TEORÍA DE COLAS

- Modelos de Cola no exponenciales
- Modelos: M/G/1 - M/D/1 - M/E $_k$/1
- Ejercicios Modelos de Colas

## MODELOS DE COLAS CON TIEMPOS DE SERVICIO NO EXPONENCIAL

Los modelos anteriores se basan en que las entradas y el servicio se distribuyen mediante procesos que siguen una distribución de Poisson/Exponencial.

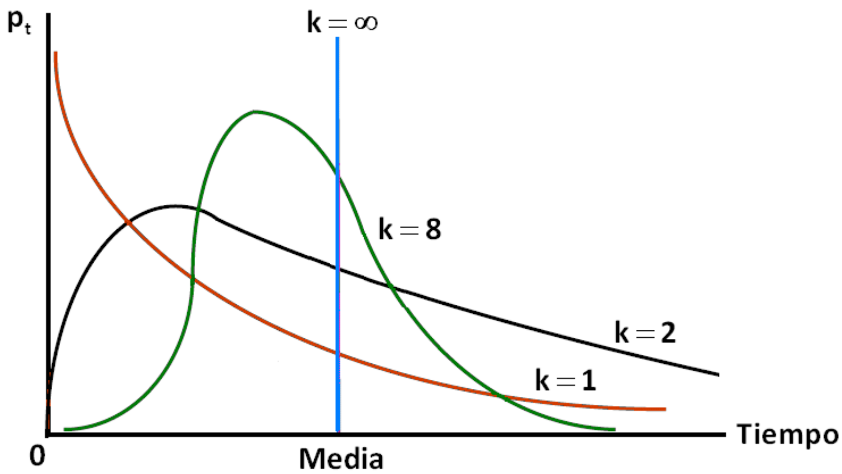
En un sistema de colas es necesario seleccionar una distribución de probabilidad para los tiempos de servicio. Hay tres distribuciones que representan tiempos de servicio:

- La distribución de servicio exponencial ($\sigma \equiv$ media)
- La distribución de servicio constante ($\sigma \equiv 0$)
- La distribución Erlang que posee un parámetro k que determina la desviación típica $\sigma = \dfrac{1}{\sqrt{k}}\left(\dfrac{1}{\mu}\right) \quad \rightarrow \quad k = \dfrac{1}{\mu^2 \times \sigma^2}$

$k = 1 \quad \rightarrow$ La distribución Erlang $\equiv$ La distribución Exponencial

$k = \infty \quad \rightarrow$ La distribución Erlang $\equiv$ La distribución degenerada con tiempos constantes

Distribución Erlang según los valores del parámetro k:



## MODELO GENERAL DE COLA M/G/1

Según la notación Kendall se trata de sistema de colas con tiempos de llegadas distribuidos exponencialmente (Proceso de Poisson de parámetro $\lambda$), con clientes que tienen tiempos de servicio independientes e idénticamente distribuidos de media $(1/\mu)$ y varianza $\sigma^2$.

Modelo con una distribución exponencial entre llegadas y una distribución General/Arbritaria de servicio.

Cualquier sistema de colas de este tipo alcanza en algún momento el estado estable cuando el factor de utilización $\rho = \lambda / \mu < 1$.

Las medidas de rendimiento para este modelo toman las expresiones adjuntas, donde la referente a $L_q$ recibe el nombre de fórmula de Pollaczek-Khinchine.

$p_n = \rho$

Utilización promedio: $p_0 = 1 - \rho$

Número promedio de clientes en la cola: $L_q = \dfrac{\lambda^2 . \sigma^2 + \rho^2}{2 . (1-\rho)}$

Número promedio de clientes en el sistema: $L_s = L_q + \rho$

Tiempo promedio de espera en la cola: $W_q = \dfrac{L_q}{\lambda} = \dfrac{\lambda^2 . \sigma^2 + \rho^2}{2 . \lambda . (1-\rho)}$

Tiempo promedio de estancia en el sistema: $W_s = \dfrac{L_s}{\lambda} = W_q + \dfrac{1}{\mu}$

Las medidas de eficiencia incrementan su valor conforme $\sigma^2$ aumenta, lo que indica que el funcionamiento del servidor tiene gran transcendencia en la eficiencia global del sistema.

Curry y Feldman proponen una modificación del tiempo promedio de espera en la cola que proporciona una relación directa entre las colas M/M/1 y las colas M/G/1:

$$W_q\,(M/G/1) = \left(\frac{1+\mu^2 . \sigma^2}{2}\right) W_q\,(M/M/1)$$

$\mu^2 . \sigma^2 \equiv$ Coeficiente de variación al cuadrado de los tiempos de servicio.

## MODELO DE COLA M/D/1

Es un sistema de colas con tiempos de llegadas distribuidos exponencialmente (Proceso de Poisson de parámetro $\lambda$), el servicio consiste básicamente en la misma tarea rutinaria que el servidor realiza para todos los clientes, tiende a haber poca variación en el tiempo de servicio requerido, asumiendo que el tiempo de servicio es igual a una constante fija.

Modelo con una distribución exponencial entre llegadas y una distribución constante de servicio.

Con un único servidor, el modelo M/D/1 se reduce a un caso particular del modelo M/G/1 en donde $\sigma^2 = 0$, con lo que las medidas de eficiencia son:

Utilización promedio: $p_0 = 1 - \rho$

Número promedio de clientes en la cola: $L_q = \dfrac{\rho^2}{2\,.\,(1-\rho)}$

Número promedio de clientes en el sistema: $L_s = L_q + \rho$

Tiempo promedio de espera en la cola: $W_q = \dfrac{L_q}{\lambda}$

Tiempo promedio de estancia en el sistema: $W_s = \dfrac{L_s}{\lambda} = W_q + \dfrac{1}{\mu}$

## MODELO DE COLA M/E$_k$/1

Se basa en el método de fases, asume una llegada Poisson sin memoria. El servicio (servidor) es la concatenación de servicios en serie. Sólo puede haber una llamada en el sistema completo, por lo que es imposible que haya más de una 'fase' ocupada.

Cada una de las fases tiene un tiempo de servicio distribuido según una exponencial negativa de tasa $\upsilon = k\,.\,\mu$, de media $\dfrac{1}{\mu}$, donde:

$$\sigma^2 = \frac{k}{\upsilon^2} = \frac{1}{k\,.\,\mu^2} \quad \rightarrow \quad \sigma = \frac{1}{\sqrt{k}}\,.\left(\frac{1}{\mu}\right) \qquad k = \frac{1}{\mu^2 \times \sigma^2}$$

El tiempo de servicio total es la suma de los tiempos de servicio de cada fase. La suma de k variables aleatorias exponenciales negativas con media $\dfrac{1}{\upsilon} = \dfrac{1}{k\,.\,\mu}$ da lugar a una variable aleatoria con distribución Erlang-k.

