5$$

$$\text{Con dos comerciales menos } \rho = \frac{\lambda}{s\mu} = \frac{20}{2 \times 10} = 1 \text{ el sistema se vuelve inestable.}$$

$$c) \quad \text{Número medio de comerciales ocupados} \equiv \frac{\lambda}{\mu} = \frac{20}{10} = 2$$

Con lo que el número de comerciales ociosos es de $4 - 2 = 2$, en consecuencia, la pérdida por hora por la inactividad de los comerciales es de 400 euros.

d) Diagrama de tasas de transición, cuando los tiempos entre llamadas y los tiempos de atención al cliente son variables aleatorias exponenciales.



Una llamada queda en espera cuando todos los comerciales están ocupados.

$$P(N \geq 4) = 1 - P(N < 4) = 1 - p_0 - p_1 - p_2 - p_3$$

Por ser el sistema estacionario, la tasa media de llegada es igual a la tasa media de salida para cualquier estado n , es decir, $\lambda_{n-1} p_{n-1} + \mu_{n+1} p_{n+1}$

$$p_0 = \frac{2}{19}$$

$$10p_1 = 20p_0 \rightarrow p_1 = \frac{20}{10} p_0 = 2 \times \frac{2}{19} = \frac{4}{19}$$

$$20p_2 + 20p_0 = 10p_1 + 20p_1 \xrightarrow{10p_1 = 20p_0} 20p_2 = 20p_1 \rightarrow p_2 = p_1 = \frac{4}{19}$$

$$30p_3 + 20p_1 = 20p_2 + 20p_2 \xrightarrow{20p_1 = 20p_2} 30p_3 = 20p_2 \rightarrow p_3 = \frac{20}{30} p_2 = \frac{8}{57}$$

$$P(N \geq 4) = 1 - P(N < 4) = 1 - p_0 - p_1 - p_2 - p_3 = 1 - \frac{2}{19} - \frac{4}{19} - \frac{4}{19} - \frac{8}{57} = \frac{1}{3}$$

📖 Adviértase que se trata de un modelo de cola M/M/4 con $s = 4$ servidores

En la tasa de servicio μ_n hay que distinguir:
$$\begin{cases} \mu_n = n\mu & \text{cuando } n < s \\ \mu_n = s\mu & \text{cuando } n \geq s \end{cases}$$

$\mu \equiv$ tasa media de servicio de todos los servidores en conjunto

$s\mu \equiv$ tasa máxima de servicio para s servidores

$$p_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n p_0 \text{ para } n = 1, 2, \dots, s-1 \quad p_n = \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^s \left(\frac{\lambda}{s\mu} \right)^{n-s} p_0 \text{ para } n = s, s+1, \dots$$

$$p_1 = \frac{1}{1!} (2)^1 \frac{2}{19} = \frac{4}{19} \quad p_2 = \frac{1}{2!} (2)^2 \frac{2}{19} = \frac{4}{19} \quad p_3 = \frac{1}{3!} (2)^3 \frac{2}{19} = \frac{8}{57}$$

