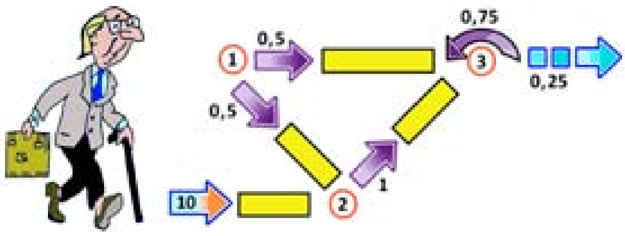


TEORÍA DE COLAS

- Series y Redes de Colas
- Sistema de Colas Tándem
- Redes de Jackson abiertas y cerradas

SERIES Y REDES DE COLAS

Una Red de Colas es un conjunto de nodos interconectados por medio de caminos. Cada uno de estos nodos está formado por un sistema de colas con unos o más servidores.

Estas colas están conectadas con líneas que operan de forma asíncrona y concurrente, es decir, no hay sincronismo entre entradas y salidas, y actúan simultáneamente.

Las Colas pueden estar conectadas entre ellas en serie o en tándem, donde el tráfico saliente de una cola es el tráfico entrante de la siguiente. También pueden aparecer bifurcaciones y fusiones de tráfico donde se divide el flujo de tráfico o se unen diversos flujos de tráfico.

Ejemplos de Redes de Colas son redes de ordenadores, líneas de producción en una fábrica, tráfico de vehículos en una ciudad.

ASESORÍA EMPRESARIAL COMO RED DE COLAS: Los clientes llegan y esperan a ser atendidos por el servicio de recepción, desde allí son derivados al servicio solicitado (contable, fiscal, etc.), allí esperan la cola correspondiente y una vez que son atendidos, tienen que hacer cola en un servicio de gestión de cobros.

Para decidir a qué cola se dirige un cliente que acaba de salir de una cola hay dos tipos de criterios:

Probabilístico: Se elige una ruta u otra en función de una probabilidad, pudiendo haber distintos tipos de clientes con distintas probabilidades.

Determinista: Cada clase de cliente se dirige a una cola fija.

La teoría de Redes de Colas contempla dos modelos:

a) Redes cerradas: No entran nuevos clientes y los clientes existentes nunca salen, esto es, el número de clientes es constante en el tiempo, como puede ser la reparación de máquinas.

b) Redes abiertas: Los clientes pueden entrar y salir del sistema. Es decir, cada flujo entra en el sistema por un punto en un momento dado y, después de pasar por unas o más colas, sale del sistema.

Considerando el número de unidades constante, pueden ser:

Acíclicas: Un cliente nunca puede volver a la misma cola.

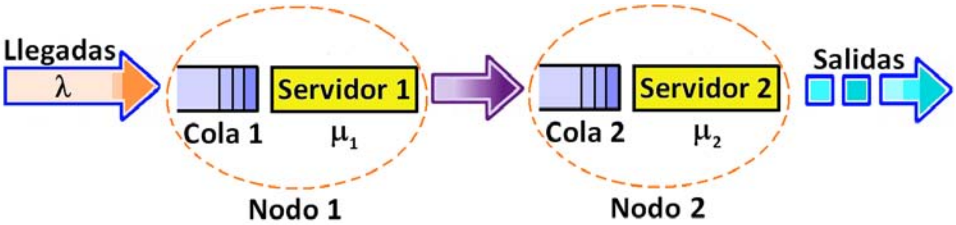
Cíclicas: Cuando hay bucles en la red.

SISTEMA DE COLAS TÁNDEM

También denominado sistema secuencial o en serie.

En un sistema de colas tándem un cliente debe visitar diversos servidores antes de completar el servicio requerido. Se utiliza para casos en los que el cliente llega de acuedo al proceso de Poisson y el tiempo de atención se distribuye exponencialmente en cada estación.

Se considera un ejemplo en el que los clientes llegan según un proceso de Poisson de parámetro λ, y pasan sucesivamente por dos colas en serie, respectivamente, con tasas de servicio μ_1 y μ_2



- El número de clientes de cada uno de los servidores es independiente del otro.
- Los tiempos de espera de un cliente en cada cola no son independientes.
- Los tiempos totales de espera (cola + servicio) son independientes.

El estado del sistema es un par (n, m) con *n* clientes en el nodo 1 y *m* clientes en el nodo 2.

Las *ecuaciones del balance o de equilibrio* (tasa de entrada debe de ser igual a la de salida), $n > 0, m > 0$, son:

Estado	Tasa entrada = Tasa salida
$(0,0)$	$\mu_2\, r_{0,1} = \lambda\, r_{0,0}$
$(n,0)$	$\lambda\, r_{n-1,0} + \mu_2\, r_{n,1} = (\lambda+\mu_1)\, r_{n,0}$
$(0,m)$	$\mu_1\, r_{1,m-1} + \mu_2\, r_{0,m+1} = (\lambda+\mu_2)\, r_{0,m}$
(n,m)	$\lambda\, r_{n-1,m} + \mu_1\, r_{n+1,m-1} + \mu_2\, r_{n,m+1} = (\lambda+\mu_1+\mu_2)\, r_{n,m}$

con $\sum_{n,m} r_{n,m} = 1$. Sea $\begin{cases} r_{n,0} \equiv \text{ probabilidad de } n \text{ clientes en el nodo 1} \\ r_{0,m} \equiv \text{ probabilidad de } m \text{ clientes en el nodo 2} \end{cases}$

El nodo 1 es un modelo de cola M/M/1 y, por el teorema de Burke, el nodo 2 también es un modelo de cola M/M/1. En consecuencia,

$$r_{n,0} = \left(\frac{\lambda}{\mu_1}\right)^n \left(1-\frac{\lambda}{\mu_1}\right) \qquad r_{0,m} = \left(\frac{\lambda}{\mu_2}\right)^m \left(1-\frac{\lambda}{\mu_2}\right)$$

Si los clientes en los nodos 1 y 2 son variables aleatorias independientes se verifica que $r_{n,m} = r_{n,0} \cdot r_{0,m}$, propiedad que verifica las ecuaciones de equilibrio.

En consecuencia, $r_{n,m} = r_{n,0} \cdot r_{0,m}$ es la solución estacionaria y el número de clientes en el nodo 1 es independiente del número de clientes en el nodo 2, lo que no implica que los tiempos de espera de un cliente en las dos colas sean independientes.
Sin embargo, los tiempos totales de espera (cola + servicio) son independientes.

El número medio de clientes en la red en tándem (serie o secuencial):

$$L_{red} = \sum_{n,m} (n+m)\, r_{n,m} = \sum_{n} n\, r_{n,0} + \sum_{m} m\, r_{0,m} = \frac{\lambda}{\mu_1 - \lambda} + \frac{\lambda}{\mu_2 - \lambda} = \sum_{i=1}^{2} \frac{\lambda}{\mu_i - \lambda}$$

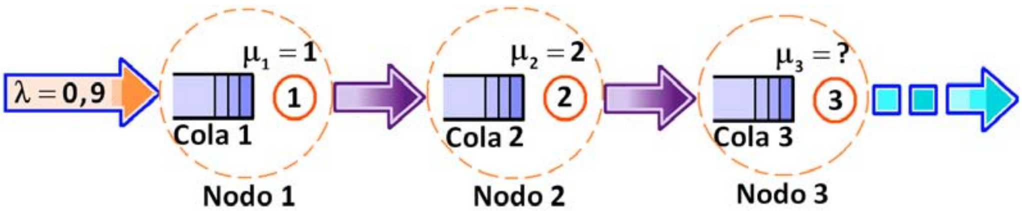
Tiempo medio de un cliente en la red (desde que entra hasta que sale): $W_{red} = \dfrac{L_{red}}{\lambda_{red}}$

Tiempo medio de un cliente en cola: $W_q = W_{red} - \left(\dfrac{1}{\mu_1} + \dfrac{1}{\mu_2} \right)$

Un autoservicio dispone de tres empleados, un camarero sirve el primer plato, el segundo camarero sirve el segundo plato y el tercero se encarga de la caja.
El primer camarero dispone de suficiente espacio para atender a clientes sin limitación, mientras que los otros dos camareros tienen un espacio limitado a dos personas como máximo. El autoservicio, modelado como red, muestra que la tasa media de llegada a la hora de la comida es de 54 clientes/hora, el pimer camarero tiene un tiempo medio de servicio de un minuto y el segundo camarero de treinta segundos. Se solicita:
a) Valor máximo del tiempo de servicio del tercer camarero para que su trabajo no interrumpa al de sus compañeros.
b) Longitud de las colas que forman el sistema.
c) Tiempo medio que un cliente pasa en el autoservicio desde que llega hasta que sale dispuesto para comer.

Solución:

Es un modelo de red de colas en tándem, con tres nodos (subsistemas), cada uno un modelo de cola M/M/1.



$$\lambda = 54 \text{ clientes/hora } = \frac{54}{60} = 0,9 \text{ clientes/minuto}$$

$$\frac{1}{\mu_1} = 1 \text{ minuto} \quad \to \quad \mu_1 = 1 \text{ minuto}$$

$$\frac{1}{\mu_2} = 30 \text{ segundos } = \frac{30}{60} = 0,5 \text{ minutos} \quad \to \quad \mu_2 = 2 \text{ minutos}$$

El factor de utilización o intensidad de tráfico $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} < 1$ para que la red no se sature y el estado sea estacionario.

$$\rho_1 = \frac{\lambda}{\mu_1} = \frac{0,9}{1} = 0,9 \qquad \rho_2 = \frac{\lambda}{\mu_2} = \frac{0,9}{2} = 0,45$$

a) Número promedio de clientes en cola: $L_q = \dfrac{\lambda^2}{\mu\,(\mu - \lambda)} = \dfrac{\rho^2}{(1-\rho)}$

Número máximo de clientes en cola nodo 3: $L_{q3} = \dfrac{\rho_3^2}{(1-\rho_3)} = 2$

$$\rho_3^2 + 2\rho_3 - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho_3 = 0{,}732 \quad \cancel{\rho_3 = -2{,}732}$$

Intensidad de tráfico nodo 3: $\rho_3 = \dfrac{0{,}9}{\mu_3} \quad \Rightarrow \quad \mu_3 = \dfrac{0{,}9}{0{,}732} = 1{,}2295$ minutos

b) $L_{q1} = \dfrac{\rho_1^2}{(1-\rho_1)} = \dfrac{0{,}9^2}{1-0{,}9} = 8{,}1$ clientes $\quad L_{q2} = \dfrac{\rho_2^2}{(1-\rho_2)} = \dfrac{0{,}45^2}{1-0{,}45} = 0{,}3682$ clientes

$L_{q3} = 2$ clientes

c) Tiempo promedio de estancia en sistema de cada nodo: $W_{si} = \dfrac{1}{\mu_i - \lambda}$

$W_{s1} = \dfrac{1}{1-0{,}9} = 10$ minutos $\qquad W_{s2} = \dfrac{1}{2-0{,}9} = 0{,}9091$ minutos

$W_{s3} = \dfrac{1}{1{,}2295-0{,}9} = 3{,}0350$ minutos

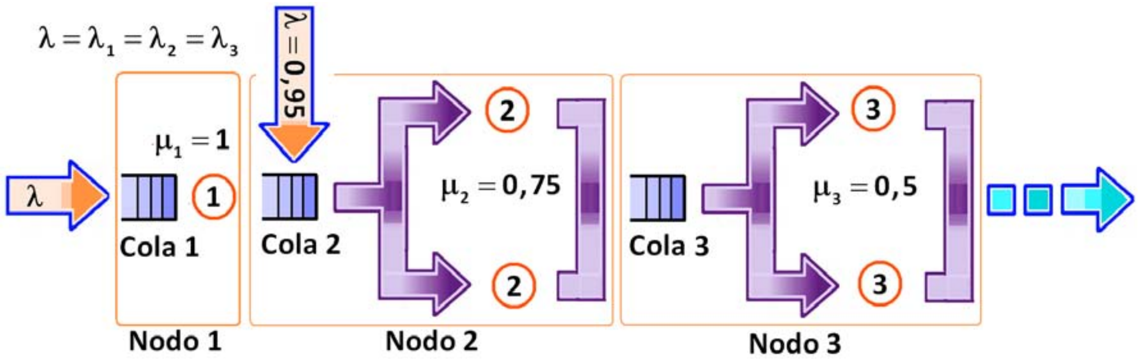
$$W_{si} = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{\mu_i - \lambda} = 10 + 0{,}9091 + 3{,}0350 = 13{,}9441 \text{ minutos}$$

🖫 Una empresa de ITV en una localidad dispone de una superficie que consta de tres partes: Una caseta donde los clientes entregan la documentación del vehículo y realizan el pago de tasas, con un espacio físico para un máximo de quince vehículos. Una nave formada por dos circuitos (equipamiento y personal técnico) para revisar los vehículos, con una tasa de servicio medio de 45 clientes /hora. Una oficina con dos puestos donde los conductores recogen la documentación y la ficha de la inspección técnica.
Acude a la nave una media de 57 clientes/hora, un mayor número de vehículos colapsaría el trabajo de la caseta, cuyo empleado atiende a un ritmo medio de 1 cliente/minuto; mientras que un oficinista tarda una media de 2 minutos/cliente.
Las llegadas siguen una Poisson y el tiempo de servicio exponencialmente. Se pide:

a) Longitud media de la cola de vehículos que habiendo pagado las tasas se encuentran esperando a la entrada de la nave.
b) Tiempo medio que un cliente pasa en la oficina.
c) Tiempo medio que un cliente se encuentra en la ITV
d) Para agilizar el proceso la empresa estudia la posibilidad de ampliar el número de servidores en la caseta o en la oficina. Suponiendo que el coste de ampliación en uno u otro lugar fuera equivalente, ¿qué criterio sería más acertado para que el tiempo de servicio del sistema fuera menor?