Las medidas de eficiencia del modelo $M/E_k/1$, vienen dadas por:

Utilización promedio: $p_0 = 1 - \rho$

Número promedio de clientes en la cola: $L_q = \dfrac{\lambda^2 . (1+k)}{2 . k . \mu . (\mu - \lambda)} = \dfrac{\rho^2 . (1+k)}{2 . k . (1-\rho)}$

Número promedio de clientes en el sistema: $L_s = L_q + \rho$

Tiempo promedio de espera en la cola: $W_q = \dfrac{L_q}{\lambda}$

Tiempo promedio de estancia en el sistema: $W_s = \dfrac{L_s}{\lambda} = W_q + \dfrac{1}{\mu}$

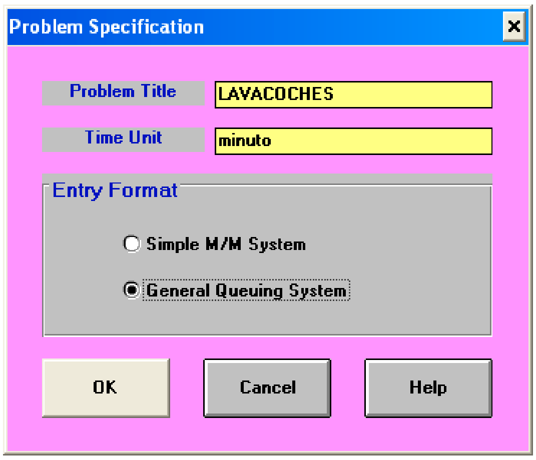
## COLA GENERAL - Modelos de Colas

El servicio de lavacoches de un aeropuerto tiene una tasa de llegadas de 9 vehículos/hora, pudiendo atender un vehículo cada 5 minutos, con un error típico $(\sigma = 2)$ minutos. Se pide:

a) Medidas de eficiencia según un modelo general M/G/1

b) Medidas de eficiencia según un modelo $M/E_k/1$

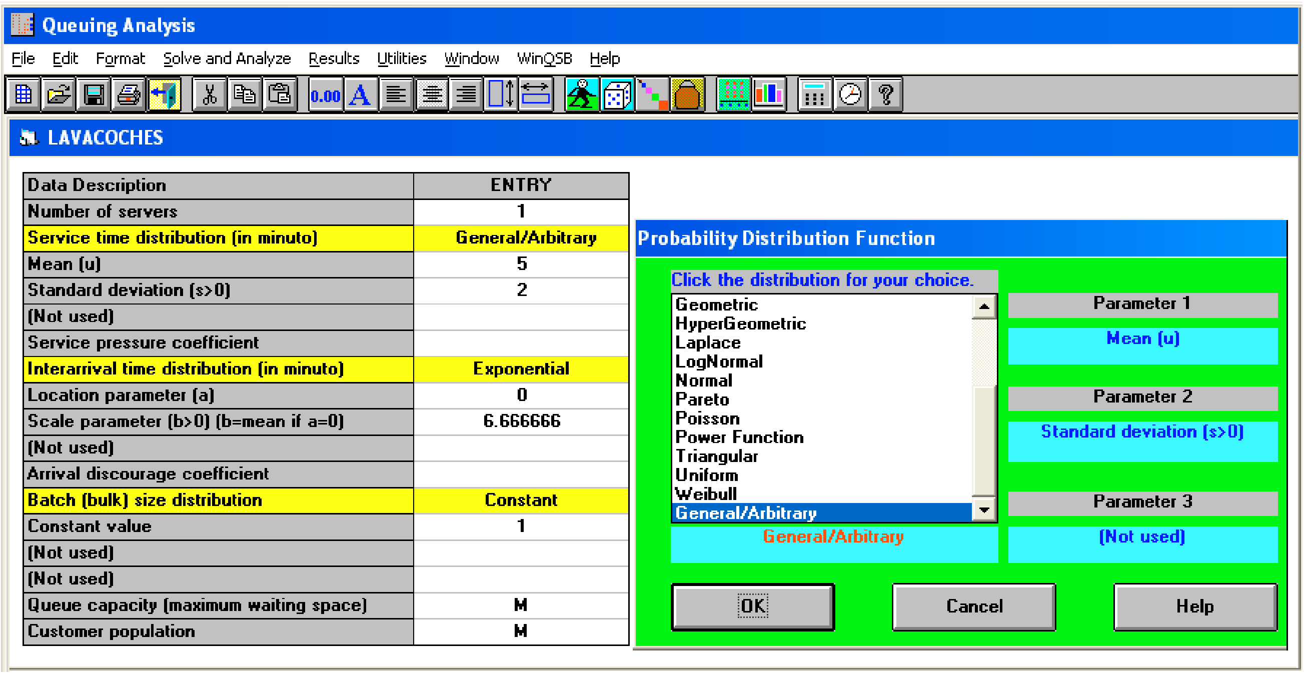
c) Medidas de eficiencia según un modelo M/D/1




a) Medidas de eficiencia Modelo General M/G/1 con $s = 1$ servidor

$$\lambda = \frac{9}{60} = 0{,}15 \text{ vehículos/minuto} \quad \rightarrow \quad \text{Tasa llegadas (Media)} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0{,}15} = 6{,}666666$$

$\mu = 5$ vehículos/minuto , $\sigma = 2$ minutos




| Data Description | ENTRY |
|---|---|
| Number of servers | 1 |
| Service time distribution (in minuto) | General/Arbitrary |
| Mean (u) | 5 |
| Standard deviation (s>0) | 2 |
| (Not used) | |
| Service pressure coefficient | |
| Interarrival time distribution (in minuto) | Exponential |
| Location parameter (a) | 0 |
| Scale parameter (b>0) (b=mean if a=0) | 6.666666 |
| (Not used) | |
| Arrival discourage coefficient | |
| Batch (bulk) size distribution | Constant |
| Constant value | 1 |
| (Not used) | |
| (Not used) | |
| Queue capacity (maximum waiting space) | M |
| Customer population | M |

Queuing Analysis

File Format Results Utilities Window Help

System Performance Summary for LAVACOCHES

| | Performance Measure | Result |
|---|---|---|
| 1 | System: M/G/1 | From Formula |
| 2 | Customer arrival rate (lambda) per minuto = | 0,1500 |
| 3 | Service rate per server (mu) per minuto = | 0,2000 |
| 4 | Overall system effective arrival rate per minuto = | 0,1500 |
| 5 | Overall system effective service rate per minuto = | 0,1500 |
| 6 | Overall system utilization = | 75,0000 % |
| 7 | Average number of customers in the system (L) = | 2,0550 |
| 8 | Average number of customers in the queue (Lq) = | 1,3050 |
| 9 | Average number of customers in the queue for a busy system (Lb) = | 1,7400 |
| 10 | Average time customer spends in the system (W) = | 13,7000 minutos |
| 11 | Average time customer spends in the queue (Wq) = | 8,7000 minutos |
| 12 | Average time customer spends in the queue for a busy system (Wb) = | 11,6000 minutos |
| 13 | The probability that all servers are idle (Po) = | 25,0000 % |
| 14 | The probability an arriving customer waits (Pw) or system is busy (Pb) = | 75,0000 % |

Factor de utilización: $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} = \dfrac{0,15}{0,2} = 0,75$

Promedio de vehículos en cola: $L_q = \dfrac{\lambda^2 . \sigma^2 + \rho^2}{2 . (1-\rho)} = \dfrac{0,15^2 \text{ x } 2^2 + 0,75^2}{2 \text{ x } (1-0,75)} = 1,3050$ vehículos

Promedio de vehículos en sistema: $L_s = L_q + \rho = 1,3050 + 0,75 = 2,0550$ minutos