MODELO DE COLA M/M/s con fuente de entrada finita

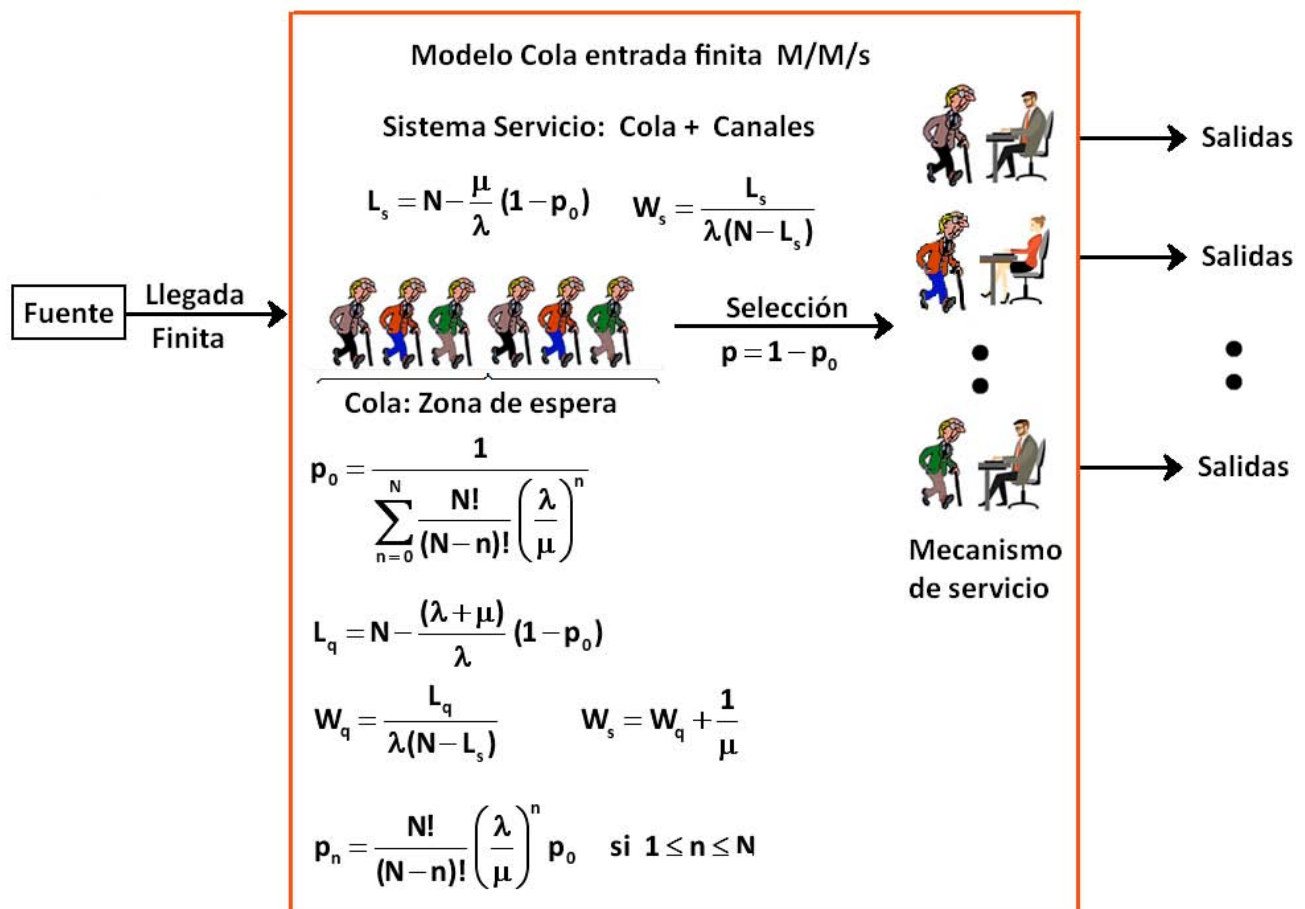
Es una variación del modelo M/M/s consistente en que la fuente de variación de entrada es limitada, esto es, el tamaño de la población de posibles clientes es finita.

Sea N el tamaño de la población, cuando en el sistema se encuentran n clientes, quedan $(N - n)$ posibles clientes en la fuente de entrada.

En el modelo con población finita los clientes alternan entre estar dentro y fuera del sistema. Por analogía con el modelo M/M/s se supone que el tiempo que pasa cada cliente fuera del sistema es una variable aleatoria exponencial $\text{Exp}(\lambda)$.

Cuando n clientes están dentro, $(N - n)$ clientes están fuera, y por tanto la distribución de probabilidad del tiempo que falta para la próxima llegada al sistema es el mínimo de $(N - n)$ variables exponenciales independientes de parámetro $\lambda(N - n)$. De este modo,

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda(N - n) & 0 \leq n \leq N \\ 0 & n > N \end{cases} \quad \mu_n = \begin{cases} n\mu & 1 \leq n \leq s \\ s\mu & s \leq n \leq N \\ 0 & n > N \end{cases}$$



La aplicación más importante de este modelo es la *reparación de máquinas*, donde se asigna a uno o más técnicos la responsabilidad de tener operativas un grupo de N máquinas.

Cuando las máquinas se estropean acuden al sistema de mantenimiento en espera de ser reparadas, y cuando están operativas quedan fuera del sistema.

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^N \frac{N!}{(N-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n} \quad p_n = \frac{N!}{(N-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0 \quad \text{si } 1 \leq n \leq N$$

Utilización promedio del servidor: $p = 1 - p_0$

Número promedio de clientes en el sistema: $L_s = N - \frac{\mu}{\lambda} (1 - p_0)$

Número promedio de clientes en la cola: $L_q = N - \frac{(\lambda + \mu)}{\lambda} (1 - p_0)$

Tiempo promedio de estancia en el sistema, incluido el servicio: $W_s = \frac{L_s}{\lambda(N - L_s)}$

Tiempo promedio de espera en la cola: $W_q = \frac{L_q}{\lambda(N - L_s)} \quad \left(W_s = W_q + \frac{1}{\mu} \right)$

📄 En la terminal de un aeropuerto se han incorporado diez robots para incrementar el servicio al cliente, surgiendo el problema que no se aplica un mantenimiento preventivo a los robots y presentan una gran variabilidad en la distribución de averías. Cada robot sigue una distribución exponencial de averías (o distribución entre llegadas) con un tiempo promedio de 200 horas entre una y otra avería, y un coste de 30 euros/hora. Para afrontar la situación se encarga a una persona para el mantenimiento, que necesita un promedio de diez horas para reparar un robot, con tiempos de reparación distribuidos exponencialmente, y un coste de 10 euros/hora, dedicándose a otras actividades cuando no hay robots que reparar. ¿Cuál es el coste diario que origina el tiempo ocioso de la mano de obra y los robots?