Solución:

a) La empresa de ITV se puede modelizar como una red de colas en tándem con tres nodos (subsistemas), el nodo 1 un modelo de cola M/M/1 y los nodos 2 y 3 un modelo de cola M/M/2



Nodo 1: $\lambda_1 \quad \mu_1 = 1$ cliente/minuto $\quad s_1 = 1$

Nodo 2: $s_2 = 2$

$\lambda_2 = 57$ clientes/h $= 0,95$ clientes/minuto $\quad \mu_2 = 45$ clientes/h $= 0,75$ clientes/minuto

Nodo 3: $s_3 = 2$

$\lambda_3 = 0,95$ clientes/minuto $\quad \dfrac{1}{\mu_3} = 2$ minutos/cliente $\rightarrow \mu_3 = 0,5$ cliente/minuto

Número promedio de clientes en cola 2: $L_{q2} = \dfrac{1}{s_2!}\left(\dfrac{\lambda_2}{\mu_2}\right)^{s_2} \dfrac{\rho_2}{(1-\rho_2)^2}\, p_{02}$

Factor de utilización o intensidad tráfico: $\rho_2 = \dfrac{\lambda_2}{s_2\,.\,\mu_2} = \dfrac{0,95}{2\,.\,0,75} = 0,633 < 1$ con lo que el nodo (subsistema) no se satura, existe un estado estacionario.

Utilización promedio del nodo (subsistema) 2: $u_{s2} = \dfrac{\lambda_2}{\mu_2} = \dfrac{0,95}{0,75} = 1,267$

Probabilidad de que ningún cliente se encuentre en la cola 2:

$$p_{02} = \frac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{s_2-1} \frac{(\lambda_2/\mu_2)^n}{n!} + \frac{(\lambda_2/\mu_2)^s}{s_2!}\left(\frac{s_2.\mu_2}{s_2.\mu_2-\lambda_2}\right)} = \frac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{1} \frac{(1,267)^n}{n!} + \frac{(1,267)^2}{2}\left(\frac{2\,.\,0,75}{2\,.\,0,75-0,95}\right)} =$$

$$= \frac{1}{1+1,267+2,189} = 0,224$$

por tanto, $L_{q2} = \dfrac{1}{2} \times 1,267^2 \times \dfrac{0,633}{(1-0,633)^2} \times 0,224 = 0,845$ clientes

Número promedio de clientes en el nodo 2 (cola + servicio): $L_{s2} = L_{q2} + \dfrac{\lambda_2}{\mu_2}$

$$L_{s2} = L_{q2} + \frac{\lambda_2}{\mu_2} = 0,845 + \frac{0,95}{0,75} = 2,112 \text{ clientes}$$

b) Tiempo promedio de estancia en nodo 3 (cola + servicio): $L_{s3} = L_{q3} + \dfrac{\lambda_3}{\mu_3}$

Factor de utilización o intensidad tráfico oficina: $\rho_3 = \dfrac{\lambda_3}{s_3\,.\,\mu_3} = \dfrac{0,95}{2\,.\,0,5} = 0,95 < 1$ con lo que la oficina (subsistema) no se satura, existe un estado estacionario.

En la práctica cuando el factor de utilización ρ se aproxima a 0,85 es necesario aumentar la capacidad del sistema (número servidores).

Utilización promedio de la oficina: $u_{s3} = \dfrac{\lambda_3}{\mu_3} = \dfrac{0,95}{0,5} = 1,9$

Probabilidad de que ningún cliente se encuentre en la cola de la oficina:

$$p_{03} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{1} \frac{(1,9)^n}{n!} + \frac{(1,9)^2}{2}\left(\frac{2\,.\,0,5}{2\,.\,0,5 - 0,95}\right)} = \frac{1}{1+1,9+36,1} = 0,026$$

Número promedio de clientes en cola de la oficina:

$$L_{q3} = \frac{1}{s_3!}\left(\frac{\lambda_3}{\mu_3}\right)^{s_3} \frac{\rho_3}{(1-\rho_3)^2}\, p_{03} = \frac{1}{2} \times 1,9^2 \times \frac{0,95}{(1-0,95)^2} \times 0,026 = 17,833 \text{ clientes}$$

Número promedio de clientes en el sistema de la oficina:

$$L_{s3} = L_{q3} + \frac{\lambda_3}{\mu_3} = 17,833 + \frac{0,95}{0,5} = 19,733 \text{ clientes}$$

Tiempo promedio de estancia en el sistema de la oficina (cola + servicio):

$$W_{s3} = \frac{L_{s3}}{\lambda_3} = \frac{19,733}{0,95} = 20,771 \text{ minutos}$$

c) El tiempo medio de un cliente en la ITV es la suma de los tiempos medios en los tres nodos (subsistemas): $W_i = \sum_{i=1}^{3} W_{si}$

- Tiempo promedio de estancia en nodo 1 (cola + servicio):

$$W_{s1} = \frac{1}{\mu_1 - \lambda_1} = \frac{1}{1-0,95} = 20 \text{ minutos}$$

La intensidad tráfico de la caseta: $\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1} = \frac{0,95}{1} = 0,95 < 1$

En la práctica cuando el factor de utilización ρ se aproxima a 0,85 es necesario aumentar la capacidad del sistema (número servidores).

- Tiempo promedio de estancia en nodo 2 (cola + servicio):

$$W_{s2} = \frac{L_{s2}}{\lambda_2} = \frac{2,112}{0,95} = 2,223 \text{ minutos}$$

- Tiempo promedio de estancia en nodo 3 (cola + servicio): $W_{s3} = 20,771$ minutos

$$W_i = \sum_{i=1}^{3} W_{si} = 20 + 2,223 + 20,771 = 43 \text{ minutos}$$

d) Atendiendo a la intensidad del tráfico, al ser mayor que 0,85, habría que aumentar la capacidad de los subsistemas (nodos) 1 y 3, es decir, habría que ñadir servidores.

- Al añadir un servidor al nodo 1 pasa de ser un modelo de cola M/M/1 a M/M/2, los datos: $\lambda_1 = 0{,}95$ clientes/minuto $\mu_1 = 1$ cliente/minuto $s_1 = 2$

Utilización promedio de la caseta: $u_{s1} = \dfrac{\lambda_1}{\mu_1} = \dfrac{0{,}95}{1} = 0{,}95$

Intensidad del tráfico de la caseta: $\rho_1 = \dfrac{\lambda_1}{s_1 \,.\, \mu_1} = \dfrac{0{,}95}{2\,.\,1} = 0{,}475$

Probabilidad de que ningún cliente se encuentre en la caseta:

$$p_{01} = \frac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{s_1-1} \frac{(\lambda_1/\mu_1)^n}{n!} + \frac{(\lambda_1/\mu_1)^s}{s_1!}\left(\frac{s_1.\mu_1}{s_1.\mu_1 - \lambda_1}\right)} = \frac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{1} \frac{0{,}95^n}{n!} + \frac{0{,}95^2}{2}\left(\frac{2}{2-0{,}95}\right)} =$$

$$= \frac{1}{1+0{,}95+0{,}859} = 0{,}356$$

Número promedio de clientes en la caseta:

$$L_{q1} = \frac{1}{s_1!}\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^{s_1} \frac{\rho_1}{(1-\rho_1)^2}\, p_{01} = \frac{1}{2} \times 0{,}95^2 \times \frac{0{,}475}{(1-0{,}475)^2} \times 0{,}356 = 0{,}2768$$

Número promedio de clientes en el sistema de la caseta:

$$L_{s1} = L_{q1} + \frac{\lambda_1}{\mu_1} = 0{,}2768 + 0{,}95 = 1{,}2268 \text{ clientes}$$

Tiempo promedio de estancia en el sistema de la caseta (cola + servicio):

$$W_{s1} = \frac{L_{s1}}{\lambda_1} = \frac{1{,}2268}{0{,}95} = 1{,}2914 \text{ minutos}$$

Tiempo ganado de respuesta: $20 - 1{,}2914 = 18{,}7086$ minutos

- Al añadir un servidor al nodo 3 pasa de ser un modelo de cola M/M/2 a M/M/3, los datos: $\lambda_3 = 0{,}95$ clientes/minuto $\mu_3 = 0{,}5$ cliente/minuto $s_3 = 3$

Utilización promedio de la oficina: $u_{s3} = \dfrac{\lambda_3}{\mu_3} = \dfrac{0{,}95}{0{,}5} = 1{,}9$

Intensidad del tráfico de la oficina: $\rho_3 = \dfrac{\lambda_3}{s_3 \,.\, \mu_3} = \dfrac{0{,}95}{3\,.\,0{,}5} = 0{,}633$

Probabilidad de que ningún cliente se encuentre en la oficina:

$$p_{03}=\frac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{s_3-1}\frac{(\lambda_3/\mu_3)^n}{n!}+\frac{(\lambda_3/\mu_3)^s}{s_3!}\left(\frac{s_3.\mu_3}{s_3.\mu_3-\lambda_3}\right)}=\frac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{2}\frac{1,9^n}{n!}+\frac{1,9^3}{6}\left(\frac{3\times 0,5}{3\times 0,5-0,95}\right)}=$$

$$=\frac{1}{1+1,9+\dfrac{1,9^2}{2}+3,1177}=0,1278$$

Número promedio de clientes en la oficina:

$$L_{q3}=\frac{1}{s_3!}\left(\frac{\lambda_3}{\mu_3}\right)^{s_3}\frac{\rho_3}{(1-\rho_3)^2}\,p_{03}=\frac{1}{6}\times 1,9^3\times\frac{0,633}{(1-0,633)^2}\times 0,1278=0,6866$$

Número promedio de clientes en el sistema de la oficina:

$$L_{s3}=L_{q3}+\frac{\lambda_3}{\mu_3}=0,6866+1,9=2,5866 \text{ clientes}$$

Tiempo promedio de estancia en el sistema de la oficina (cola + servicio):

$$W_{s3}=\frac{L_{s3}}{\lambda_3}=\frac{2,5866}{0,95}=2,7227 \text{ minutos}$$

Tiempo ganado de respuesta: $20,771-2,7227=18,0483$ minutos

Instalando dos servidores en la caseta, el tiempo promedio en pasar la inspección:

$$W_i=\sum_{i=1}^{3}W_{si}=1,291+2,223+20,771=24,285 \text{ minutos}$$

REDES DE JACKSON ABIERTAS

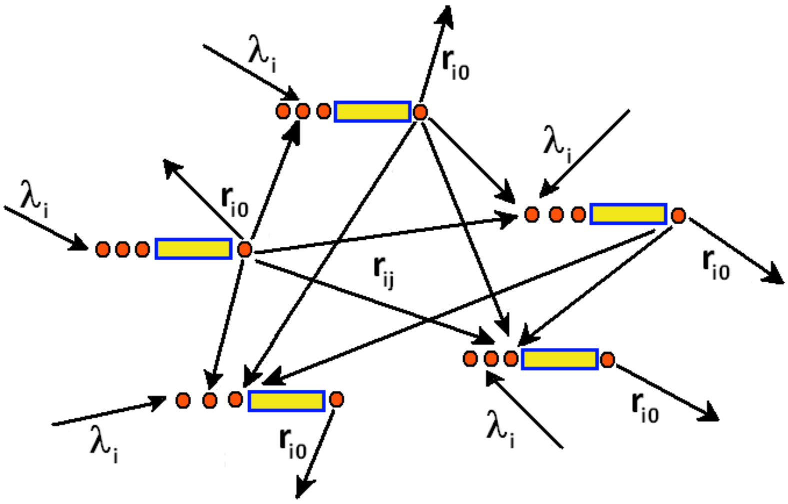
Son redes con k nodos que contemplan la posibilidad de entrada de clientes desde el exterior.