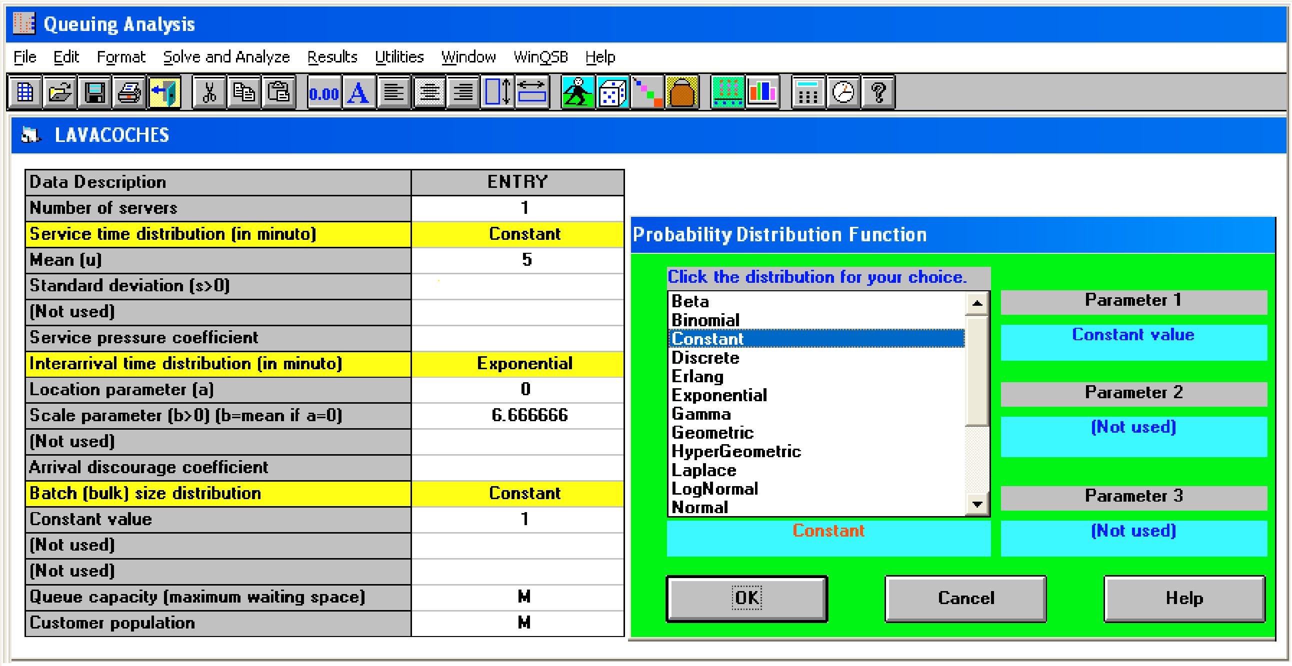
Tiempo promedio de espera en la cola: $W_q = \dfrac{L_q}{\lambda} = \dfrac{1,3050}{0,15} = 8,7000$ minutos

Tiempo promedio de estancia en lavacoches: $W_s = \dfrac{L_s}{\lambda} = \dfrac{2,0550}{0,15} = 13,7000$ minutos

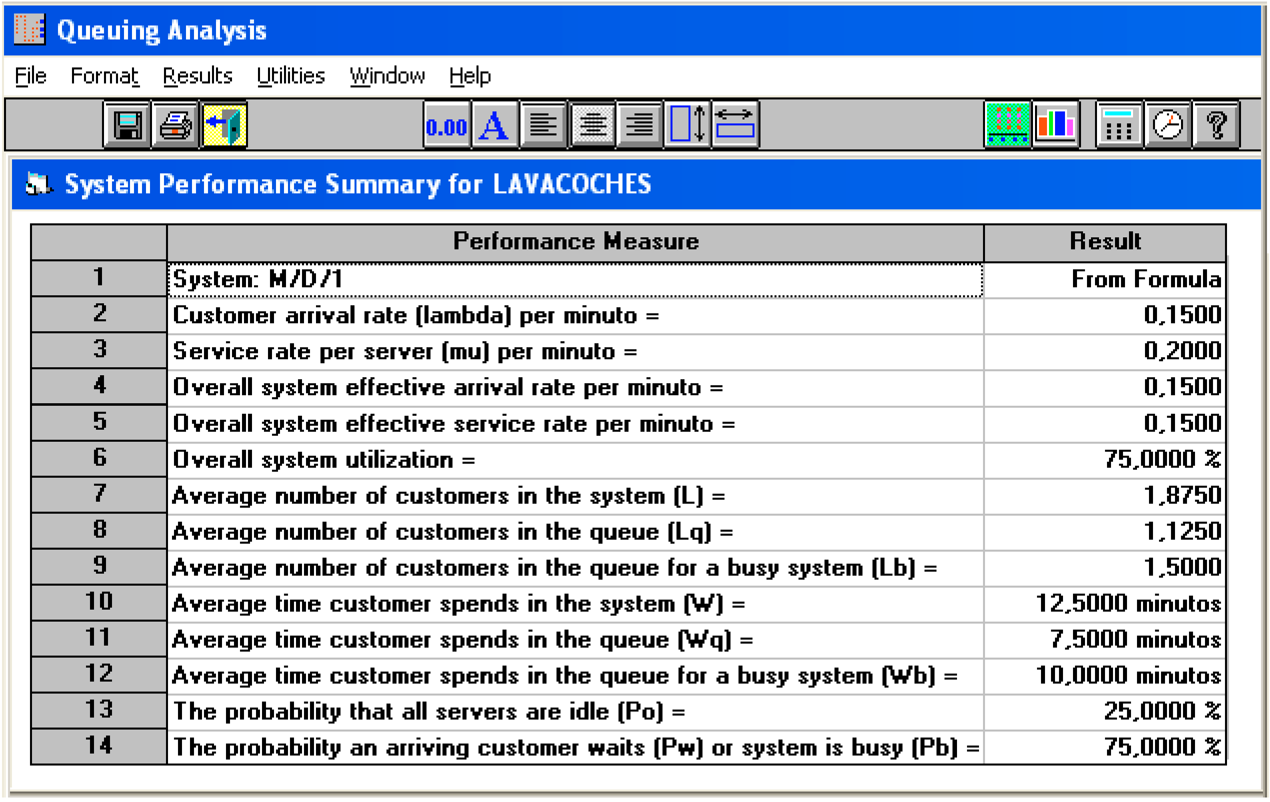
b) En un modelo de cola M/D/1 con $s = 1$ servidor

$\lambda = \dfrac{9}{60} = 0,15$ vehículos/minuto $\rightarrow$ Tasa llegadas (Media) $= \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{0,15} = 6,666666$

Tasa de servicio $= \dfrac{1}{\mu} = 5 \rightarrow \mu = 0,2$ pasajeros/minuto




| Data Description | ENTRY |
|---|---|
| Number of servers | 1 |
| Service time distribution (in minuto) | Constant |
| Mean (u) | 5 |
| Standard deviation (s>0) | |
| (Not used) | |
| Service pressure coefficient | |
| Interarrival time distribution (in minuto) | Exponential |
| Location parameter (a) | 0 |
| Scale parameter (b>0) (b=mean if a=0) | 6.666666 |
| (Not used) | |
| Arrival discourage coefficient | |
| Batch (bulk) size distribution | Constant |
| Constant value | 1 |
| (Not used) | |
| (Not used) | |
| Queue capacity (maximum waiting space) | M |
| Customer population | M |




| | Performance Measure | Result |
|---|---|---|
| 1 | System: M/D/1 | From Formula |
| 2 | Customer arrival rate (lambda) per minuto = | 0,1500 |
| 3 | Service rate per server (mu) per minuto = | 0,2000 |
| 4 | Overall system effective arrival rate per minuto = | 0,1500 |
| 5 | Overall system effective service rate per minuto = | 0,1500 |
| 6 | Overall system utilization = | 75,0000 % |
| 7 | Average number of customers in the system (L) = | 1,8750 |
| 8 | Average number of customers in the queue (Lq) = | 1,1250 |
| 9 | Average number of customers in the queue for a busy system (Lb) = | 1,5000 |
| 10 | Average time customer spends in the system (W) = | 12,5000 minutos |
| 11 | Average time customer spends in the queue (Wq) = | 7,5000 minutos |
| 12 | Average time customer spends in the queue for a busy system (Wb) = | 10,0000 minutos |
| 13 | The probability that all servers are idle (Po) = | 25,0000 % |
| 14 | The probability an arriving customer waits (Pw) or system is busy (Pb) = | 75,0000 % |

Factor de utilización: $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} = \dfrac{0,15}{0,20} = 0,75$

Promedio de empleados en la cola: $L_q = \dfrac{\rho^2}{2\,.\,(1-\rho)} = \dfrac{0,75^2}{2 \times (1-0,75)} = 1,125$ vehículos

Promedio de empleados en el sistema: $L_s = L_q + \rho = 1,125 + 0,75 = 1,875$ vehículos