Solución:

Es un modelo de cola M/M/1 de población finita, los $N = 10$ robots constituyen la población de clientes, verificándose las demás condiciones.

$$\text{Tasa de llegadas: } \lambda = \frac{1}{200} = 0,005 \text{ averías/hora}$$

$$\text{Tasa de servicio: } \mu = \frac{1}{10} = 0,1 \text{ robots/hora}$$

Para calcular el coste diario del tiempo ocioso de la mano de obra y los robots se necesita estimar la utilización promedio del empleado de mantenimiento (p) y el número promedio de robots incluidos en el mantenimiento.

Utilización promedio del empleado de mantenimiento: $p = 1 - p_0$

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^N \frac{N!}{(N-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{10} \frac{10!}{(10-n)!} \left(\frac{0,005}{0,1}\right)^n} = \frac{1}{1,85886} = 0,53796$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{10} \frac{10!}{(10-n)!} \left(\frac{0,005}{0,1}\right)^n &= \sum_{n=0}^{10} \frac{10!}{(10-n)!} 0,05^n = 1 + 10 \times 0,05 + 90 \times 0,05^2 + 720 \times 0,05^3 + \\ &+ 5040 \times 0,05^4 + 30240 \times 0,05^5 + 151200 \times 0,05^6 + 604800 \times 0,05^7 + 1814400 \times 0,05^8 + \\ &+ 3628800 \times 0,05^9 + 3628800 \times 0,05^{10} = 1,85886 \end{aligned}$$

con lo que, $p = 1 - p_0 = 1 - 0,53796 = 0,462037$

Número promedio de robots en espera de ser reparados:

$$L_q = N - \frac{(\lambda + \mu)}{\lambda} (1 - p_0) = 10 - \frac{(0,005 + 0,1)}{0,005} (0,462037) = 0,2972 \text{ robots}$$

Número promedio de robots que están en el sistema (en la cola y en proceso de reparación):

$$L_s = N - \frac{\mu}{\lambda} (1 - p_0) = 10 - \frac{0,1}{0,005} (0,462037) = 0,7593 \text{ robots}$$

Tiempo promedio de espera de los robots en la cola para ser atendidos por el encargado de mantenimiento:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda(N - L_s)} = \frac{0,2972}{0,005(10 - 0,76)} = 6,4330 \text{ horas}$$

Tiempo promedio de estancia de los robots en el sistema (en la cola y en proceso de reparación):

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda(N - L_s)} = \frac{0,7593}{0,005(10 - 0,7593)} = 16,4330 \text{ horas}$$

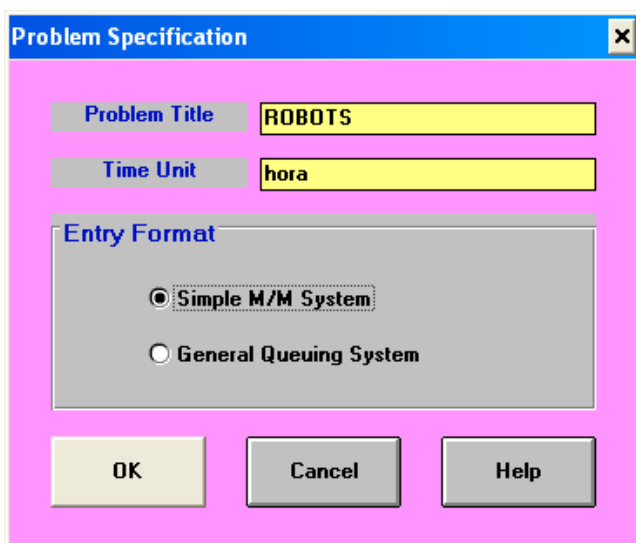
o bien, $W_s = W_q + \frac{1}{\mu} = 6,4330 + \frac{1}{0,1} = 16,4330 \text{ horas}$

Costes: $c_q = 10$, $c_s = 30$, $c_q + c_s = 40$

Coste total de espera: $CQ = c_q \cdot L_q = 10 \cdot 0,2972 = 2,972 \text{ euros/hora}$

Coste total servicio: $CS = c_s \cdot s = 30 \cdot 1 = 30 \text{ euros/hora}$

Coste total en sistema: $CTS = c_q \cdot L_s + c_s \cdot s = 10 \cdot 0,7593 + 30 \cdot 1 = 37,593 \text{ euros/hora}$
(Coste total = (Coste robots ociosos + Coste mano de obra ociosa)



Queuing Analysis

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

0.00 A

ROBOTS

Data Description	ENTRY
Number of servers	1
Service rate (per server per hora)	0.1
Customer arrival rate (per hora)	0.005
Queue capacity (maximum waiting space)	M
Customer population	10
Busy server cost per hora	40
Idle server cost per hora	30
Customer waiting cost per hora	10
Customer being served cost per hora	
Cost of customer being balked	
Unit queue capacity cost	