Las redes abiertas verifican tres propiedades:

a) La llegada de clientes al nodo i desde fuera del sistema sigue un proceso de Poisson de parámetro o tasa λ_i. También pueden llegar clientes al nodo i desde otros nodos de dentro de la red.

b) Cada nodo i consiste en s_i servidores, cada uno con tiempo de servicio exponencial de parámetro μ_i

c) El cliente una vez servido en el nodo i pasa (instantáneamente) a nodo j $j = 1, 2, \ldots, k$ con probabilidad r_{ij} o abandona la red con probabilidad r_{i0}



Dado que el flujo total de entrada a un nodo i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ debe ser igual al flujo total de salida del nodo, se obtiene las denominadas ecuaciones de tráfico o ecuaciones de equilibrio:

$$\Lambda_i = \lambda_i + \sum_{j=1}^{k} \Lambda_j r_{ji}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Llegadas nodo i} \\ \text{fuera y dentro sistema} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Llegadas nodo i} \\ \text{desde fuera del sistema} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{Llegadas nodo i} \\ \text{desde dentro del sistema} \end{pmatrix}$$

Las ecuaciones de los Λ_i son intuitivas:

$\Lambda_i \equiv$ Tasa de llegadas al nodo i desde fuera y dentro del sistema

$\lambda_i \equiv$ Tasa de llegadas al nodo i desde fuera del sistema

$\Lambda_j r_{ji} \equiv$ Tasa de llegada al nodo i que salen del nodo j

Las k ecuaciones anteriores forman un sistema lineal con solución única, que se resuelve para hallar las tasas de llegada a cada nodo Λ_i

En forma matricial $\left(\vec{\Lambda} = \vec{\lambda} + \vec{\Lambda}\, r\right)$: $\begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \\ \vdots \\ \Lambda_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_{11} & r_{21} & \cdots & r_{k1} \\ r_{12} & r_{22} & \cdots & r_{k2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{1k} & r_{2k} & \cdots & r_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \\ \vdots \\ \Lambda_k \end{pmatrix}$

La solución $\vec{\Lambda} = (I - r)^{-1}\vec{\lambda}$ proporciona las tasas totales de llegada a cada subsistema (venga de fuera o de otro nodo).

El teorema de Jackson indica que las redes con realimentación son tales que los nodos se comportan como si fueran alimentados totalmente por llegadas de Poisson, aunque en realidad no sea así.

Las probabilidades estacionarias en cada nodo son las de un modelo M/M/s, incluso aunque el modelo no sea un modelo M/M/s. Los estados n_i de los nodos individuales son variables aleatorias independientes.

Para que ninguna de las colas del sistema se sature, es preciso que se cumpla la condición: $\rho_i = \dfrac{\Lambda_i}{s_i\,\mu_i} \qquad \rho_i < 1 \quad \forall i = 1, 2, \ldots, k$

condición de no saturación del modelo M|M|s, aplicada a cada uno de los nodos por separado.

La probabilidad de que en el estado estacionario haya n_1 clientes en el nodo 1, n_2 clientes en el nodo 2, ... ,

$$p_{n_1\, n_2\, \ldots\, n_r} = \prod_{i=1}^{k} \frac{r_i^{n_i}}{a_i(n_i)}\, p_{0i} \qquad r_i = \frac{\Lambda_i}{\mu_i} \qquad a(n_i) = \begin{cases} n_i! & n_i < s_i \\ s_i^{(n_i - s_i)}\, s_i & n_i \geq s_i \end{cases} \qquad \frac{p_{0i}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{r_i^{n_i}}{a_i(n_i)}\, p_{0i}} = 1$$

concretamente si $s_i = 1 \quad \forall i = 1, 2, \ldots, k$

$$p_{n_1\, n_2\, \ldots\, n_k} = (1 - \rho_1)\, \rho_1^{n_1}\; (1 - \rho_2)\, \rho_2^{n_2}\; \ldots\; (1 - \rho_k)\, \rho_k^{n_k}$$

Las medidas de rendimiento para cada nodo se calculan según las ecuaciones del modelo M|M|s, teniendo las siguientes consideraciones:

En una red Jackson abierta que cumple la condición de no saturación, en estado estacionario, la distribución del número de clientes en cada nodo es:

$$p(n) = \prod_{i=1}^{k} p_i(n_i) \quad \forall n_1, \ldots, n_k \geq 0$$

$p_i(n_i) \equiv$ probabilidad de que haya n_i clientes en el nodo i

$\lambda_{red} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \equiv$ Número de llegadas que entran en la red por unidad de tiempo desde fuera del sitema.

$\Lambda_{red} \equiv$ Tasa global de salidas del sistema, número promedio de clientes que salen del sistema por unidad de tiempo, que coincide con el número de clientes que entran desde dentro sistema: $\Lambda_{red} = \sum_{i=1}^{k} \Lambda_i$

$L_{red} \equiv$ Número medio de clientes en el sistema (cola + servicio), suma del número medio de clientes en cada uno de los nodos: $L_{red} = \sum_{i=1}^{k} L_{si}$

El hecho de que los nodos se comporten como si fueran modelo M/M/s podría interpretarse que se puede utilizar las distribuciones de los tiempos de espera de estos modelos, Sin embargo, esto no es necesariamente cierto en las redes de Jackson, donde se permite la realimentación.

$W_{red} \equiv$ Tiempo medio en el sistema, tiempo medio que un cliente pasa desde que entra en la red hasta que sale de ella: $W_{red} = \dfrac{L_{red}}{\Lambda_{red}}$

$V_i \equiv$ Número medio que un cliente visita el nodo i, número medio de veces que un cliente visita el nodo i desde que entra en la red hasta que sale:

$$V_i = \frac{\Lambda_i}{\Lambda_{red}} \quad \forall i = 1, 2, \ldots, k$$

<u>SUPUESTOS CONSIDERADOS</u>

* Capacidad infinita en los nodos.
* Efecto Bloqueo: Si un cliente ha finalizado su servicio en el nodo i y se dirige a un nodo j que está al máximo de su capacidad. El sistema se bloquea con tres posbilidades:
  (a) Las llegadas al nodo i se rechazan.
  (b) El cliente debe ir inmediatamente a otro nodo en su lugar.
  (c) El cliente debe abandonar el sistema.

MEDIDAS DE RENDIMIENTIO DE NODOS COLA M/M/1

Factor de saturación nodo i: $\rho_i = \dfrac{\Lambda_i}{\mu_i} < 1 \qquad i = 1, 2, \ldots,$

Número medio de clientes en cola (nodo i): $L_{qi} = \dfrac{\Lambda_i^2}{\mu_i\,(\mu_i - \Lambda_i)}$

Número medio de clientes en el sistema (nodo i): $L_{si} = \dfrac{\rho_i}{1-\rho_i} = \dfrac{\Lambda_i}{\mu_i - \Lambda_i}$

Tiempo medio espera en cola de nodo i: $W_{qi} = \dfrac{L_{qi}}{\Lambda_i} = \dfrac{\Lambda_i}{\mu_i\,(\mu_i - \Lambda_i)} \quad \left(W_{si} = W_{qi} + \dfrac{1}{\mu_i} \right)$

Tiempo medio de espera en cada nodo (subsistema): $W_{si} = \dfrac{L_{si}}{\Lambda_i} = \dfrac{1}{\mu_i - \Lambda_i}$

MEDIDAS DE RENDIMIENTIO DE NODOS COLA M/M/s

Factor de saturación nodo i:

$$\rho_i = \frac{\Lambda_i}{s_i\,\mu_i} \quad \begin{cases} \lambda_i \equiv \text{Tasa de llegadas de procesos al nodo i} \\ \Lambda_i \equiv \text{Tasa de procesos que salen del nodo i (Tasas totales llegadas)} \end{cases}$$

Utilización promedio del nodo i: $u_{si} = \dfrac{\Lambda_i}{\mu_i}$

La probabilidad que ningún cliente se encuentre en el sistema de cola nodo i:

$$p_{0i} = \frac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{s_i-1} \frac{(\Lambda_i/\mu_i)^n}{n!} + \frac{1}{s_i!}\left(\frac{\Lambda_i}{\mu_i}\right)^{s_i} \frac{1}{1-\rho_i}}$$

Número medio de clientes en cola del nodo 1: $L_{qi} = \dfrac{1}{s_i!}\left(\dfrac{\Lambda_i}{\mu_i}\right)^{s_i} \dfrac{\rho_i}{(1-\rho_i)^2}\, p_{0i}$

Número medio de clientes en el sistema (nodo i): $L_{si} = L_{qi} + \dfrac{\Lambda_i}{\mu_i} \qquad L_{si} = \Lambda_i\, W_{si}$

Tasa total de llegadas desde exterior: $\lambda_{red} = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \lambda_i$

Número medio de clientes en la red: $L_{red} = \displaystyle\sum_{i=1}^{s} L_i$

Tasa global de salidas del sistema: $\Lambda_{red} = \sum_{i=1}^{k} \Lambda_i$

Tiempo promedio en la red: $W_{red} = \dfrac{L_{red}}{\Lambda_{red}}$

Número medio de clientes que visitan un nodo: $V_i = \dfrac{\Lambda_i}{\Lambda_{red}} \quad \forall i = 1, 2, \dots , k$

RED CÍCLICA Y ACÍCLICA: Una red es acíclica se no contiene ciclos (lazos), en caso contrario es cíclica. En una red acíclica cada cliente tiene que visitar cada nodo a lo sumo una vez, es decir, $V_i \leq 1 \ \ \forall i = 1, 2, \dots , k$

Los servidores de dos terminales del aeropuerto de Madrid, según una disciplina FIFO, según un proceso de Poisson reciben respectivamente 20 y 30 procesos de usuarios por minuto. El servidor de la primera terminal tiene capacidad para atender una media de cien procesos por minuto, mientras que cualquiera de los dos procesadores del servidor de la segunda terminal puede atender a veinticinco procesos, con tiempo de procesado exponenciales.
Cuando un proceso está a punto de finalizar en el servidor de la segunda terminal crea un nuevo proceso hijo en el servidor de la primera terminal el 25% de los casos, en otro caso termina totalmente su ejecución.
Por otra parte, los procesos que se encuentran a punto de finalizar en el servidor de la primera terminal crean un nuevo proceso en su servidor el 20% de los casos, en caso contrario cuando terminan su ejecución envían otro proceso al servidor de la segunda terminal un 10% de las veces.
Se necesita conocer:

a) El número medio de procesos en cada servidor.
b) Número medio que un proceso visita cada nodo.
c) Tiempo medio que tarda un proceso en la red.

Solución:

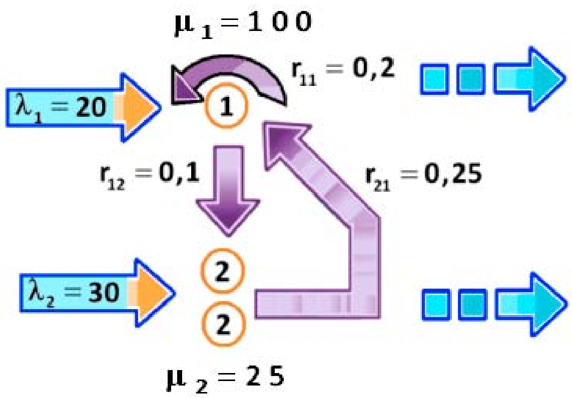
a) Es una red de Jackson cíclica abierta con $K = 2$ nodos.

Nodo 1 con un servidor $s_1 = 1$

Nodo 2 con dos servidores $s_2 = 2$

Tasas de llegada y servicio (procesos/ minuto) desde fuera del sistema son:

$\lambda_1 = 20 \quad \lambda_2 = 30 \quad \mu_1 = 100 \quad \mu_2 = 25$



Ecuaciones de tráfico o ecuaciones de equilibrio: $\Lambda_i = \lambda_i + \sum_{j=1}^{2} \Lambda_j r_{ji}$

$\Lambda_i \equiv$ Tasa de llegadas de procesos al nodo i desde fuera y dentro del sistema

$\lambda_i \equiv$ Tasa de llegadas de procesos al nodo i desde fuera del sistema

$\Lambda_j \equiv$ Tasa de procesos que salen del nodo j

$\Lambda_j r_{ji} \equiv$ Tasa de procesos que llegan al nodo i desde el nodo j

En forma matricial $\left(\vec{\Lambda} = \vec{\lambda} + \vec{\Lambda} r\right)$: $\begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_{11} & r_{21} \\ r_{12} & r_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \end{pmatrix}$

Las probabilidades de transición de unos estados a otros se reflejan en la matriz:

$$r_{ij} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} T1 & T2 \end{array} \\ \begin{array}{c} T1 \\ T2 \end{array} & \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,25 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \rightarrow (r_{ij})^t = r_{ji} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,25 \\ 0,1 & 0 \end{pmatrix}$$

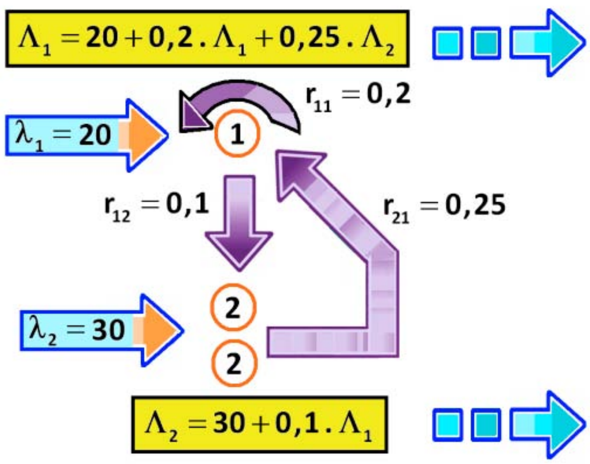
$$\begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,2 & 0,25 \\ 0,1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \Lambda_1 = 20 + 0,2\,.\,\Lambda_1 + 0,25\,.\,\Lambda_2 \\ \Lambda_2 = 30 + 0,1\,.\,\Lambda_1 \end{cases}$$

$$\Lambda_1 = 35,484 \quad \Lambda_2 = 33,548$$

$$\lambda_{red} = \sum_{i=1}^{2} \lambda_i = 20 + 30 = 50$$

Las ecuaciones de los Λ_i son intuitivas



En cada nodo el flujo de entrada debe ser igual al flujo de salida.