Tiempo promedio que un empleado espera en la cola: $W_q = \dfrac{L_q}{\lambda} = \dfrac{1,125}{0,15} = 7,50$ minutos

Tiempo promedio que los empleados están en la cola: $W_s = \dfrac{L_s}{\lambda} = \dfrac{1,875}{0,15} = 12,50$ minutos

c) Medidas de eficiencia según un modelo $M/E_k/1$ con $s = 1$ servidor

$$\lambda = \frac{9}{60} = 0{,}15 \text{ vehículos/minuto} \quad \rightarrow \quad \text{Tasa llegadas (Media)} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0{,}15} = 6{,}666666$$

$$\text{Tasa de servicio} = \frac{1}{\mu} = 5 \quad \rightarrow \quad \mu = 0{,}2 \text{ pasajeros/minuto} \quad , \quad \sigma = 2 \text{ minutos}$$

$$k = \frac{1}{\mu^2 \text{x } \sigma^2} = \frac{1}{0{,}2^2 \text{ x } 2^2} = 6{,}25$$

Promedio de clientes en la cola:

$$L_q = \frac{\rho^2 \,.\, (1+k)}{2 \,.\, k \,.\, (1-\rho)} = \frac{0{,}75^2 \text{ x } (1+6{,}25)}{2 \text{ x } 6{,}25 \text{ x } (1-0{,}75)} = 1{,}305 \text{ clientes}$$

Promedio de clientes en el sistema: $L_s = L_q + \rho = 1{,}305 + 0{,}75 = 2{,}055$ clientes

Tiempo promedio en la cola: $W_q = \dfrac{L_q}{\lambda} = \dfrac{1{,}305}{0{,}15} = 8{,}7$ minutos

Tiempo promedio en el sistema: $W_s = \dfrac{L_s}{\lambda} = W_q + \dfrac{1}{\mu} = 8{,}7 + 5 = 13{,}7$ minutos

Se observa que cuando $\sigma = \dfrac{1}{\mu} \rightarrow k = \dfrac{1}{\mu^2 \text{ x } \sigma^2} = 1$ , el modelo de cola $M/E_k/1$ es un modelo de cola $M/M/1$ con tiempo de servicio exponencial. En este caso,

Promedio de clientes en la cola: $L_q = \dfrac{\rho^2 \text{ x } (1+1)}{2 \text{ x } 1 \text{ x } (1-\rho)} = \dfrac{\rho^2}{(1-\rho)}$

## COLA GENERAL - Cola General M/G/1

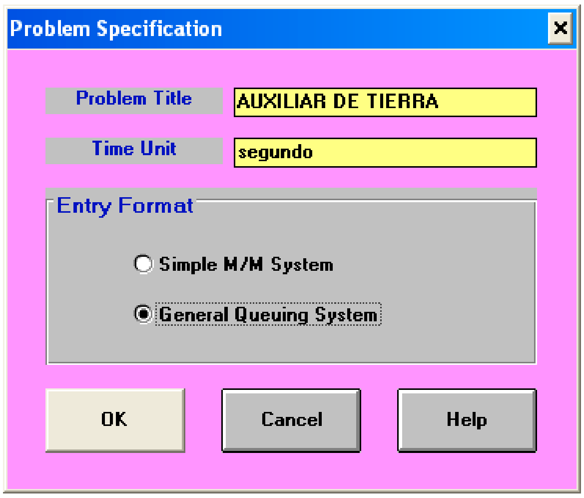
La dirección de un aeropuerto analiza si contratar a un nuevo auxiliar de tierra. Para este puesto se han presentado varios candidatos, aunque solo han pasado a la fase final únicamente dos de ellos.

El primer auxiliar de tierra tarda en registrar a los pasajeros y su equipaje aproximadamente 20 segundos con un error típico de 2 segundos. Por otro lado, el segundo auxiliar es capaz de registrar cada pasajero en 25 segundos exactos.

Los pasajeros llegan en promedio cada 30 segundos. Los tiempos entre llegadas varían de acuerdo con la distribución exponencial.

¿A cuál de los dos auxiliares de tierra debería contratar el aeropuerto?
¿Cuál es la probabilidad de que el auxiliar contratado esté ocupado?

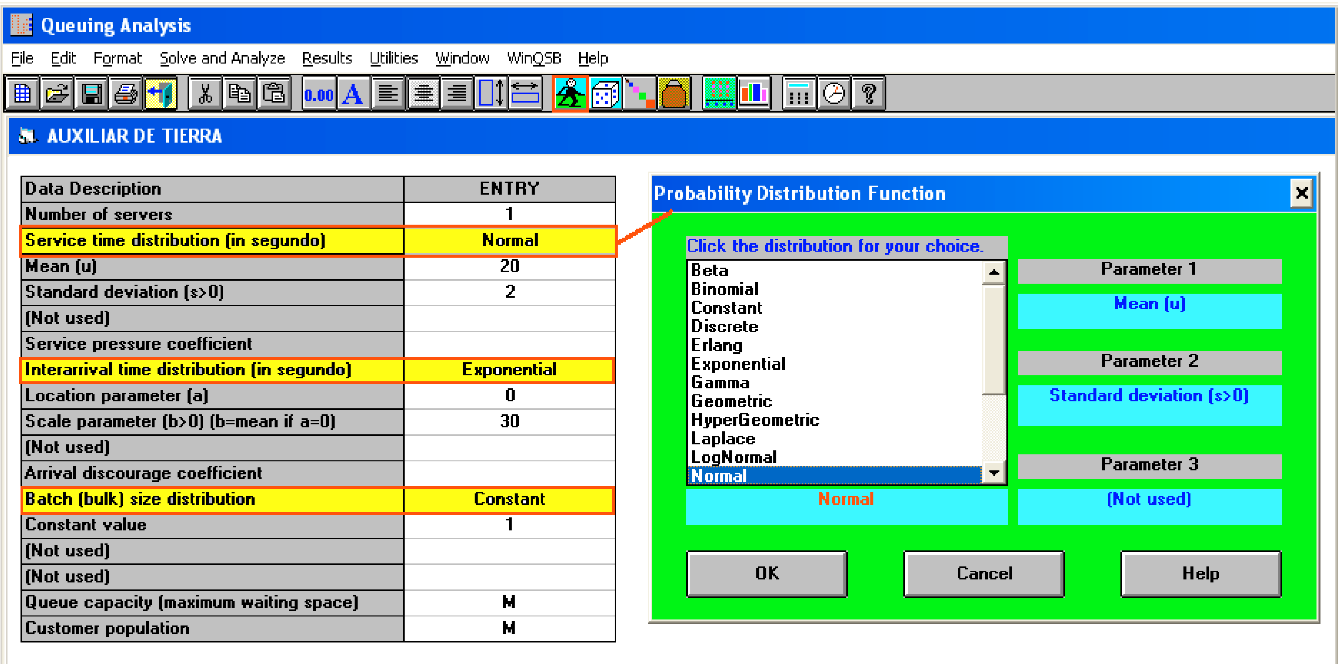
Se trata de un Modelo General de Colas:




Auxiliar 1 de tierra: Modelo de cola M/G/1 con s = 1 servidor

Tasa de llegadas: $\dfrac{1}{\lambda_1} = 30 \rightarrow \lambda_1 = 0{,}0333$ pasajeros/segundo

Tasa de servicio: $\dfrac{1}{\mu_1} = 20 \rightarrow \mu_1 = 0{,}05$ pasajeros/segundo , $\sigma_1 = 2$ segundos