System Performance Summary for ROBOTS

	Performance Measure	Result
1	System: M/M/1/10	From Formula
2	Customer arrival rate (λ) per hora =	0,0050
3	Service rate per server (μ) per hora =	0,1000
4	Overall system effective arrival rate per hora =	0,0462
5	Overall system effective service rate per hora =	0,0462
6	Overall system utilization =	46,2037 %
7	Average number of customers in the system (L) =	0,7593
8	Average number of customers in the queue (Lq) =	0,2972
9	Average number of customers in the queue for a busy system (Lb) =	0,6433
10	Average time customer spends in the system (W) =	16,4330 horas
11	Average time customer spends in the queue (Wq) =	6,4330 horas
12	Average time customer spends in the queue for a busy system (Wb) =	13,9230 horas
13	The probability that all servers are idle (Po) =	53,7963 %
14	The probability an arriving customer waits (Pw) or system is busy (Pb) =	46,2037 %
15	Average number of customers being balked per hora =	0
16	Total cost of busy server per hora =	\$18,4815
17	Total cost of idle server per hora =	\$16,1389
18	Total cost of customer waiting per hora =	\$2,9723
19	Total cost of customer being served per hora =	\$0
20	Total cost of customer being balked per hora =	\$0
21	Total queue space cost per hora =	\$0
22	Total system cost per hora =	\$37,5926

Una empresa tiene seis equipos idénticos de manufactura, el tiempo entre fallas de cada uno de los equipos de producción sigue una distribución exponencial, con un tiempo promedio entre fallas de veinte horas. Para la atención de las fallas en el equipo de manufactura hay un único equipo de mantenimiento, el tiempo de duración del servicio de reparación de las máquinas sigue una distribución exponencial con una media de 2 horas/falla. Se pide:

- Utilización promedio de mantenimiento.
- Probabilidad de que n clientes se encuentren en el sistema de colas.
- Número promedio de máquinas en espera de ser reparadas.
- Número promedio de máquinas que están en el sistema.
- Tiempo promedio de espera de las máquinas en la cola.

Solución:

a) Es un modelo de cola M/M/1 de población finita, los $N = 6$ equipos de manufactura constituyen la población de clientes, verificándose las demás condiciones

Tasa de llegadas: $\lambda = \frac{1}{20} = 0,05$ máquinas/hora

Tasa de servicio: $\mu = \frac{1}{2} = 0,5$ máquinas/hora

Utilización promedio del equipo de mantenimiento: $p = 1 - p_0$

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^N \frac{N!}{(N-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n} = \frac{1}{\sum_{n=0}^6 \frac{6!}{(6-n)!} \left(\frac{0,05}{0,5}\right)^n} = \frac{1}{2,06392} = 0,4845$$

$$\sum_{n=0}^6 \frac{6!}{(6-n)!} \left(\frac{0,05}{0,5}\right)^n = \sum_{n=0}^6 \frac{6!}{(6-n)!} 0,1^n = 1 + 6 \times 0,1 + 30 \times 0,1^2 + 120 \times 0,1^3 + 360 \times 0,1^4 + 720 \times 0,1^5 + 720 \times 0,1^6 = 2,06392$$

Utilización promedio de mantenimiento: $p = 1 - p_0 = 1 - 0,4845 = 0,5155$

b) Probabilidad de que n clientes se encuentren en el sistema de colas:

$$p_n = \frac{N!}{(N-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0 = \frac{N!}{(N-n)!} \times 0,1^n \times 0,4845 \quad \text{si } 1 \leq n \leq N$$

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
0,290708942	0,145354471	0,058141788	0,017442537	0,003488507	0,000348851

c) Número promedio de máquinas en espera de ser reparadas:

$$L_q = N - \frac{(\lambda + \mu)}{\lambda} (1 - p_0) = 6 - \frac{(0,05 + 0,5)}{0,05} (0,5155) = 0,3297 \text{ máquinas}$$

d) Número promedio de máquinas que están en el sistema (en la cola y en proceso de reparación):

$$L_s = N - \frac{\mu}{\lambda} (1 - p_0) = 6 - \frac{0,5}{0,05} (0,5155) = 0,8451 \text{ máquinas}$$

e) Tiempo promedio de espera de las máquinas en la cola para ser atendidas:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda(N - L_s)} = \frac{0,3295}{0,05(6 - 0,8451)} = 1,279 \text{ horas}$$

f) Tiempo promedio de estancia de las máquinas en el sistema (en la cola y en proceso de reparación):

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda(N - L_s)} = \frac{0,845}{0,05 \cdot (6 - 0,8451)} = 3,279 \text{ horas}$$

$$\text{o bien, } W_s = W_q + \frac{1}{\mu} = 1,278 + \frac{1}{0,5} = 3,279 \text{ horas}$$

The image shows a software dialog box titled "Problem Specification". It has a blue title bar with a close button (X). The dialog is divided into several sections:

- Problem Title:** A text field containing "MANUFACTURAS".
- Time Unit:** A text field containing "hora".
- Entry Format:** A section with two radio buttons:
 - Simple M/M System
 - General Queuing System
- Buttons:** At the bottom, there are three buttons: "OK", "Cancel", and "Help".