La tasa global de salidas del sistema coincide con el número de procesos que entran en el sistema:

$$\Lambda_{red} = \sum_{i=1}^{2} \Lambda_i = 35,484 + 33,548 = 69,032$$

La condición de no saturación aplicada a cada uno de los nodos por separado es

$$\rho_i = \frac{\Lambda_i}{s_i\,\mu_i} \qquad \rho_i < 1 \quad \forall i = 1, 2, \ldots \qquad \begin{cases} \lambda_i \equiv \text{Tasa de llegadas de procesos al nodo i} \\ \Lambda_i \equiv \text{Tasa total de procesos que llegan al nodo i} \end{cases}$$

Nodo 1: $\rho_1 = \dfrac{35,484}{100\,.\,1} = 0,35484 < 1 \qquad s_1 = 1$ servidor

Nodo 2: $\rho_2 = \dfrac{33,548}{25\,.\,2} = 0,67096 < 1 \qquad s_2 = 2$ servidores

En consecuencia, ambos servidores son estacionarios.

- Terminal 1 es una cola tipo M/M/1

Número medio de procesos en el sistema (cola + servicio): $L_{si}=\dfrac{\rho_i}{1-\rho_i}=\dfrac{\Lambda_i}{\mu_i-\Lambda_i}$

$$L_{s1}=\frac{\rho_1}{1-\rho_1}=\frac{0,35484}{1-0,35484}=0,55$$

Tiempo promedio de estancia en el sistema (cola + servicio): $W_{si}=\dfrac{L_{si}}{\Lambda_i}=\dfrac{1}{\mu_i-\Lambda_i}$

$$W_{s1}=\frac{L_{s1}}{\Lambda_1}=\frac{0,55}{35,484}=0,0155 \text{ minutos } =0,93 \text{ segundos}$$

- Terminal 2 es una cola tipo M/M/s

La probabilidad que ningún proceso se encuentre en el sistema de cola:

$$p_{02}=\frac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{1}\frac{(\Lambda_2/\mu_2)^n}{n!}+\frac{1}{s_2!}\left(\frac{\Lambda_2}{\mu_2}\right)^{s_2}\frac{1}{1-\rho_2}}=\frac{1}{1+\dfrac{33,548}{25}+\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{33,548}{25}\right)^2\cdot\left(\dfrac{1}{1-0,67096}\right)}=$$
$$=0,1969167$$

Número medio de procesos en cola de la terminal:

$$L_{q2}=\frac{1}{s_2!}\left(\frac{\Lambda_2}{\mu_2}\right)^{s_2}\frac{\rho_2}{(1-\rho_2)^2}\,p_{02}=\frac{1}{2!}\text{x}\left(\frac{33,548}{25}\right)^2\text{ x }\frac{0,67096}{(1-0,67096)^2}\text{x}0,1969167=1,0988$$

Número medio de procesos en el sistema (cola + servicio): $L_{si}=L_{q\,i}+\dfrac{\Lambda_i}{\mu_i}\qquad L_{si}=\Lambda_i\,W_{si}$

En consecuencia, $L_{s2}=L_{q2}+\dfrac{\Lambda_2}{\mu_2}=1,0988+\dfrac{33,548}{25}=2,44072$

Número medio de procesos en la red: $L_{red}=\displaystyle\sum_{i=1}^{k}L_s=\sum_{i=1}^{2}L_i=0,55+2,44072=2,9907$

b) Número medio que un proceso visita cada nodo, desde que entra en la red hasta que sale: $V_i=\dfrac{\Lambda_i}{\Lambda_{red}}\quad \forall i=1,2,\dots,k$

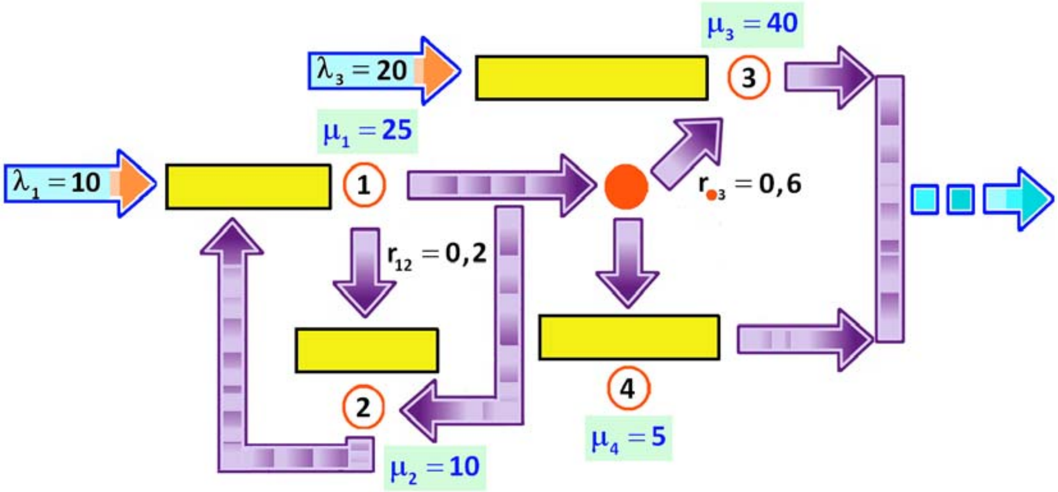
$$V_1=\frac{\Lambda_1}{\Lambda_{red}}=\frac{35,484}{69,032}=0,514 \text{ veces/minuto}$$

$$V_2=\frac{\Lambda_2}{\Lambda_{red}}=\frac{33,548}{69,032}=0,486 \text{ veces/minuto}$$

c) Tiempo medio de un proceso en la red (desde que entra hasta que sale):

$$W_{red} = \frac{L_{red}}{\Lambda_{red}} = \frac{2,9907}{69,032} = 0,04332 \ \text{ minutos} = 3 \text{ segundos}$$

🖫 El esquema presenta una red abierta con cuatro nodos, cada uno de ellos con un procesador. Determinar:

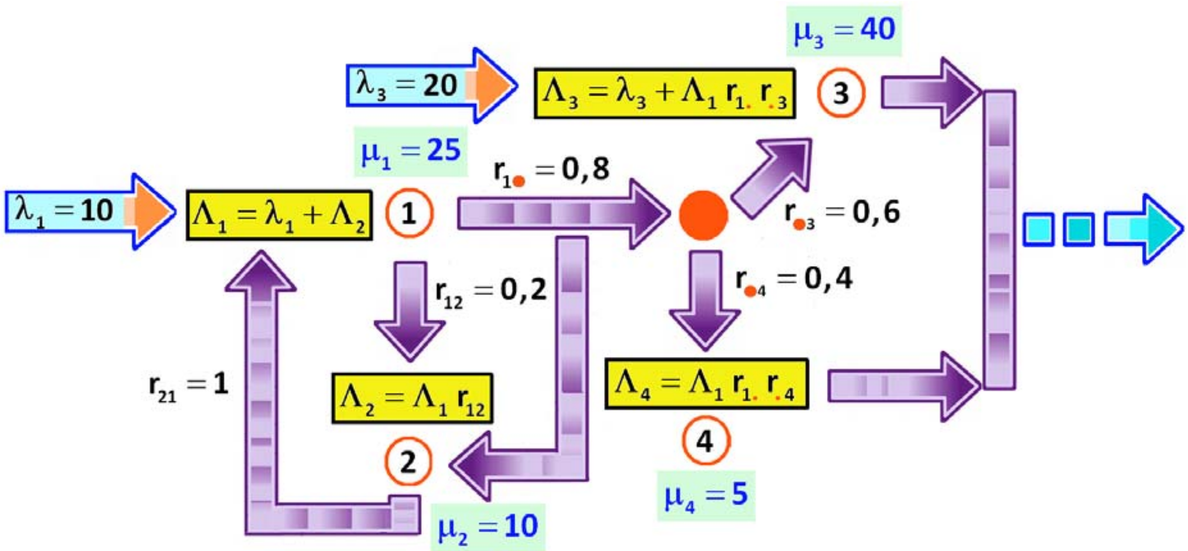


a) Tiempo medio de trabajos que permanecen en la red.

b) Con un tiempo de servicio exponencial $\mu_3 = 16$ calcula el número mínimo de procesadores en el nodo 3 para que la red presente estado estacionario. En este caso, ¿cuál sería el tiempo medio de permanencia de un trabajo en la red?

Solución:

a) De la gráfica se deduce: $r_{1\bullet} = 0,8$, $r_{\bullet 4} = 0,4$, $r_{21} = 1$, $\lambda_{red} = \sum_{i=1}^{2} \lambda_i = 30$



En cada nodo el flujo de entrada debe ser igual al flujo de salida.

$\lambda_i \equiv$ Tasa de llegadas al nodo i $\qquad \Lambda_i \equiv$ Tasa de salidas del nodo i

$r_{13} = r_{1\bullet} \, . \, r_{\bullet 3} = 0,8 \, . \, 0,6 = 0,48 \qquad r_{14} = r_{1\bullet} \, . \, r_{\bullet 4} = 0,8 \, . \, 0,4 = 0,32$

Las ecuaciones de equilibrio son intuitivas:

$$\begin{cases}\Lambda_1=\lambda_1+\Lambda_2\\ \Lambda_2=\Lambda_1\, r_{12}\\ \Lambda_3=\lambda_3+\Lambda_1\, r_{1\bullet}\; r_{\bullet 3}\\ \Lambda_4=\Lambda_1\, r_{1\bullet}\; r_{\bullet 4}\end{cases} \rightarrow \begin{cases}\Lambda_1=10+\Lambda_2\\ \Lambda_2=0,2\,.\,\Lambda_1\\ \Lambda_3=20+0,8\,.\,0,6\,.\,\Lambda_1\\ \Lambda_4=0,8\,.\,0,4\,.\,\Lambda_1\end{cases} \rightarrow \begin{cases}\Lambda_1=10+\Lambda_2\\ \Lambda_2=0,2\,.\,\Lambda_1\\ \Lambda_3=20+0,48\,.\,\Lambda_1\\ \Lambda_4=0,32\,.\,\Lambda_1\end{cases}$$

de donde: $\Lambda_1=12,5 \quad \Lambda_2=2,5 \quad \Lambda_3=26 \quad \Lambda_4=4$

$$\Lambda_{red}=\sum_{i=1}^{4}\Lambda_i=12,5+2,5+26+4=45$$

Ecuaciones de tráfico o ecuaciones de eqilibrio en forma matricial:
$$\begin{pmatrix}\Lambda_1\\ \Lambda_2\\ \Lambda_3\\ \Lambda_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\\ \lambda_4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}r_{11} & r_{21} & r_{31} & r_{41}\\ r_{12} & r_{22} & r_{32} & r_{42}\\ r_{13} & r_{23} & r_{33} & r_{43}\\ r_{14} & r_{24} & r_{34} & r_{44}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Lambda_1\\ \Lambda_2\\ \Lambda_3\\ \Lambda_4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\Lambda_1\\ \Lambda_2\\ \Lambda_3\\ \Lambda_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\ 0\\ 20\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0,2 & 0 & 0 & 0\\ 0,8\,.\,0,6 & 0 & 0 & 0\\ 0,8\,.\,0,4 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Lambda_1\\ \Lambda_2\\ \Lambda_3\\ \Lambda_4\end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases}\Lambda_1=10+\Lambda_2\\ \Lambda_2=0,2\,.\,\Lambda_1\\ \Lambda_3=20+0,8\,.\,0,6\,.\,\Lambda_1\\ \Lambda_4=0,8\,.\,0,4\,.\,\Lambda_1\end{cases}$$

Tiempo medio de clientes en la red: $W_{red}=\dfrac{L_{red}}{\Lambda_{red}}$

Para que la red no se sature en cada nodo (subsistema): $\rho_i=\dfrac{\Lambda_i}{\mu_i}<1 \quad i=1,2,3,4$

$$\rho_1=\frac{\Lambda_1}{\mu_1}=\frac{12,5}{25}=0,5 \quad \rho_2=\frac{\Lambda_2}{\mu_2}=\frac{2,5}{10}=0,25 \quad \rho_3=\frac{\Lambda_3}{\mu_3}=\frac{26}{40}=0,65 \quad \rho_4=\frac{\Lambda_4}{\mu_4}=\frac{4}{5}=0,8$$

La red no se satura en ningún nodo, existe una distribución estacionaria.