Queuing Analysis

File Format Results Utilities Window Help

System Performance Summary for AUXILIAR DE TIERRA

| | Performance Measure | Result |
|---|---|---|
| 1 | System: M/G/1 | From Formula |
| 2 | Customer arrival rate (lambda) per segundo = | 0,0333 |
| 3 | Service rate per server (mu) per segundo = | 0,0500 |
| 4 | Overall system effective arrival rate per segundo = | 0,0333 |
| 5 | Overall system effective service rate per segundo = | 0,0333 |
| 6 | Overall system utilization = | 66,6667 % |
| 7 | Average number of customers in the system (L) = | 1,3400 |
| 8 | Average number of customers in the queue (Lq) = | 0,6733 |
| 9 | Average number of customers in the queue for a busy system (Lb) = | 1,0100 |
| 10 | Average time customer spends in the system (W) = | 40,2000 segundos |
| 11 | Average time customer spends in the queue (Wq) = | 20,2000 segundos |
| 12 | Average time customer spends in the queue for a busy system (Wb) = | 30,3000 segundos |
| 13 | The probability that all servers are idle (Po) = | 33,3333 % |
| 14 | The probability an arriving customer waits (Pw) or system is busy (Pb) = | 66,6667 % |

Factor de utilización: $\rho_1 = \dfrac{\lambda_1}{\mu_1} = \dfrac{0,0333}{0,05} = 0,666667$

Promedio de pasajeros en la cola:

$$L_{q1} = \frac{\lambda_1^2 . \sigma_1^2 + \rho_1^2}{2(1-\rho_1)} = \frac{0,03333^2 \times 2^2 + 0,666667^2}{2 \times (1-0,666667)} = 0,6733 \text{ pasajeros}$$

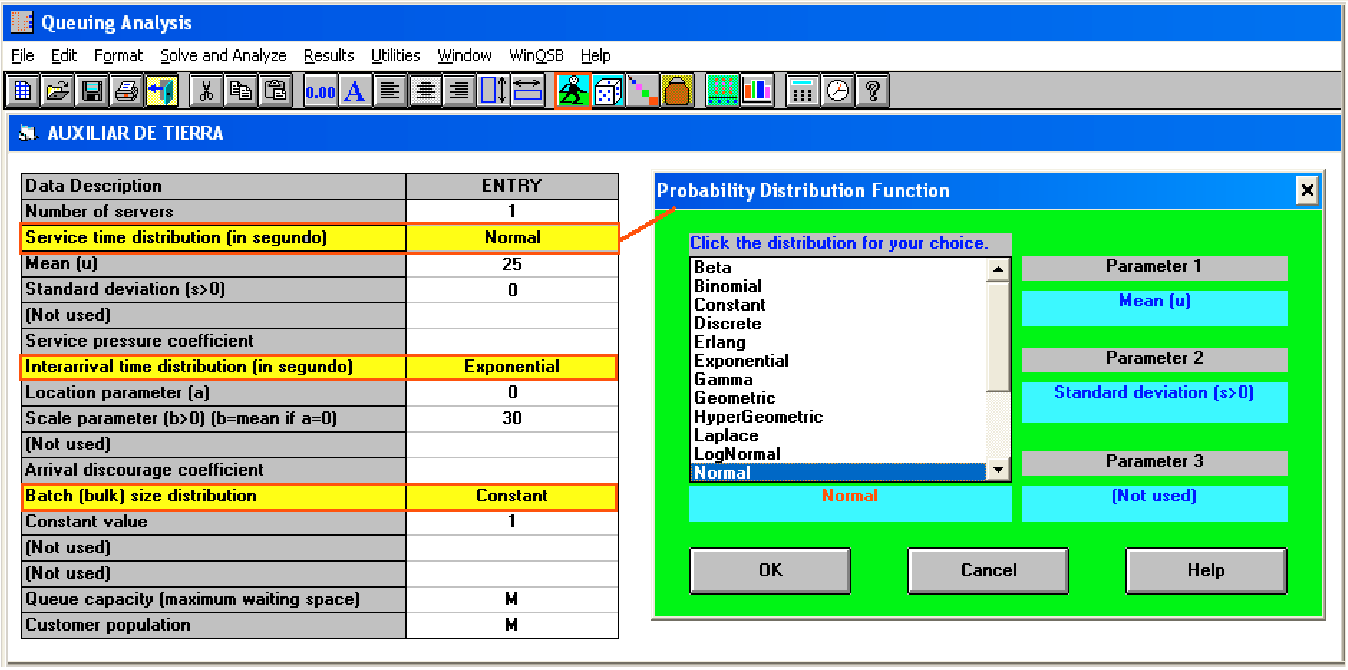
Tiempo promedio de espera en la cola: $W_{q1} = \dfrac{L_{q1}}{\lambda_1} = \dfrac{0,666667}{0,0333} = 20,20$ segundos

Tiempo total que pasa el pasajero en la cola: $W_{s1} = W_{q1} + \dfrac{1}{\mu_1} = 20,20 + \dfrac{1}{0,05} = 40,20$ segundos

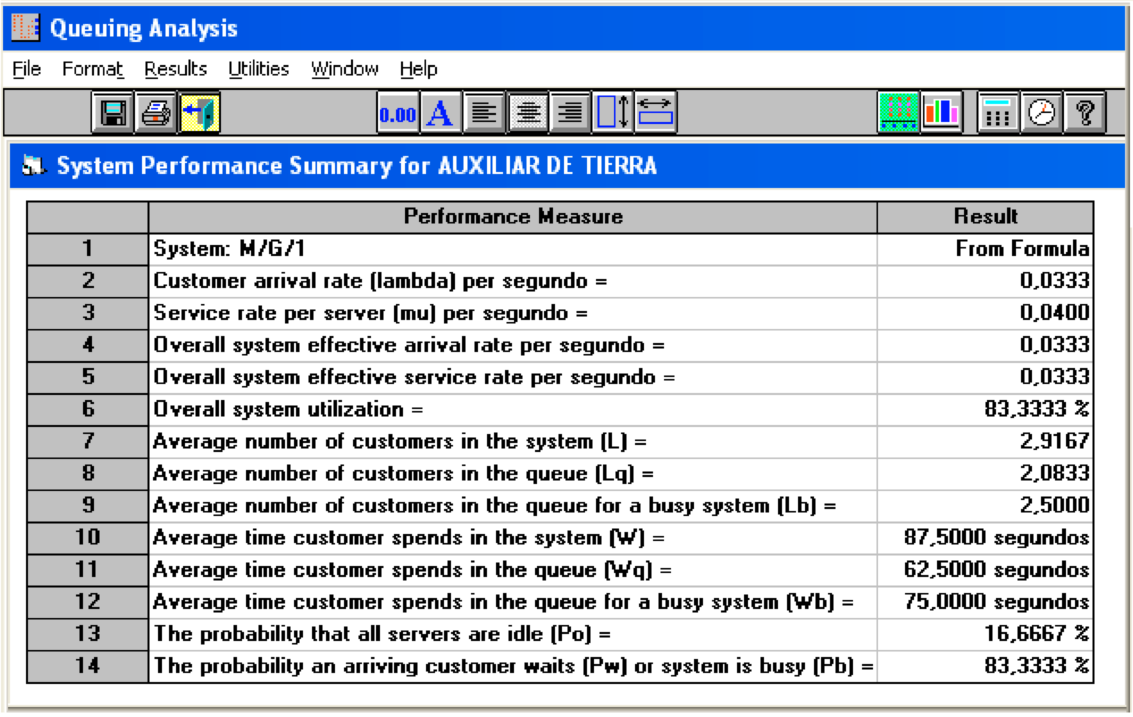
Auxiliar 2 de tierra: Modelo de cola M/G/1 con s = 1 servidor

Tasa de llegadas: $\dfrac{1}{\lambda_2} = 30 \;\rightarrow\; \lambda_2 = 0{,}0333$ pasajeros/segundo