Queuing Analysis

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

0.00

MANUFACTURAS	
Data Description	ENTRY
Number of servers	1
Service rate (per server per hora)	0.5
Customer arrival rate (per hora)	0.05
Queue capacity (maximum waiting space)	M
Customer population	6
Busy server cost per hora	
Idle server cost per hora	
Customer waiting cost per hora	
Customer being served cost per hora	
Cost of customer being balked	
Unit queue capacity cost	

System Performance Summary for MANUFACTURAS

	Performance Measure	Result
1	System: $M/M/1/6$	From Formula
2	Customer arrival rate (λ) per hora =	0,0500
3	Service rate per server (μ) per hora =	0,5000
4	Overall system effective arrival rate per hora =	0,2577
5	Overall system effective service rate per hora =	0,2577
6	Overall system utilization =	51,5485 %
7	Average number of customers in the system (L) =	0,8451
8	Average number of customers in the queue (Lq) =	0,3297
9	Average number of customers in the queue for a busy system (Lb) =	0,6395
10	Average time customer spends in the system (W) =	3,2790 horas
11	Average time customer spends in the queue (Wq) =	1,2790 horas
12	Average time customer spends in the queue for a busy system (Wb) =	2,4812 horas
13	The probability that all servers are idle (Po) =	48,4515 %
14	The probability an arriving customer waits (Pw) or system is busy (Pb) =	51,5485 %

System Probability Summary for MANUFACTURAS

n	Estimated Probability of n Customers in the System	Cumulative Probability
0	0,4845	0,4845
1	0,2907	0,7752
2	0,1454	0,9206
3	0,0581	0,9787
4	0,0174	0,9962
5	0,0035	0,9997
6	0,0003	1,0000



TEORÍA DE COLAS: BANCO - *Queuing Analysis*

Una pequeña entidad bancaria tiene dos cajeros automáticos, que siguen una distribución exponencial, atienden a razón de 1,5 clientes/minuto, la tasa de llegadas de clientes, según una distribución de Poisson, es de 30 clientes/hora. Se pide:

- Número medio de clientes en el sistema
- Tiempo medio de un cliente en el sistema
- Porcentaje de tiempo de cajero libre
- Sensibilidad del sistema en 24 horas.
- Análisis de sensibilidad para el parámetro de tasas de llegadas $\lambda = 30$, con una variación de 30 a 100 clientes/hora, y un incremento de 10 clientes/hora. Gráfico de sensibilidad.
- Análisis de capacidad: Coste servidor ocupado/hora = 5, Coste servidor ocioso/hora = 1, Coste cliente en espera = 0,5, Coste cliente servido/hora = 3 Coste cliente no atendido = 1, Coste unitario capacidad de cola = 3

a) Es un modelo de cola M/M/2 con $s = 2$ servidores

Tasa de llegadas $\lambda = 30$ clientes/hora

Tasa de servicio por operario: $\mu = \frac{60}{1,5} = 40$ clientes/hora

Utilización promedio del sistema: $u_s = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{30}{40} = 0,75$

Factor de utilización o congestión del sistema: $\rho = \frac{\lambda}{s \cdot \mu} = \frac{30}{2 \times 40} = 0,375$

Probabilidad de que ningún cliente se encuentre en el sistema de colas:

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda / \mu)^n}{n!} + \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^s \frac{1}{1-\rho}} = \frac{1}{\sum_{n=0}^1 \frac{0,75^n}{n!} + \frac{1}{2} \times 0,75^2 \times \left(\frac{1}{1-0,375} \right)} = \frac{1}{1 + 0,75 + 0,45} = 0,454545$$

Promedio de clientes en la cola:

$$L_q = \frac{(\lambda / \mu)^s \lambda \mu}{(s-1)! (s \cdot \mu - \lambda)^2} p_0 = \frac{0,75^2 \times 30 \times 40}{(2 \times 40 - 30)^2} \times 0,454545 = 0,1227 \text{ clientes}$$

Promedio de clientes en el sistema: $L_s = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = 0,1227 + 0,75 = 0,8727$ clientes

b) Tiempo medio de espera en cola: $W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{0,1227}{30} = 0,0041$ horas

Tiempo medio de estancia en el sistema:

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu} = 0,0041 + \frac{1}{40} = 0,0291 \text{ horas}$$

c) Porcentaje de tiempo que determinado cajero esté libre: $p_n = \frac{(\lambda / \mu)^n}{n!} p_0$