Las medidas de rendimiento de cada nodo corresponden a las ecuaciones del modelo M/M/1:

Número medio de trabajos en el sistema (cola + servicio): $L_{si}=\dfrac{\rho_i}{1-\rho_i}=\dfrac{\Lambda_i}{\mu_i-\Lambda_i}$

$$L_{s1}=\frac{0,5}{1-0,5}=1 \quad L_{s2}=\frac{0,25}{1-0,25}=0,3333 \quad L_{s3}=\frac{0,65}{1-0,65}=1,8571 \quad L_{s4}=\frac{0,8}{1-0,8}=4$$

Número medio de trabajos en el sistema, suma del número medio de trabajos en cada nodo (subsistema): $L_{red}=\sum_{i=1}^{4}L_{si}=1+0,3333+1,8571+4=7,1904$

El tiempo medio de permanencia de trabajos en la red:

$$W_{red} = \frac{L_{red}}{\Lambda_{red}} = \frac{7,1904}{45} = 0,1598 \ \text{ unidades de tiempo}$$

b) El número mínimo de servidores (procesadores) para que el nodo 3 no se sature:

$$\rho_3 = \frac{\Lambda_3}{s_3 . \mu_3} = \frac{26}{s_3 . 16} < 1 \quad \rightarrow \quad s_3 = 2 \text{ servidores} \quad \Rightarrow \quad \rho_3 = \frac{26}{2 \times 16} = 0,8125$$

Las medidas de rendimiento del nodo 3 corresponden a las ecuaciones del modelo M/M/2.

Probabilidad que ningún trabajo se encuentre en el sistema de la cola del nodo 3:

$$p_{03} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\Lambda_3 / \mu_3)^n}{n!} + \frac{(\Lambda_3 / \mu_3)^s}{s!} \left(\frac{s_3 \mu_3}{s_3 \mu_3 - \Lambda_3} \right)} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{1} \frac{(26/16)^n}{n!} + \frac{(26/16)^2}{2!} \left(\frac{2 . 16}{2 . 16 - 26} \right)} =$$

$$= \frac{1}{\sum_{n=0}^{1} \frac{1,625^n}{n!} + \frac{1,625^2}{2} . \ 5,333} = \frac{1}{1 + 1,625 + 7,041} = 0,103$$

Número medio de trabajos en cola de nodo 3:

$$L_{q3} = \frac{1}{s_3 !} \left(\frac{\Lambda_3}{\mu_3} \right)^{s_3} \frac{\rho_3}{(1-\rho_3)^2} \ p_{03} = \frac{1}{2} . \left(\frac{26}{16} \right)^2 . \frac{0,8125}{(1-0,8125)^2} \ . 0,103 = 3,143$$

Número medio de trabajos en el sistema nodo 3 (cola + servicio):

$$L_{s3} = L_{q3} + \frac{\Lambda_3}{\mu_3} = 3,143 + \frac{26}{16} = 4,768$$

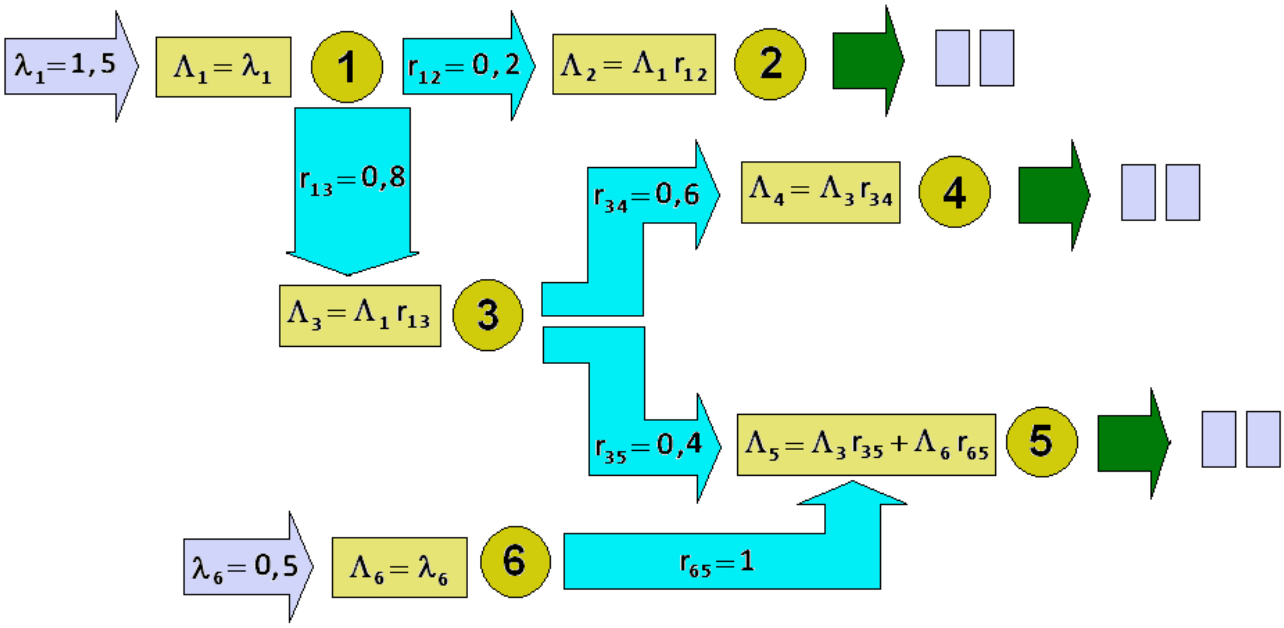
Número medio de trabajos en la red:

$$L_{red} = \sum_{i=1}^{k} L_{si} = \sum_{i=1}^{4} L_{si} = 1 + 0,3333 + 4,768 + 4 = 10,101$$

Tiempo medio de un trabajo en la red (desde que entra hasta que sale):

$$W_{red} = \frac{L_{red}}{\Lambda_{red}} = \frac{10,101}{45} = 0,022 \ \text{ unidades tiempo}$$

Calcular las medidas de rendimiento de la red



$\mu_i = 2 \qquad i = 1,2,3,4,5,6$

Solución:

Es una red acíclica (no tiene ciclos o lazos). Las ecuaciones de tráfico o equilibrio son intuitivas:

$$\begin{cases} \Lambda_1 = \lambda_1 = 1,5 \\ \Lambda_2 = \Lambda_1 r_{12} = 1,5\,.\,0,2 = 0,3 \\ \Lambda_3 = \Lambda_1 r_{13} = 1,5\,.\,0,8 = 1,2 \\ \Lambda_4 = \Lambda_3 r_{34} = 1,2\,.\,0,6 = 0,72 \\ \Lambda_6 = \lambda_6 = 0,5 \\ \Lambda_5 = \Lambda_3 r_{35} + \Lambda_6 r_{65} = 1,2\,.\,0,4 + 0,5\,.\,1 = 0,98 \end{cases} \qquad \Lambda_{red} = \sum_{i=1}^{6} \Lambda_i = 5,2$$

Para que la red no se sature en cada nodo (subsistema): $\rho_i = \dfrac{\Lambda_i}{\mu_i} < 1$

$$\rho_1 = \frac{\Lambda_1}{\mu_1} = \frac{1,5}{2} = 0,75 \qquad \rho_2 = \frac{\Lambda_2}{\mu_2} = \frac{0,3}{2} = 0,15 \qquad \rho_3 = \frac{\Lambda_3}{\mu_3} = \frac{1,2}{2} = 0,6$$

$$\rho_4 = \frac{\Lambda_4}{\mu_4} = \frac{0,72}{2} = 0,36 \qquad \rho_5 = \frac{\Lambda_5}{\mu_5} = \frac{0,98}{2} = 0,49 \qquad \rho_6 = \frac{\Lambda_6}{\mu_6} = \frac{0,5}{2} = 0,25$$

Las medidas de rendimiento de cada nodo corresponden a las ecuaciones del modelo M/M/1:

Número medio de trabajos en el sistema (cola + servicio): $L_{si} = \dfrac{\rho_i}{1-\rho_i} = \dfrac{\Lambda_i}{\mu_i - \Lambda_i}$

$$L_{s1}=\frac{\rho_1}{1-\rho_1}=\frac{0,75}{1-0,75}=3 \qquad L_{s2}=\frac{\rho_2}{1-\rho_2}=\frac{0,15}{1-0,15}=0,1764$$

$$L_{s3}=\frac{\rho_3}{1-\rho_3}=\frac{0,6}{1-0,6}=1,5 \qquad L_{s4}=\frac{\rho_4}{1-\rho_4}=\frac{0,36}{1-0,36}=0,5625$$

$$L_{s5}=\frac{\rho_5}{1-\rho_5}=\frac{0,49}{1-0,49}=0,9607 \qquad L_{s6}=\frac{\rho_6}{1-\rho_6}=\frac{0,25}{1-0,25}=0,3333$$

Número medio de trabajos en el sistema, suma del número medio de trabajos en cada nodo (subsistema): $L_{red}=\sum_{i=1}^{6} L_{si}=6,5329$

Tiempo medio de espera en cada nodo (subsistema): $W_{si}=\frac{L_i}{\Lambda_i}=\frac{1}{\mu_i-\Lambda_i}$

$$W_{s1}=\frac{1}{\mu_1-\Lambda_1}=\frac{1}{2-1,5}=2 \qquad W_{s2}=\frac{1}{\mu_2-\Lambda_2}=\frac{1}{2-0,3}=0,5882$$

$$W_{s3}=\frac{1}{\mu_3-\Lambda_3}=\frac{1}{2-1,2}=1,25 \qquad W_{s4}=\frac{1}{\mu_4-\Lambda_4}=\frac{1}{2-0,72}=0,7812$$

$$W_{s5}=\frac{1}{\mu_5-\Lambda_5}=\frac{1}{2-0,98}=0,9803 \qquad W_{s6}=\frac{1}{\mu_6-\Lambda_6}=\frac{1}{2-0,5}=0,6666$$

Tiempo medio de espera en la cola de cada nodo (subsistema): $W_{qi}=W_{si}-\frac{1}{\mu_i}$

$$W_{q1}=2-\frac{1}{2}=1,5 \qquad W_{q2}=0,5882-\frac{1}{2}=0,0882 \qquad W_{q3}=1,25-\frac{1}{2}=0,75$$

$$W_{q4}=0,7812-\frac{1}{2}=0,2812 \qquad W_{q5}=0,9803-\frac{1}{2}=0,4803 \qquad W_{q6}=0,6666-\frac{1}{2}=0,1666$$

Número medio de clientes que visitan un nodo: $V_i=\frac{\Lambda_i}{\Lambda_{red}} \quad \forall i=1,2,\dots,6$

$$V_1=\frac{\Lambda_1}{\Lambda_{red}}=\frac{1,5}{5,2}=0,2884 \qquad V_2=\frac{\Lambda_2}{\Lambda_{red}}=\frac{0,3}{5,2}=0,0576 \qquad V_3=\frac{\Lambda_3}{\Lambda_{red}}=\frac{1,2}{5,2}=0,2307$$

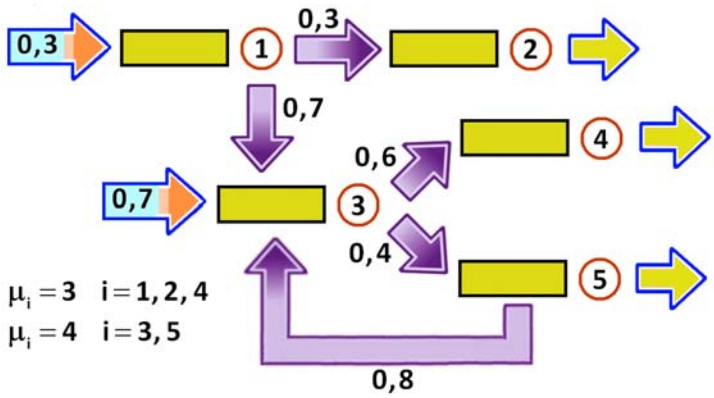
$$V_4=\frac{\Lambda_4}{\Lambda_{red}}=\frac{0,72}{5,2}=0,1384 \qquad V_5=\frac{\Lambda_5}{\Lambda_{red}}=\frac{0,98}{5,2}=0,1884 \qquad V_6=\frac{\Lambda_6}{\Lambda_{red}}=\frac{0,5}{5,2}=0,0961$$

En la red abierta de Jackson del esquema, se pide:

a) Tasas de llegada.

b) Condición de saturación y medidas de rendimiento.

c) Tiempos promedios.



Solución:

a) En cada nodo el flujo de entrada debe ser igual al flujo de salida.

Se trata de una red cíclica (un cliente puede volver a la misma cola).