Tasa de servicio: $\dfrac{1}{\mu_2} = 25 \;\rightarrow\; \mu_2 = \;0{,}04$ pasajeros/segundo , $\sigma_2 = 0$ segundos




| Data Description | ENTRY |
|---|---|
| Number of servers | 1 |
| Service time distribution (in segundo) | Normal |
| Mean (u) | 25 |
| Standard deviation (s>0) | 0 |
| (Not used) | |
| Service pressure coefficient | |
| Interarrival time distribution (in segundo) | Exponential |
| Location parameter (a) | 0 |
| Scale parameter (b>0) (b=mean if a=0) | 30 |
| (Not used) | |
| Arrival discourage coefficient | |
| Batch (bulk) size distribution | Constant |
| Constant value | 1 |
| (Not used) | |
| (Not used) | |
| Queue capacity (maximum waiting space) | M |
| Customer population | M |




| | Performance Measure | Result |
|---|---|---|
| 1 | System: M/G/1 | From Formula |
| 2 | Customer arrival rate (lambda) per segundo = | 0,0333 |
| 3 | Service rate per server (mu) per segundo = | 0,0400 |
| 4 | Overall system effective arrival rate per segundo = | 0,0333 |
| 5 | Overall system effective service rate per segundo = | 0,0333 |
| 6 | Overall system utilization = | 83,3333 % |
| 7 | Average number of customers in the system (L) = | 2,9167 |
| 8 | Average number of customers in the queue (Lq) = | 2,0833 |
| 9 | Average number of customers in the queue for a busy system (Lb) = | 2,5000 |
| 10 | Average time customer spends in the system (W) = | 87,5000 segundos |
| 11 | Average time customer spends in the queue (Wq) = | 62,5000 segundos |
| 12 | Average time customer spends in the queue for a busy system (Wb) = | 75,0000 segundos |
| 13 | The probability that all servers are idle (Po) = | 16,6667 % |
| 14 | The probability an arriving customer waits (Pw) or system is busy (Pb) = | 83,3333 % |

Factor de utilización: $\rho_2 = \dfrac{\lambda_2}{\mu_2} = \dfrac{0{,}0333}{0{,}04} = 0{,}8333$

Promedio de pasajeros en la cola: $L_{q2} = \dfrac{\lambda_2^2 \, . \, \sigma_2^2 \, + \, \rho_2^2}{2\left(1-\rho_2\right)} \;=\; \dfrac{0{,}0333^2 \text{ x } 0 + \; 0{,}8333^2}{2 \text{ x} \left(1-0{,}8333\right)} = 2{,}0833$ pasajeros

Tiempo promedio de espera en la cola: $W_{q2} = \dfrac{L_{q2}}{\lambda_2} = \dfrac{2{,}0833}{0{,}0333} = \; 62{,}50$ segundos

Tiempo total que pasa el pasajero en la cola: $W_{s2} = W_{q2} + \dfrac{1}{\mu_2} = 62,50 + \dfrac{1}{0,04} = 87,50$ segundos

Resulta más beneficioso contratar al primer auxiliar de tierra $(W_{s1} = 40,20 < W_{s2} = 87,50)$ al ser más rápido que el segundo.

La probabilidad de que el auxiliar 1 de tierra contratado se encuentre ocupado:

$$P(X \geq 1) = 1 - P_o = 1 - (1-\rho) = 1-(1-0,6666) = 0,6666$$

**System Probability Summary for AUXILIAR DE TIERRA**

| n | Estimated Probability of n Customers in the System | Cumulative Probability |
|---|---|---|
| 0 | 0,3333 | 0,3333 |
| 1 | 0,2222 | 0,5556 |
| 2 | 0,1481 | 0,7037 |
| 3 | 0,0988 | 0,8025 |
| 4 | 0,0658 | 0,8683 |
| 5 | 0,0439 | 0,9122 |
| 6 | 0,0293 | 0,9415 |
| 7 | 0,0195 | 0,9610 |
| 8 | 0,0130 | 0,9740 |
| 9 | 0,0087 | 0,9827 |
| 10 | 0,0058 | 0,9884 |
| 11 | 0,0039 | 0,9923 |
| 12 | 0,0026 | 0,9949 |
| 13 | 0,0017 | 0,9966 |
| 14 | 0,0011 | 0,9977 |
| 15 | 0,0008 | 0,9985 |
| 16 | 0,0005 | 0,9990 |
| 17 | 0,0003 | 0,9993 |
| 18 | 0,0002 | 0,9995 |
| 19 | 0,0002 | 0,9997 |
| 20 | 0,0001 | 0,9998 |
| 21 | 0,0001 | 0,9999 |
| 22 | 0,0000 | 0,9999 |
| 23 | 0,0000 | 0,9999 |
| 24 | 0,0000 | 1,0000 |

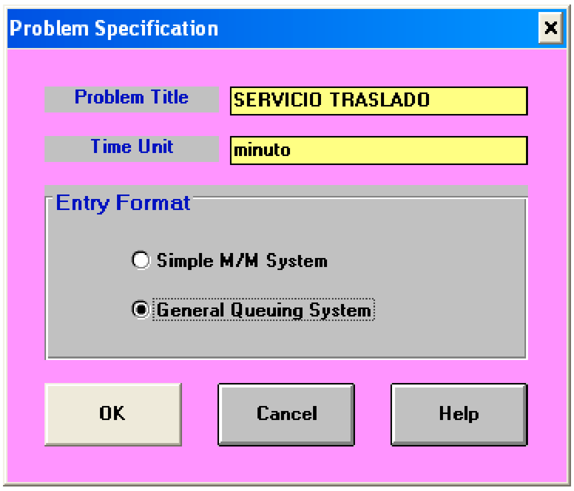
## COLA GENERAL - Cola M/D/1

El aeropuerto dispone de un servicio de traslado en el que consiste en llevar a cada empleado que lo solicite a su casa, hotel o alrededores.

Este servicio puede atender a un empleado cada 2 minutos. El promedio de llegada de empleados es cada 8 minutos, siguiendo una distribución de Poisson.

a) Encontrar las medidas de eficiencia del servicio.

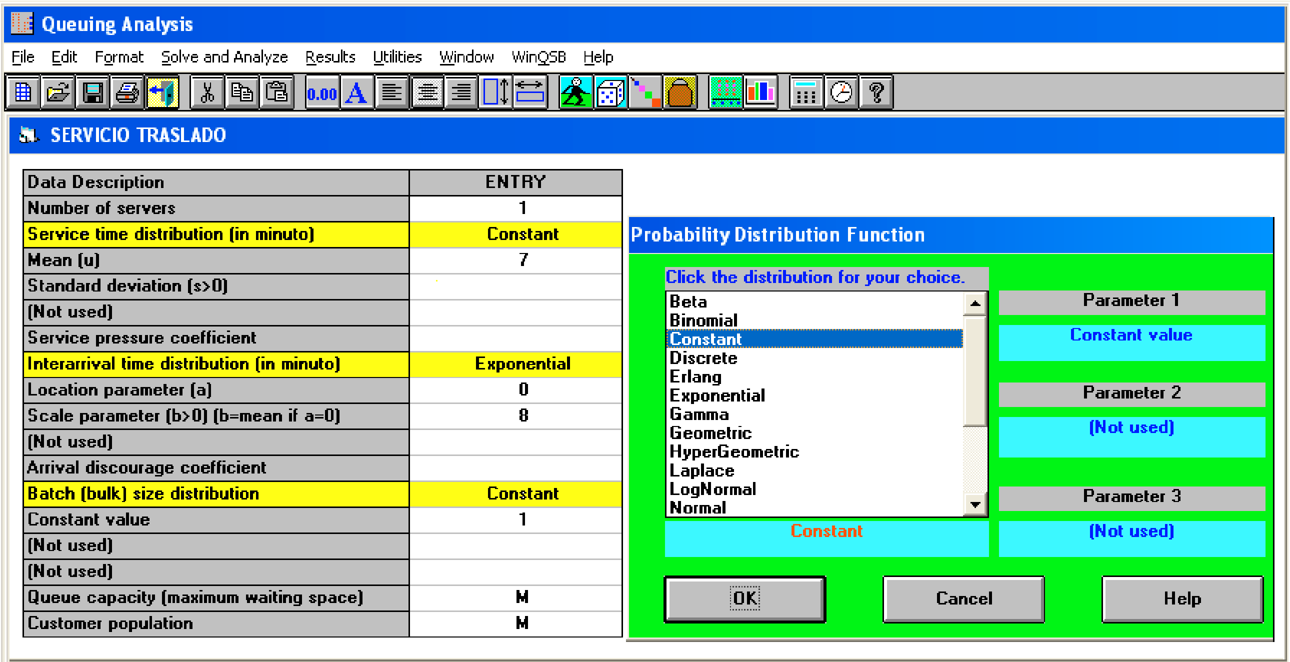
b) ¿Se podría mejorar el tiempo medio de un empleado en el sistema?