$n = 0: p_0 = 0,4545$

$n = 1: p_1 = \frac{(30 / 40)}{1} p_0 = 0,75 \times 0,4545 = 0,3409$

Data Description	ENTRY
Number of servers	2
Service rate (per server per hora)	40
Customer arrival rate (per hora)	30
Queue capacity (maximum waiting space)	M
Customer population	M
Busy server cost per hora	
Idle server cost per hora	
Customer waiting cost per hora	
Customer being served cost per hora	
Cost of customer being balked	
Unit queue capacity cost	

Queuing Analysis

File Format Results Utilities Window Help

Performance Summary
 Probability Summary
 System

Show Sensitivity Analysis - Table
 Show Sensitivity Analysis - Graph
 Show Capacity Analysis

	Performance Measure	Result
1	System: M/M/2	From Formula
2	Customer arrival rate (λ) per hora =	30,0000
3	Service rate per server (μ) per hora =	40,0000
4	Overall system effective arrival rate per hora =	30,0000
5	Overall system effective service rate per hora =	30,0000
6	Overall system utilization =	37,5000 %
7	Average number of customers in the system (L) =	0,8727
8	Average number of customers in the queue (Lq) =	0,1227
9	Average number of customers in the queue for a busy system (Lb) =	0,6000
10	Average time customer spends in the system (W) =	0,0291 horas
11	Average time customer spends in the queue (Wq) =	0,0041 horas
12	Average time customer spends in the queue for a busy system (Wb) =	0,0200 horas
13	The probability that all servers are idle (Po) =	45,4545 %
14	The probability an arriving customer waits (Pw) or system is busy (Pb) =	20,4545 %

System Probability Summary for BANCO

	Estimated Probability of n Customers in the System	Cumulative Probability
0	0,4545	0,4545
1	0,3409	0,7955
2	0,1278	0,9233
3	0,0479	0,9712
4	0,0180	0,9892
5	0,0067	0,9960
6	0,0025	0,9985
7	0,0009	0,9994
8	0,0004	0,9998
9	0,0001	0,9999
10	0,0000	1,0000
11	0,0000	1,0000
12	0,0000	1,0000
13	0,0000	1,0000
14	0,0000	1,0000

d) Sensibilidad del sistema en 24 horas

Queuing Analysis

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

BANCO

Simulation Specification

Random Seed

Use default random seed

Enter a seed number

Use system clock

Queue Discipline

FIFO

LIFO

Random

Random seed number: 27437

Simulation time: 24 horas

Start collection time: 0 horas

Queue capacity: M

Max. number of data collections: M

OK Cancel Help

Data Description	ENTRY
Number of servers	2
Service rate (per server per hora)	40
Customer arrival rate (per hora)	30
Queue capacity (maximum waiting space)	M
Customer population	M
Busy server cost per hora	
Idle server cost per hora	
Customer waiting cost per hora	
Customer being served cost per hora	
Cost of customer being balked	
Unit queue capacity cost	

Queuing Analysis

File Format Results Utilities Window Help

System Performance Summary for BANCO

	Performance Measure	Result
1	System: M/M/2	From Simulation
2	Customer arrival rate (λ) per hora =	30,0000
3	Service rate per server (μ) per hora =	40,0000
4	Overall system effective arrival rate per hora =	27,3295
5	Overall system effective service rate per hora =	27,3295
6	Overall system utilization =	34,2151 %
7	Average number of customers in the system (L) =	0,7565
8	Average number of customers in the queue (Lq) =	0,0722
9	Average number of customers in the queue for a busy system (Lb) =	0,4174
10	Average time customer spends in the system (W) =	0,0277 horas
11	Average time customer spends in the queue (Wq) =	0,0026 horas
12	Average time customer spends in the queue for a busy system (Wb) =	0,0153 horas
13	The probability that all servers are idle (Po) =	48,8648 %
14	The probability an arriving customer waits (Pw) or system is busy (Pb) =	17,2951 %
15	Average number of customers being balked per hora =	0
16	Total cost of busy server per hora =	\$0
17	Total cost of idle server per hora =	\$0
18	Total cost of customer waiting per hora =	\$0
19	Total cost of customer being served per hora =	\$0
20	Total cost of customer being balked per hora =	\$0
21	Total queue space cost per hora =	\$0
22	Total system cost per hora =	\$0
23	Simulation time in hora =	24,0000
24	Starting data collection time in hora =	0
25	Number of observations collected =	656
26	Maximum number of customers in the queue =	4
27	Total simulation CPU time in second =	0,0300

e) Análisis de sensibilidad para el parámetro $\lambda = 30$, variando de 30 a 100 clientes/hora, y un incremento de 10 clientes/hora. Gráfico de sensibilidad.

Con el Modelo de aproximación G/G/s se observa cómo reacciona el sistema.