Intuitivamente:

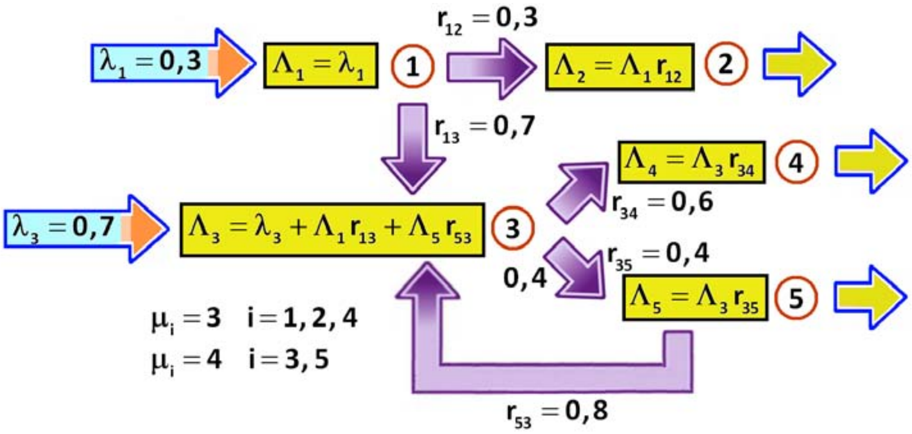
$\Lambda_1 = \lambda_1$

$\Lambda_2 = \Lambda_1 r_{12}$

$\Lambda_3 = \lambda_3 + \Lambda_1 r_{13} + \Lambda_5 r_{53}$

$\Lambda_4 = \Lambda_3 r_{34}$

$\Lambda_5 = \Lambda_3 r_{35}$



Datos del esquema son: $\begin{cases} \lambda_1 = 0,3 \quad \lambda_3 = 0,7 \\ r_{12} = 0,3 \quad r_{13} = 0,7 \quad r_{34} = 0,6 \quad r_{35} = 0,4 \quad r_{53} = 0,8 \end{cases}$

De forma intuitiva:

$$\Lambda_1 = 0,3 \quad \Lambda_2 = 0,3 \times 0,3 = 0,09$$
$$\Lambda_3 = 0,7 + 0,3 \times 0,7 + \Lambda_5 \times 0,8 = 0,91 + \Lambda_3 \times 0,4 \times 0,8 \quad \to \quad \Lambda_3 = 1,338$$
$$\Lambda_4 = \Lambda_3 \times 0,6 \quad \to \quad \Lambda_4 = 1,338 \times 0,6 = 0,803$$
$$\Lambda_5 = \Lambda_3 \times 0,4 \quad \to \quad \Lambda_5 = 1,338 \times 0,4 = 0,535$$

Sistema de ecuaciones de tráfico o ecuaciones de eqilibrio:

$$\begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \\ \Lambda_3 \\ \Lambda_4 \\ \Lambda_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} & r_{41} & r_{51} \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} & r_{42} & r_{52} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} & r_{43} & r_{53} \\ r_{14} & r_{24} & r_{34} & r_{44} & r_{54} \\ r_{15} & r_{25} & r_{35} & r_{45} & r_{55} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \\ \Lambda_3 \\ \Lambda_4 \\ \Lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\Lambda_1\\ \Lambda_2\\ \Lambda_3\\ \Lambda_4\\ \Lambda_5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0,3\\ 0\\ 0,7\\ 0\\ 0\end{pmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0,3 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0,7 & 0 & 0 & 0 & 0,8\\ 0 & 0 & 0,6 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0,4 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\Lambda_1\\ \Lambda_2\\ \Lambda_3\\ \Lambda_4\\ \Lambda_5\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}\Lambda_1\\ \Lambda_2\\ \Lambda_3\\ \Lambda_4\\ \Lambda_5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0,3\\ 0,3\,.\,\Lambda_1\\ 0,7+0,7\,.\,\Lambda_1+0,8\,.\,\Lambda_5\\ 0,6\,.\,\Lambda_3\\ 0,4\,.\,\Lambda_3\end{pmatrix}$$

Sustituyendo, queda:

$$\begin{aligned}&\Lambda_1 = \lambda_1 = 0,3\\ &\Lambda_2 = 0 + (0,3 \times 0,3) = 0,09\\ &\Lambda_3 = 0,7 + (0,3 \times 0,7 + \Lambda_5 \times 0,8)\\ &\Lambda_4 = 0 + (\Lambda_3 \times 0,6)\\ &\Lambda_5 = 0 + (\Lambda_3 \times 0,4)\end{aligned} \qquad \begin{cases}\Lambda_3 = 0,7 + 0,21 + 0,32\,\Lambda_3 \;\Rightarrow\; \Lambda_3 = 1,338\\ \Lambda_4 = 1,338 \times 0,6 = 0,803\\ \Lambda_5 = 1,338 \times 0,4 = 0,535\end{cases}$$

$$\Lambda_1 = 0,3 \quad \Lambda_2 = 0,09 \quad \Lambda_3 = 1,338 \quad \Lambda_4 = 0,803 \quad \Lambda_5 = 0,535$$

b) Para que la red no se sature se debe verificar $\rho_i = \dfrac{\Lambda_i}{\mu_i} < 1 \quad i = 1, 2, \dots, 5$

$$\rho_1 = \frac{\Lambda_1}{\mu_1} = \frac{0,3}{3} = 0,1 \qquad \rho_2 = \frac{\Lambda_2}{\mu_2} = \frac{0,09}{3} = 0,03 \qquad \rho_3 = \frac{\Lambda_3}{\mu_3} = \frac{1,338}{4} = 0,334$$

$$\rho_4 = \frac{\Lambda_4}{\mu_4} = \frac{0,803}{3} = 0,268 \qquad \rho_5 = \frac{\Lambda_5}{\mu_5} = \frac{0,535}{4} = 0,134$$

La red no se satura en ningún nodo.

Las medidas de rendimiento de cada nodo corresponden a las ecuaciones del modelo M/M/1:

Número medio clientes en el sistema (cola + servicio): $L_{si} = \dfrac{\rho_i}{1-\rho_i} = \dfrac{\Lambda_i}{\mu_i - \Lambda_i}$

$$L_{s1} = \frac{0,1}{1-0,1} = 1,1111 \qquad L_{s2} = \frac{0,03}{1-0,03} = 0,0309 \qquad L_{s3} = \frac{0,334}{1-0,334} = 0,5015$$

$$L_{s4} = \frac{0,268}{1-0,268} = 0,3661 \qquad L_{s5} = \frac{0,135}{1-0,135} = 0,1560$$

Número medio de clientes en el sistema, suma del número medio de clientes en cada nodo (subsistema): $L_{red} = \sum_{i=1}^{5} L_{si} = 2{,}1656$

Tiempo medio de espera en cada nodo (subsistema): $W_{si} = \dfrac{L_i}{\Lambda_i} = \dfrac{1}{\mu_i - \Lambda_i}$

$$W_{s1} = \frac{1}{\mu_1 - \Lambda_1} = \frac{1}{3-0{,}3} = 0{,}3704 \qquad W_{s2} = \frac{1}{\mu_2 - \Lambda_2} = \frac{1}{3-0{,}09} = 0{,}3436$$

$$W_{s3} = \frac{1}{\mu_3 - \Lambda_3} = \frac{1}{4-1{,}338} = 0{,}3757 \qquad W_{s4} = \frac{1}{\mu_4 - \Lambda_4} = \frac{1}{3-0{,}803} = 0{,}4552$$

$$W_{s5} = \frac{1}{\mu_5 - \Lambda_5} = \frac{1}{4-0{,}535} = 0{,}2886 \qquad \sum_{i=1}^{5} W_{si} = 1{,}8325$$

Tiempo medio espera en cola de nodo: $W_{q\,i} = \dfrac{L_{qi}}{\Lambda_i} = \dfrac{\Lambda_i}{\mu_i\,(\mu_i - \Lambda_i)} \quad \left(W_{si} = W_{q\,i} + \dfrac{1}{\mu_i} \right)$

$$W_{q1} = \frac{\Lambda_1}{\mu_1\,(\mu_1 - \Lambda_1)} = \frac{0{,}3}{3(3-0{,}3)} = 0{,}0371 \qquad W_{q1} = W_{s1} - \frac{1}{\mu_1} = 0{,}3704 - \frac{1}{3} = 0{,}0371$$

$$W_{q2} = \frac{\Lambda_2}{\mu_2\,(\mu_2 - \Lambda_2)} = \frac{0{,}09}{3(3-0{,}09)} = 0{,}0103 \qquad W_{q2} = W_{s2} - \frac{1}{\mu_2} = 0{,}3436 - \frac{1}{3} = 0{,}0103$$

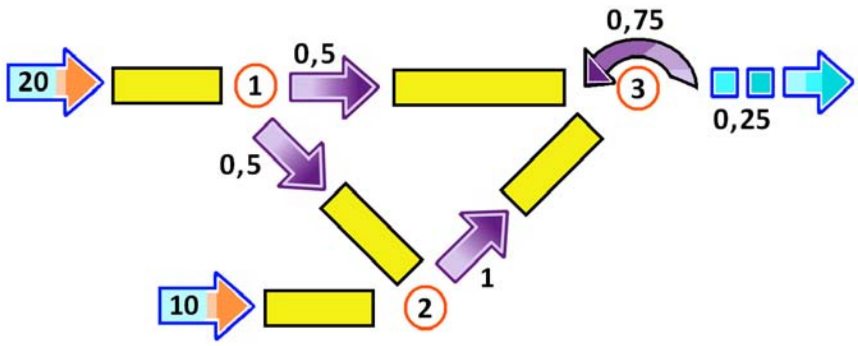
$$W_{q3} = \frac{\Lambda_3}{\mu_3\,(\mu_3 - \Lambda_3)} = \frac{1{,}338}{4\,(4-1{,}338)} = 0{,}1257 \qquad W_{q3} = W_{s3} - \frac{1}{\mu_3} = 0{,}3757 - \frac{1}{4} = 0{,}1257$$

$$W_{q4} = \frac{\Lambda_4}{\mu_4\,(\mu_4 - \Lambda_4)} = \frac{0{,}803}{3(3-0{,}803)} = 0{,}1219 \qquad W_{q4} = W_{s4} - \frac{1}{\mu_4} = 0{,}4552 - \frac{1}{3} = 0{,}1219$$

$$W_{q5} = \frac{\Lambda_5}{\mu_5\,(\mu_5 - \Lambda_5)} = \frac{0{,}535}{4\,(4-0{,}535)} = 0{,}0386 \qquad W_{q5} = W_{s5} - \frac{1}{\mu_5} = 0{,}2886 - \frac{1}{4} = 0{,}0386$$

$$\sum_{i=1}^{5} W_{si} = \sum_{i=1}^{5} \left(W_{q\,i} + \frac{1}{\mu_i} \right) = 1{,}8325$$

🖫 En la red abierta de Jackson, se tienen servidores con tasa individual de servicio $\mu_i = 15$.

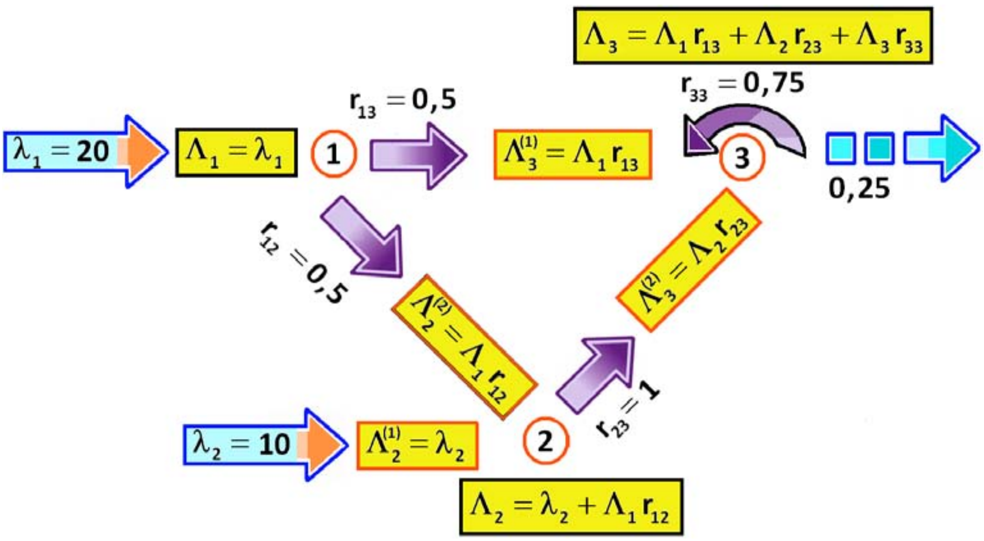


Se pide:

a) Número mínimo de servidores en cada nodo para que la red presente estado estacionario.
b) Demoras medias en todos los servidores de la red.
c) ¿Qué tipo de cola seguirían los nodos sí se invirtiera la tasa de llegada?. ¿Cuál sería la demora media en los servidores del nodo 1?