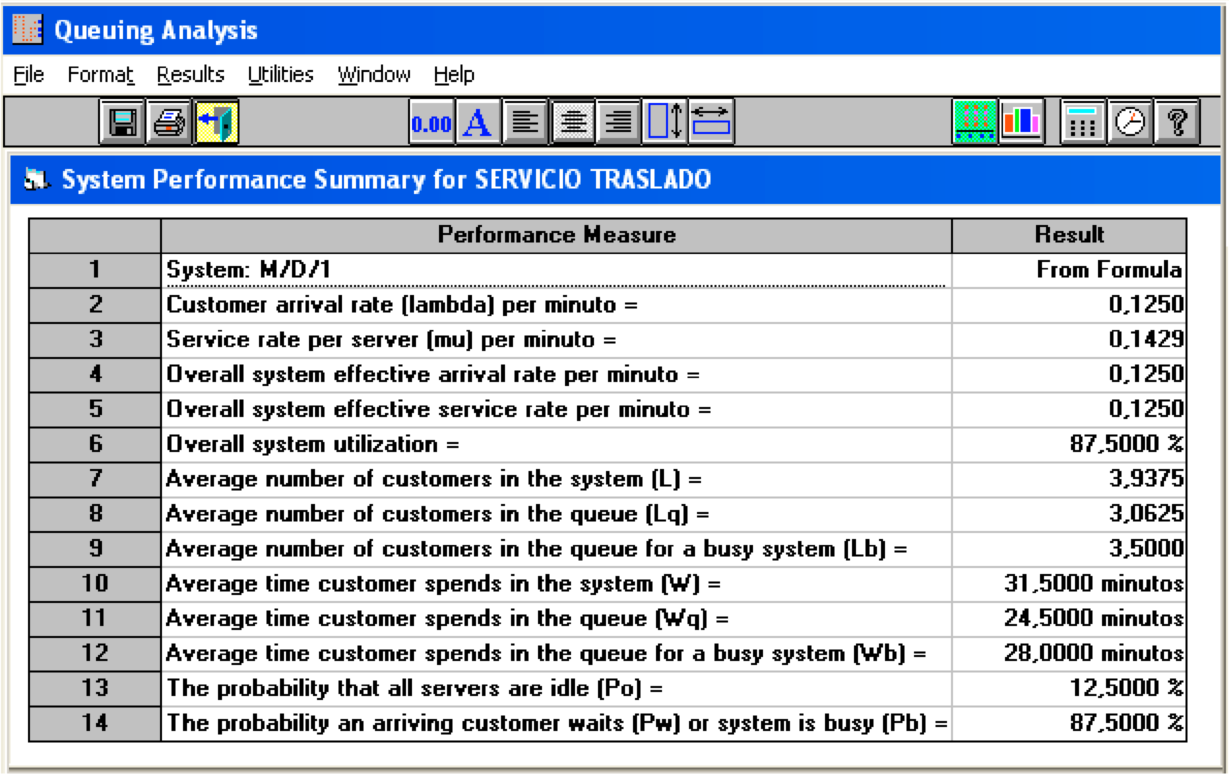

a) Se trata de un modelo de cola M/D/1 con $s = 1$ servidor

$$\text{Tasa de llegada} = \frac{1}{\lambda} = 8 \;\rightarrow\; \lambda = 0{,}125 \;\text{ pasajeros / minuto}$$

$$\text{Tasa de servicio} = \frac{1}{\mu} = 7 \;\rightarrow\; \mu = 0{,}1429 \;\text{ pasajeros / minuto}$$




| Data Description | ENTRY |
|---|---|
| Number of servers | 1 |
| Service time distribution (in minuto) | Constant |
| Mean (u) | 7 |
| Standard deviation (s>0) | |
| (Not used) | |
| Service pressure coefficient | |
| Interarrival time distribution (in minuto) | Exponential |
| Location parameter (a) | 0 |
| Scale parameter (b>0) (b=mean if a=0) | 8 |
| (Not used) | |
| Arrival discourage coefficient | |
| Batch (bulk) size distribution | Constant |
| Constant value | 1 |
| (Not used) | |
| (Not used) | |
| Queue capacity (maximum waiting space) | M |
| Customer population | M |




| | Performance Measure | Result |
|---|---|---|
| 1 | System: M/D/1 | From Formula |
| 2 | Customer arrival rate (lambda) per minuto = | 0,1250 |
| 3 | Service rate per server (mu) per minuto = | 0,1429 |
| 4 | Overall system effective arrival rate per minuto = | 0,1250 |
| 5 | Overall system effective service rate per minuto = | 0,1250 |
| 6 | Overall system utilization = | 87,5000 % |
| 7 | Average number of customers in the system (L) = | 3,9375 |
| 8 | Average number of customers in the queue (Lq) = | 3,0625 |
| 9 | Average number of customers in the queue for a busy system (Lb) = | 3,5000 |
| 10 | Average time customer spends in the system (W) = | 31,5000 minutos |
| 11 | Average time customer spends in the queue (Wq) = | 24,5000 minutos |
| 12 | Average time customer spends in the queue for a busy system (Wb) = | 28,0000 minutos |
| 13 | The probability that all servers are idle (Po) = | 12,5000 % |
| 14 | The probability an arriving customer waits (Pw) or system is busy (Pb) = | 87,5000 % |

Factor de utilización: $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} = \dfrac{0,1250}{0,1429} = 0,8750$

Promedio de empleados en la cola: $L_q = \dfrac{\rho^2}{2\,.\,(1-\rho)} = \dfrac{0,875^2}{2 \times (1-0,875)} = 3,062$ empleados

Promedio de empleados en el sistema: $L_s = L_q + \rho = 3,062 + 0,875 = 3,937$ empleados