Select Parameter for Sensitivity Analysis

Select a parameter for analysis

- Number of servers
- Service rate (μ)
- Service pressure coefficient
- Arrival rate (λ)**
- Arrival discourage coefficient
- Batch (bulk) size
- Queue capacity
- Customer population
- Busy server cost per hora
- Idle server cost per hora
- Customer waiting cost per hora
- Customer being served cost per hora
- Cost of customer being balked
- Unit queue capacity cost

Specify either approximation or simulation for solution if no close form formula is available.

Solution Method

Approximation by G/G/s

Monte Carlo Simulation

Start from: 30

End at: 100

Step: 10

Arrival rate (λ): 30

OK Cancel Help

Data Description	ENTRY
Number of servers	2
Service rate (per server per hora)	40
Customer arrival rate (per hora)	30
Queue capacity (maximum waiting space)	M
Customer population	M
Busy server cost per hora	
Idle server cost per hora	
Customer waiting cost per hora	
Customer being served cost per hora	
Cost of customer being balked	
Unit queue capacity cost	

Sensitivity Analysis of Arrival rate (λ) for BANCO

Value	Effective Arrival Rate	System Utilization	L	Lq	Lb	W	Wq	Wb	P0	Pw
30	30,0000	0,3750	0,8727	0,1227	0,6000	0,0291	0,0041	0,0200	0,4545	0,2045
40	40,0000	0,5000	1,3333	0,3333	1,0000	0,0333	0,0083	0,0250	0,3333	0,3333
50	50,0000	0,6250	2,0513	0,8013	1,6667	0,0410	0,0160	0,0333	0,2308	0,4808
60	60,0000	0,7500	3,4286	1,9286	3,0000	0,0571	0,0321	0,0500	0,1429	0,6429
70	70,0000	0,8750	7,4667	5,7167	7,0000	0,1067	0,0817	0,1000	0,0667	0,8167
80	Unstable	System!								
90	Unstable	System!								
100	Unstable	System!								

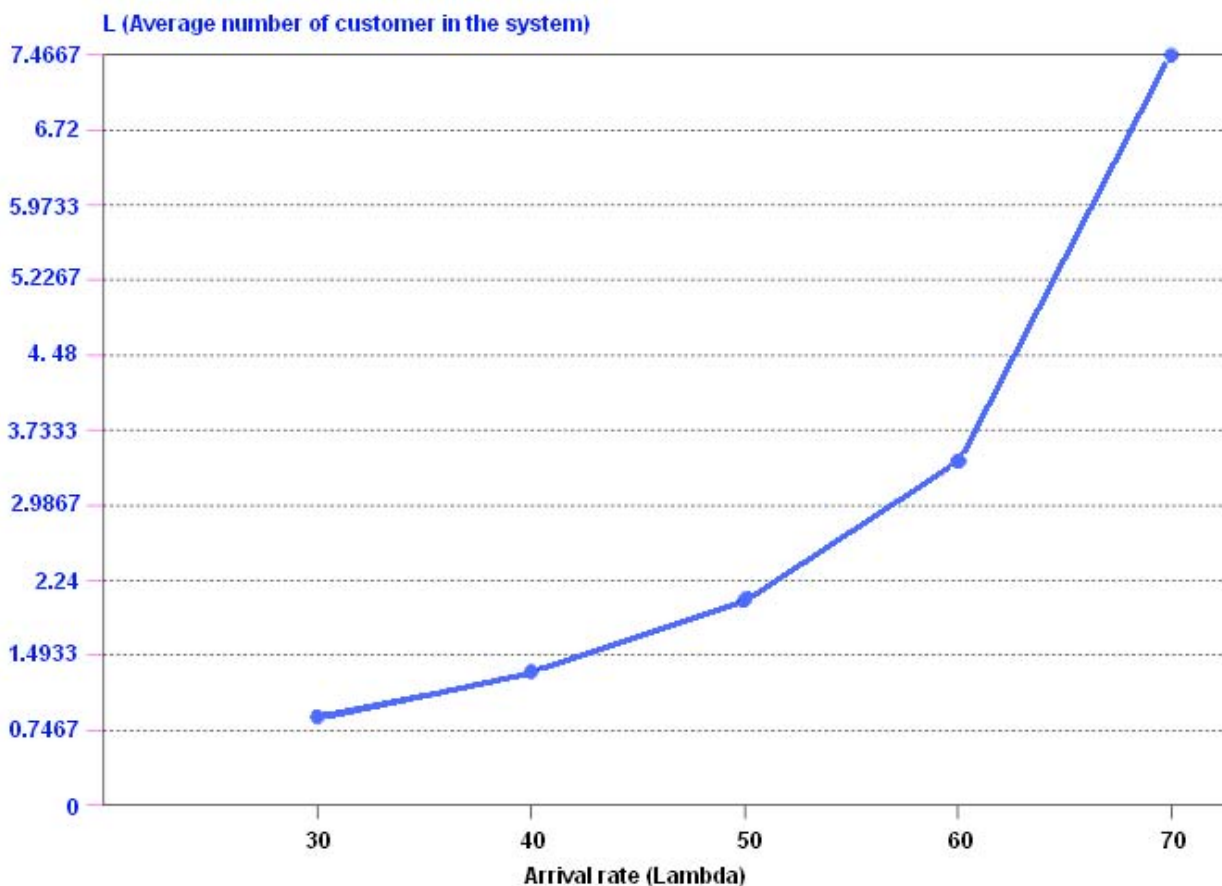
La utilización del sistema se va incrementando, de forma que cuando la llegada de clientes es de 70 a la hora la utilización del sistema es del 87,5% (máxima posible), a partir de entonces el sistema se vuelve inestable, es decir, el número de servidores es insuficiente.