Solución:

a) Ecuaciones de tráfico o ecuaciones de equilibrio:



Datos del esquema $\begin{cases} \lambda_1 = 20 \quad \lambda_2 = 10 \quad \lambda_3 = 0 \\ r_{12} = 0,5 \quad r_{13} = 0,5 \quad r_{23} = 1 \quad r_{33} = 0,75 \end{cases}$

Intuitivamente:

$$\begin{cases} \Lambda_1 = \lambda_1 \\ \Lambda_2 = \lambda_2 + \Lambda_1 r_{12} \\ \Lambda_3 = \Lambda_1 r_{13} + \Lambda_2 r_{23} + \Lambda_{33} r_{33} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \Lambda_1 = 20 \\ \Lambda_2 = 10 + 20 \times 0,5 = 20 \\ \Lambda_3 = 20 \times 0,5 + 20 \times 1 + \Lambda_3 \times 0,75 \quad \rightarrow \quad \Lambda_3 = 120 \end{cases}$$

En forma matricial: $\begin{pmatrix}\Lambda_1\\ \Lambda_2\\ \Lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}r_{11} & r_{21} & r_{31}\\ r_{12} & r_{22} & r_{32}\\ r_{12} & r_{23} & r_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Lambda_1\\ \Lambda_2\\ \Lambda_3\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}\Lambda_1\\ \Lambda_2\\ \Lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20\\ 10\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0,5 & 0 & 0\\ 0,5 & 1 & 0,75\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Lambda_1\\ \Lambda_2\\ \Lambda_3\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}\Lambda_1\\ \Lambda_2\\ \Lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20\\ 10+0,5\Lambda_1\\ 0,5\Lambda_1+\Lambda_2+0,75\Lambda_3\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\Lambda_1=20 \quad \Lambda_2=10+0,5\times 20=20\\ 0,5\times 20+20+0,75\Lambda_3 \Rightarrow \Lambda_3=120\end{cases}$$

Las tasas totales de llegada a cada subsistema (venga de fuera o de otro nodo) son $\Lambda_1=20$, $\Lambda_2=20$, $\Lambda_3=120$

$$\Lambda_{red}=\sum_{i=1}^{3}\Lambda_i=20+20+120=160$$

Para que ninguna de las colas del sistema se sature, es preciso que se cumpla para cada uno de los nodos por separado:

$$\rho_i=\frac{\Lambda_i}{s_i\,\mu_i} \quad \begin{cases}\lambda_i \equiv \text{Tasa de llegadas de procesos al nodo i}\\ \Lambda_i \equiv \text{Tasa de procesos que salen del nodo i (Tasas totales llegadas)}\end{cases}$$

El número mínimo de servidores que verifiquen en cada nodo $\rho_i<1$:

Nodo 1: $\rho_1=\dfrac{20}{15\,s_1}<1 \;\rightarrow\; s_1>\dfrac{20}{15} \;\mapsto\; s_1=2$ servidores $\Rightarrow \rho_1=\dfrac{20}{15\times 2}=0,667$

Nodo 2: $\rho_2=\dfrac{20}{15\,s_2}<1 \rightarrow s_2>\dfrac{20}{15} \;\mapsto\; s_2=2$ servidores $\Rightarrow \rho_2=\dfrac{20}{15\times 2}=0,667$

Nodo 3: $\rho_3=\dfrac{120}{15\,s_3}<1 \rightarrow s_3>\dfrac{120}{15} \;\mapsto\; s_3=9$ servidores $\Rightarrow \rho_3=\dfrac{120}{15\times 9}=0,889$

Los nodos 1, 2 y 3 son colas del tipo M/M/s

b) Nodo 1 y 2: $s_1=s_2=2$ servidores

Utilización promedio del nodo 1 o 2: $u_{s1}=u_{s2}=\dfrac{\Lambda_1}{\mu_1}=\dfrac{20}{15}=1,333$

Probabilidad que ningún cliente se encuentre en el sistema de cola de cada nodo:

$$p_{0i}=\frac{1}{\displaystyle\sum_{n_i=0}^{s_i-1}\frac{(\Lambda_i/\mu_i)^{n_i}}{n_i!}+\frac{(\Lambda_i/\mu_i)^{s_i}}{s_i!}\left(\frac{s_i\,\mu_i}{s_i\,\mu_i-\Lambda_i}\right)}=\frac{1}{\displaystyle\sum_{n_i=0}^{s_i-1}\frac{(\Lambda_i/\mu_i)^{n_i}}{n_i!}+\frac{1}{s_i!}\left(\frac{\Lambda_i}{\mu_i}\right)^{s_i}\frac{1}{1-\rho_i}}$$

$$p_{01}=\frac{1}{\displaystyle\sum_{n_1=0}^{2-1}\frac{(20/15)^{n_1}}{n_i!}+\frac{(20/15)^2}{2!}\left(\frac{2\times 15}{2\times 15-20}\right)}=\frac{1}{\displaystyle\sum_{n_1=0}^{1}\frac{(1,333)^{n_1}}{n_1!}+2,665}=$$

$$=\frac{1}{\displaystyle\sum_{n_1=0}^{1}\frac{(1,333)^{n_1}}{n_i!}+2,665}=\frac{1}{1+1,333+2,665}=0,2$$

Número medio de clientes en cola de nodo:

$$L_{q1}=\frac{(\Lambda_1/\mu_1)^{s_1}\,\Lambda_1\,\mu_1}{(s_1-1)!\,(s_1\,\mu_1-\Lambda_1)^2}\;p_{01}=\frac{(1,333)^2\times 20\times 15}{(2\times 15-20)^2}\times 0,2=1,067$$

O bien, $L_{q1}=\dfrac{1}{s_1!}\left(\dfrac{\Lambda_1}{\mu_1}\right)^{s_1}\dfrac{\rho_1}{(1-\rho_1)^2}\;p_{01}=\dfrac{1}{2}(1,333)^2\times\dfrac{0,667}{(1-0,667)^2}\times 0,2=1,067$

Tiempo medio de espera en cada cola de nodo:

$$W_{q1}=\frac{L_{q1}}{\Lambda_1}=\frac{1,067}{20}=0,053\qquad\qquad W_{q2}=\frac{L_{q2}}{\Lambda_2}=\frac{1,067}{20}=0,053$$

Nodo 3: $s_3=9$ servidores

Utilización promedio del nodo 3: $u_{s3}=\dfrac{\Lambda_3}{\mu_3}=\dfrac{120}{15}=8$

Probabilidad que ningún cliente se encuentre en el sistema de la cola del nodo 3:

$$p_{03}=\frac{1}{\displaystyle\sum_{n_3=0}^{9-1}\frac{(\Lambda_3/\mu_3)^{n_3}}{n_3!}+\frac{1}{s_3!}\left(\frac{\Lambda_3}{\mu_3}\right)^{s_3}\frac{1}{1-\rho_3}}=\frac{1}{\displaystyle\sum_{n_3=0}^{9-1}\frac{8^{n_3}}{n_3!}+\frac{1}{9!}\times 8^9\times\frac{1}{1-0,889}}=$$

$$=\frac{1}{1766,33+3328,81}=0,0002$$

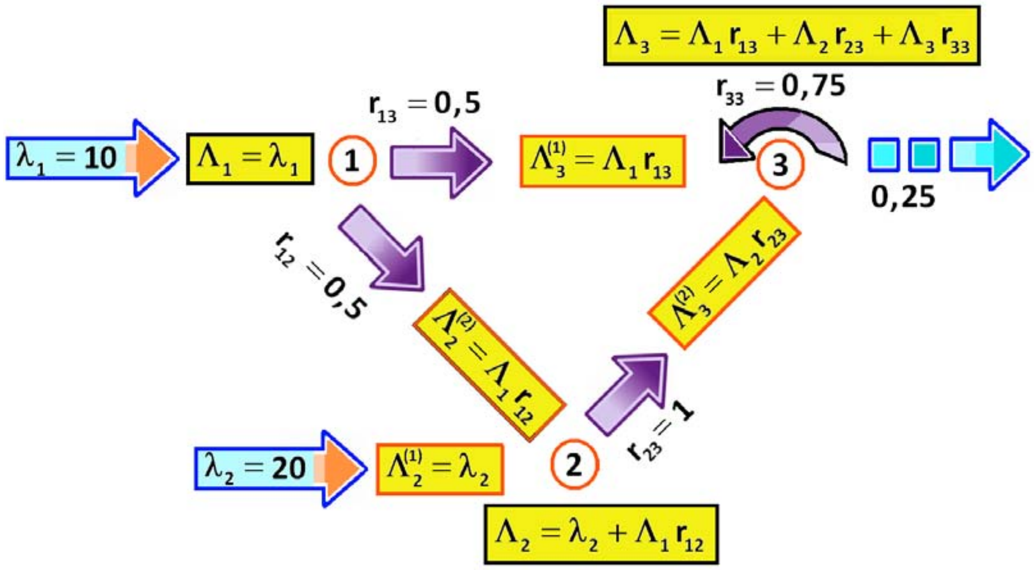
$$\sum_{n_3=0}^{8}\frac{8^{n_3}}{n_3!}=1+8+32+85,33+170,66+273,06+364,08+416,10+416,10=1766,33$$

Número medio de clientes en cola del nodo 3:

$$L_{q3} = \frac{1}{s_3!}\left(\frac{\Lambda_3}{\mu_3}\right)^{s_3} \frac{\rho_3}{(1-\rho_3)^2}\, p_{03} = \frac{1}{9!} \times 8^9 \times \frac{0,889}{(1-0,889)^2} \times 0,0002 = 5,33$$

Tiempo medio de espera en la cola de nodo 3: $W_{q3} = \dfrac{L_{q3}}{\Lambda_3} = \dfrac{5,33}{120} = 0,045$

c) Datos del esquema $\begin{cases} \lambda_1 = 10 \quad \lambda_2 = 20 \quad \lambda_3 = 0 \\ r_{12} = 0,5 \quad r_{13} = 0,5 \quad r_{23} = 1 \quad r_{33} = 0,75 \end{cases}$



Intuitivamente:

$$\begin{cases} \Lambda_1 = \lambda_1 \\ \Lambda_2 = \lambda_2 + \Lambda_1 r_{12} \\ \Lambda_3 = \Lambda_1 r_{13} + \Lambda_2 r_{23} + \Lambda_{33} r_{33} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \Lambda_1 = 10 \\ \Lambda_2 = 20 + 10 \times 0,5 = 25 \\ \Lambda_3 = 10 \times 0,5 + 25 \times 1 + \Lambda_{33} \times 0,75 \quad \rightarrow \quad \Lambda_3 = 120 \end{cases}$$

Las tasas totales de llegada a cada subsistema (venga de fuera o de otro nodo) son:
$\Lambda_1 = 10$, $\Lambda_2 = 25$, $\Lambda_3 = 120$

$$\Lambda_{red} = \sum_{i=1}^{3} \Lambda_i = 10 + 25 + 120 = 155$$

La condición de no saturación aplicada a cada uno de los nodos por separado es

$$\rho_i = \frac{\Lambda_i}{s_i\,\mu_i} \quad \begin{cases} \lambda_i \equiv \text{Tasa de llegadas de procesos al nodo i} \\ \Lambda_i \equiv \text{Tasa de procesos que salen del nodo i (Tasas totales llegadas)} \end{cases}$$

Nodo 1: $\rho_1 = \dfrac{10}{15\, s_1} < 1 \;\rightarrow\; s_1 > \dfrac{10}{15} \;\mapsto\; s_1 = 1 \text{ servidor} \;\Rightarrow\; \rho_1 = \dfrac{10}{15} = 0,667$

Nodo 2: $\rho_2 = \dfrac{25}{15\, s_2} < 1 \;\rightarrow\; s_2 > \dfrac{25}{15} \quad \mapsto \quad s_2 = 2 \text{ servidores} \;\Rightarrow\; \rho_2 = \dfrac{25}{15 \times 2} = 0,833$

Nodo 3: $\rho_3 = \dfrac{120}{15\, s_3} < 1 \;\rightarrow\; s_3 > \dfrac{120}{15} \quad \mapsto \quad s_3 = 9 \text{ servidores} \;\Rightarrow\; \rho_3 = \dfrac{120}{15 \times 9} = 0,889$

El nodo 1 es una cola tipo M/M/1 y los nodos 2 y 3 son colas tipo M/M/s

El número medio de clientes en cola del nodo 1: $L_{q1} = \dfrac{\rho_1}{1-\rho_1} = \dfrac{0,667}{1-0,667} = 2$

Tiempo medio de espera en cola del nodo 1: $W_{q1} = \dfrac{L_{q1}}{\Lambda_1} = \dfrac{2}{10} = 0,2$

REDES DE JACKSON CERRADAS

En una red cerrada no entran ni salen calientes, el número de clientes es constante en el tiempo.

- No es necesario que los buffer de espera sean infinitos solo que tengan capacidad suficiente para mantener $(N-1)$ clientes para que no haya bloqueo.
- El cliente al finalizar el proceso en el nodo i pasa al nodo j con probabilidad r_{ij}
- Todos los tiempos de servicio son exponenciales negativos μ_i y los clientes se procesan según el orden de llegada a un nodo.
- Cada nodo i es una cola $M|M|s_i$

Las redes cerradas de Jackson tienen aplicaciones en el procesado de sistemas multi-procesadores (CPU y sistemas I/O), y el modelado de ventana deslizante.

Se consideran K nodos sin tráfico externo $(\lambda_i = 0 \ \forall i)$, los N clientes viajan indefinidamente por los K procesos.