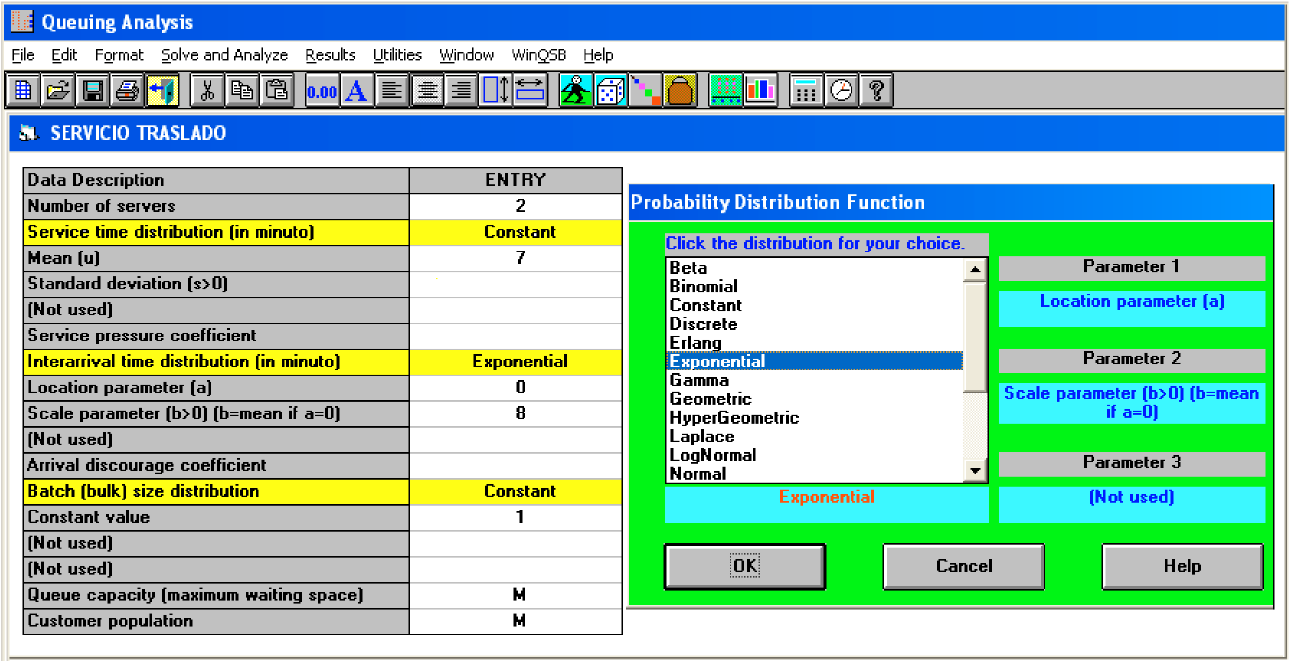
Tiempo promedio que un empleado espera en la cola: $W_q = \dfrac{L_q}{\lambda} = \dfrac{3,062}{0,125} = 24,500$ minutos

Tiempo promedio que los empleados están en la cola: $W_s = \dfrac{L_s}{\lambda} = \dfrac{3,937}{0,125} = 31,500$ minutos

b) En la situación actual, el factor de utilización $\rho$ es muy alto, sería necesario aumentar la capacidad del sistema para mejorar las medidas de eficiencia.

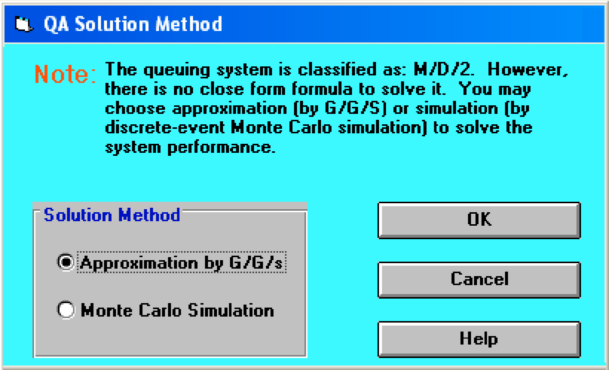
Si se añade un servidor más $(s = 2)$, el factor de utilización: $\rho = \dfrac{\lambda}{s\,.\,\mu} = \dfrac{0,125}{2 \times 0,1429} = 0,437$

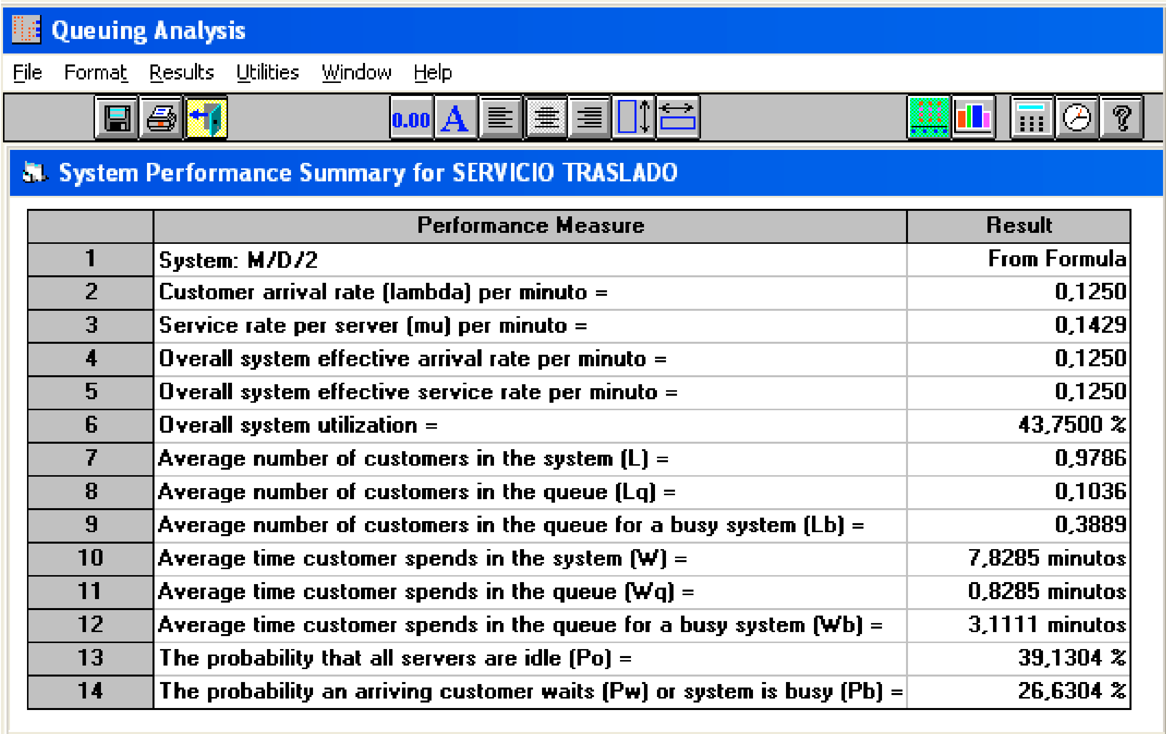
La red de transporte se encuentra más descongestionada. Se trataría de una cola M/D/2




| Data Description | ENTRY |
|---|---|
| Number of servers | 2 |
| Service time distribution (in minuto) | Constant |
| Mean (u) | 7 |
| Standard deviation (s>0) | |
| (Not used) | |
| Service pressure coefficient | |
| Interarrival time distribution (in minuto) | Exponential |
| Location parameter (a) | 0 |
| Scale parameter (b>0) (b=mean if a=0) | 8 |
| (Not used) | |
| Arrival discourage coefficient | |
| Batch (bulk) size distribution | Constant |
| Constant value | 1 |
| (Not used) | |
| (Not used) | |
| Queue capacity (maximum waiting space) | M |
| Customer population | M |

Calcula las medidas de rendimiento M/D/2 con una aproximación G/G/s




| | Performance Measure | Result |
|---|---|---|
| 1 | System: M/D/2 | From Formula |
| 2 | Customer arrival rate (lambda) per minuto = | 0,1250 |
| 3 | Service rate per server (mu) per minuto = | 0,1429 |
| 4 | Overall system effective arrival rate per minuto = | 0,1250 |
| 5 | Overall system effective service rate per minuto = | 0,1250 |
| 6 | Overall system utilization = | 43,7500 % |
| 7 | Average number of customers in the system (L) = | 0,9786 |
| 8 | Average number of customers in the queue (Lq) = | 0,1036 |
| 9 | Average number of customers in the queue for a busy system (Lb) = | 0,3889 |
| 10 | Average time customer spends in the system (W) = | 7,8285 minutos |
| 11 | Average time customer spends in the queue (Wq) = | 0,8285 minutos |
| 12 | Average time customer spends in the queue for a busy system (Wb) = | 3,1111 minutos |
| 13 | The probability that all servers are idle (Po) = | 39,1304 % |
| 14 | The probability an arriving customer waits (Pw) or system is busy (Pb) = | 26,6304 % |