GRÁFICO ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD: Se representa el gráfico $L_s \equiv$ número promedio de clientes en el sistema, en función del parámetro lambda λ .

Dependiendo de las necesidades se pueden ir analizando cada uno de los parámetros.

The screenshot shows the 'Queuing Analysis' software interface. A 'Sensitivity Analysis' menu is open, and a dialog box titled 'Performance for Graphic Sensitivity Analysis' is displayed. The dialog box contains a list of performance measures, with 'L (Average number of customers in the system)' selected. The background shows a table of results for different arrival rates.

Value	Effective Arrival Rate	System Utilization	L
30	30,0000	0,3750	0,8727
40	40,0000	0,5000	1,3333
50	50,0000	0,6250	2,0513
60	60,0000	0,7500	3,4286
70	70,0000	0,8750	7,4667
80	Unstable	System!	
90	Unstable	System!	
100	Unstable	System!	



f) Analisis de capacidad: Coste servidor ocupado/hora = 5 , Coste servidor ocioso/hora = 1 , Coste cliente en espera = 0,5 , Coste cliente servido/hora = 3 Coste cliente no atendido = 1 , Coste unitario capacidad de cola = 3

Se marca una variación de servidores de 2 a 8, con un paso de 1, en que la capacidad de la cola es infinita.

Data Description	ENTRY
Number of servers	2
Service rate (per server per hora)	40
Customer arrival rate (per hora)	30
Queue capacity (maximum waiting space)	M
Customer population	M
Busy server cost per hora	5
Idle server cost per hora	1
Customer waiting cost per hora	0,5
Customer being served cost per hora	3
Cost of customer being balked	1
Unit queue capacity cost	3

	Number of Server	Queue Capacity	Total Cost	Busy Server Cost	Idle Server Cost	Waiting Customer Cost	Served Customer Cost
1	2	M	\$7,3114	3,7500	1,2500	0,0614	2,2500
2	3	M	\$8,2574	3,7500	2,2500	0,0074	2,2500
3	4	M	\$9,2509	3,7500	3,2500	0,0009	2,2500
4	5	M	\$10,2501	3,7500	4,2500	0,0001	2,2500
5	6	M	\$11,2500	3,7500	5,2500	0,0000	2,2500
6	7	M	\$12,2500	3,7500	6,2500	0,0000	2,2500
7	8	M	\$13,2500	3,7500	7,2500	0,0000	2,2500

El coste total promedio óptimo se obtiene con 2 servidores.

Queuing Analysis

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

0.00

BANCO

Data Description	ENTRY
Number of servers	2
Service rate (per server per hora)	40
Customer arrival rate (per hora)	30
Queue capacity (maximum waiting space)	M
Customer population	M
Busy server cost per hora	5
Idle server cost per hora	1
Customer waiting cost per hora	0.5
Customer being served cost per hora	3
Cost of customer being balked	1
Unit queue capacity cost	3

Queuing Analysis

File Format Results Utilities Window Help

0.00

System Performance Summary for BANCO

	Performance Measure	Result
1	System: M/M/2	From Formula
2	Customer arrival rate (lambda) per hora =	30,0000
3	Service rate per server (mu) per hora =	40,0000
4	Overall system effective arrival rate per hora =	30,0000
5	Overall system effective service rate per hora =	30,0000
6	Overall system utilization =	37,5000 %
7	Average number of customers in the system (L) =	0,8727
8	Average number of customers in the queue (Lq) =	0,1227
9	Average number of customers in the queue for a busy system (Lb) =	0,6000
10	Average time customer spends in the system (W) =	0,0291 horas
11	Average time customer spends in the queue (Wq) =	0,0041 horas
12	Average time customer spends in the queue for a busy system (Wb) =	0,0200 horas
13	The probability that all servers are idle (Po) =	45,4545 %
14	The probability an arriving customer waits (Pw) or system is busy (Pb) =	20,4545 %
15	Average number of customers being balked per hora =	0
16	Total cost of busy server per hora =	\$3,7500
17	Total cost of idle server per hora =	\$1,2500
18	Total cost of customer waiting per hora =	\$0,0614
19	Total cost of customer being served per hora =	\$2,2500
20	Total cost of customer being balked per hora =	\$0
21	Total queue space cost per hora =	\$0
22	Total system cost per hora =	\$7,3114