Dado que el flujo total de entrada a un nodo i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ debe ser igual al flujo total de salida del nodo, se obtiene las denominadas ecuaciones de equilibrio:

$$\Lambda_i = \sum_{j=1}^{K} \Lambda_j r_{ji} \qquad \rho_i = \frac{\Lambda_i}{\mu_i} \quad \to \quad \Lambda_i = \rho_i \cdot \mu_i$$

En forma matricial $\left(\vec{\Lambda}_i = \vec{\Lambda}_j r\right)$:

$$\begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \\ \vdots \\ \Lambda_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{21} & \cdots & r_{k1} \\ r_{12} & r_{22} & \cdots & r_{k2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{1k} & r_{2k} & \cdots & r_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \\ \vdots \\ \Lambda_k \end{pmatrix}$$

Sistema lineal indeterminado con un grado de libertad, que se resuelve para calcular las tasas de llegada relativas a cada nodo Λ_i.

Para la resolución se hace arbitrariamente una de la tasa de visitas relativa Λ_i de algún nodo igual a la unidad (por ejemplo, $\Lambda_1 = 1$).

En una red cerrada al no haber entradas ni salidas de clientes, resulta indispensable conocer el número de clientes dentro de la red (N), que permanece constante en el tiempo.

Por este motivo, el número medio de clientes en la red $L_{red} = N$ y las cantidades del tiempo medio de espera en la red y en cada nodo carecen de sentido.

Lo importante es determinar las probabilidades de que haya n_i clientes en el nodo i-ésimo para $i=1, \ldots ,k$, que se denotan por $p_{n_1, n_2, \cdots, n_k}$.

Las probabilidades de los distintos estados de la red se calculan por medio de la expresión:

$$p_{n_1, n_2, \cdots, n_k} = \frac{1}{G(N)} \prod_{i=1}^{k} \frac{\rho_i^n}{a_i(n_i)}$$

donde, $G(N) = \displaystyle\sum_{n_1 + \cdots + n_k = N} \prod_{i=1}^{k} \frac{\rho_i^{n_i}}{a_i(n_i)}$ y $a_i(n) = \begin{cases} n! & n \le s_i \\ s_i!\ s_i^{n-s_i} & n \ge s_i \end{cases}$

$G(N) \equiv$ Constante de normalización al considerar todas las combinaciones de k que hacen que haya N clientes en total en el sistema.

El cálculo de $G(N)$ puede resultar costoso cuando N y k son grandes, dado que el número de posibles estados es $\binom{N+k-1}{N}$

JP. Buzen desarrolló un algoritmo recursivo para $n=N$ y $m=k$ donde se observa que $g_k(N) = G(N)$:

$$g_m(n) = \sum_{n_1 + \cdots + n_m = n} \prod_{i=1}^{m} \frac{\rho_i^{n_i}}{a_i(n_i)} \qquad \text{y} \qquad a_i(n) = \begin{cases} n! & n \le s_i \\ s_i!\ s_i^{n-s_i} & n \ge s_i \end{cases}$$

denotando $f_i(n) = \dfrac{\rho_i^n}{a_i(n)}$ para $i=1, \ldots ,k$ y $n = 0, 1, \ldots ,N$

La recurrencia de la función $g_m(n)$ se obtiene considerando que:

$$g_m(n) = \sum_{n_1 + \cdots + n_m = n} \prod_{i=1}^{m} f_i(n_i) = \sum_{i=0}^{n} f_m(i)\,.\,g_{m-1}(n-i)$$

Se observa que $g_1(n) = f_1(n)$ pudiendo aplicar la ecuación de recurrencia. Por otra parte, $g_m(0) = f_m(0) = 1 \quad m = 1, \ldots ,k$

Utilizando el algortimo recursivo, la probabilidad de que haya n_k clientes en el nodo k-ésimo:

$$p_m(n_k) = p_{\bullet\bullet\bullet n_k} = \frac{f_m(n_k)\,.\,g_{m-1}(N-n_k)}{g_m(N)} \qquad m = 1, 2, \cdots, k$$

✓ Número medio de clientes en cada nodo: $L_m = \sum_{i=1}^{n} i \,.\, p_m(i) \quad m = 1, 2, \cdots, k$

✓ Tiempo medio de permanencia de un cliente en un nodo: $W_m = \dfrac{L_m}{\bar{\Lambda}_m}$

El valor calculado Λ_i en las ecuaciones de equilibrio $\Lambda_i = \sum_{j=1}^{K} \Lambda_j \, r_{ji}$ es una de las

infinitas soluciones no nulas que relaciona las tasas de entrada, no tienen porqué ser el valor correcto de las Λ_i (son valores proporcionales a los $\bar{\Lambda}_i$ verdaderos).

La situación se resuelve imponiendo la condición de que el número medio de clientes que entran a un nodo elegido Λ_i tiene que ser igual al número medio de clientes que salen servidos de dicho nodo.

$$\bar{\Lambda}_m = c \,.\, \Lambda_m \quad \text{donde} \quad \bar{\Lambda}_m = \mu_m \,.\, \sum_{i=1}^{n} p_m(i) \;\rightarrow\; c = \frac{\bar{\Lambda}_m}{\Lambda_m}$$

calculada la constante 'c' se obienen las restantes Λ_{i-1}

Aunque el algoritmo de Buzen hace más cómodo el cálculo de $G(N)$ sigue resultando costoso.

Se puede utilizar un método alternativo para caraceterizar el comportamiento del sistema sin calcular $G(N)$. Se demuestra que cuando llega una petición, la longitud del buffer en el nodo i coincide con la que vería un observador externo ei en la red hubiera un cliente menos, aplicando la ley de Little:

$$W_i(m) = \frac{1 + L_i(m-1)}{\mu_i} \qquad \begin{cases} W_i(m) \equiv \text{Tiempo de espera en el nodo i cuando hay m clientes} \\ \mu_i \equiv \text{Tiempo de servicio (inverso) del nodo i} \\ L_i(m-1) \equiv \text{Número medio de clientes en el nodo i} \end{cases}$$

Rendimiento del sistema: $\lambda_m = \dfrac{m}{\sum_{i=1}^{k} W_i(m) \,.\, \Lambda_i}$

Longitud media de la cola: $L_i(m) = \Lambda_i \,.\, \lambda_m \,.\, W_i(m)$

La aproximación de Bard-Schweitzer estima que el número promedio de trabajos en el nodo i es una interpolación lineal:

$$L_i(m) \approx \frac{m}{m-1} L_i(m-1)$$

Este enfoque iterativo a menudo se conoce con el nombre de MVA aproximado (AMVA) y, por lo general, es más rápido que el enfoque recursivo de MVA (Mean-Value Analysis).

Algoritmo MVA (Mean-Value Analysis): Es una técnica de recurrencia para calcular longitudes de cola esperadas, tiempo de espera en nodos de cola y rendimiento en equilibrio para un sistema de colas separables y cerradas.

Se basa en el teorema de llegada (propiedad del observador aleatorio), que establece que cuando en un sistema cerrado un cliente M llega a una instalación de servicio, observa que el resto del sistema se encuentra en estado de equilibrio para un sistema con $(M-1)$ clientes.

ALGORITMO MVA: MEDIDAS DE RENDIMIENTO PARA M CLIENTES EN EL SISTEMA

$\lambda_i(m) \equiv$ Tasa real de salidas del nodo i-ésimo

$\mu_i \equiv$ Tasa individual de servicio nodo

$$\Lambda_i(m) = \frac{L_i(m)}{W_i(m)} \quad i = 1, 2, \cdots, k \quad m = 1, 2, \cdots, M$$

$\rho_i(m) \equiv$ Utilización del servidor en el nodo i-ésimo: $\rho_i(m) = \dfrac{\Lambda_i(m)}{\mu_i} = \dfrac{L_i(m)}{\mu_i\, W_i(m)}$

$L_i(m) \equiv$ Número medio de clientes en el nodo i-ésimo

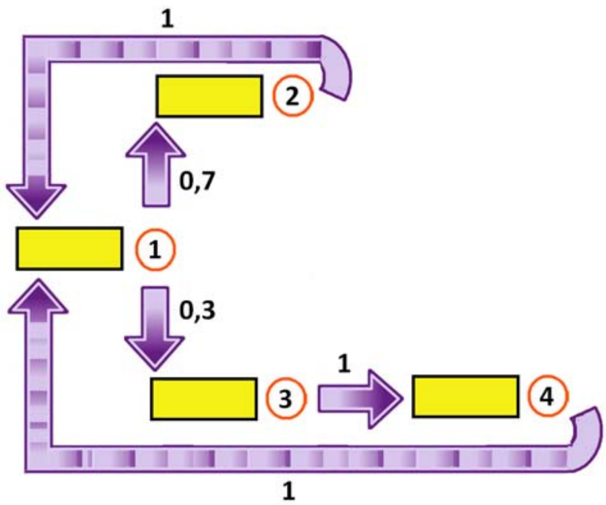
$$L_i(m) = \frac{m\ \Lambda_i\, W_i(m)}{\sum_{i=1}^{k} \Lambda_i\, W_i(m)} \quad i = 1, 2, \cdots, k \quad m = 1, 2, \cdots, M \quad , \ L_i(0) = 0 \quad i = 1, 2, \cdots, k$$

$W_i(m) \equiv$ Tiempo medio que cada cliente pasa en el nodo i cuando hay m clientes.

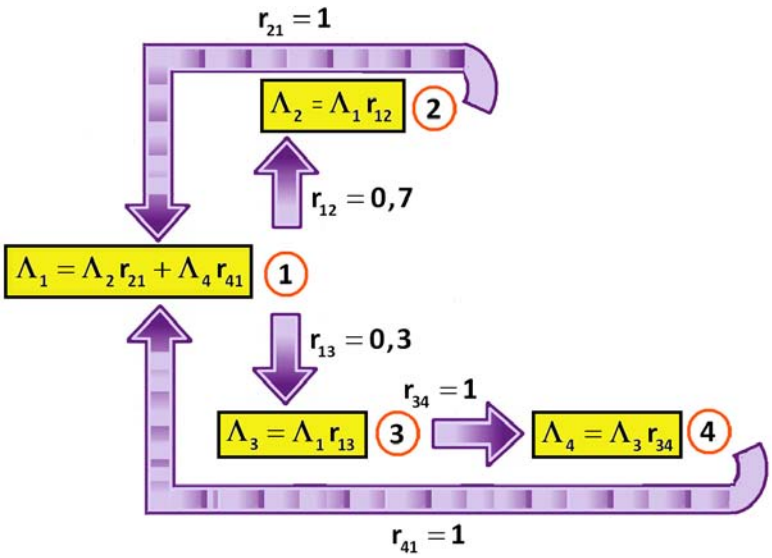
$$W_i(m) = \frac{1 + L_i(m-1)}{\mu_i} \quad i = 1, 2, \cdots, k \quad m = 1, 2, \cdots, M$$

Se trata de un algoritmo iterativo que va calculando $L_i(m)$ y $W_i(m)$ para valores crecientes de m (a partir de $m = 0$)

🖫 En la red cerrada de Jackson, se tienen servidores con tasa individual de servicio $\mu_i = 5$.



Solución:



Ecuaciones de equilibrio:

$$\Lambda_i = \sum_{j=1}^{k} \Lambda_j r_{ji}$$

$$\Lambda_1 = \Lambda_2 r_{21} + \Lambda_4 r_{41}$$

$$\Lambda_2 = \Lambda_1 r_{12}$$

$$\Lambda_3 = \Lambda_1 r_{13}$$

$$\Lambda_4 = \Lambda_3 r_{34}$$

Se tiene, $r_{12} = 0,7$, $r_{13} = 0,3$, $r_{21} = 1$, $r_{34} = 1$, $r_{41} = 1$

Tomando $\Lambda_1 = 1$: $\begin{cases} \Lambda_2 = \Lambda_1 r_{12} \\ \Lambda_3 = \Lambda_1 r_{13} \\ \Lambda_4 = \Lambda_3 r_{34} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \Lambda_2 = 0,7 \\ \Lambda_3 = 0,3 \\ \Lambda_4 = 0,3 \end{cases}$

Tiempo de espera en el nodo: $W_i(m) = \dfrac{1 + L_i(m-1)}{\mu_i}$ con $\mu_i = 5$, $i = 1, 2, 3, 4$

Número medio de clientes en el nodo: $L_i(m) = \dfrac{m \ \Lambda_i W_i(m)}{\sum_{i=1}^{k} \Lambda_i W_i(m)}$ $i = 1, 2, 3, 4$

$$L_1(m) = \frac{m\ \Lambda_1 W_1(m)}{\sum_{i=1}^{4} \Lambda_i W_i(m)} = \frac{m\ .\ W_1(m)}{W_1(m) + 0,7\ W_2(m) + 0,3\ W_3(m) + 0,3\ W_4(m)}$$

$$L_2(m) = \frac{m\ \Lambda_2 W_2(m)}{\sum_{i=1}^{4} \Lambda_i W_i(m)} = \frac{m\ .\ 0,7\ .\ W_2(m)}{W_1(m) + 0,7\ W_2(m) + 0,3\ W_3(m) + 0,3\ W_4(m)}$$

$$L_3(m) = \frac{m\ \Lambda_3 W_3(m)}{\sum_{i=1}^{4} \Lambda_i W_i(m)} = \frac{m\ .\ 0,3\ .\ W_3(m)}{W_1(m) + 0,7\ W_2(m) + 0,3\ W_3(m) + 0,3\ W_4(m)}$$

$$L_4(m) = \frac{m\ \Lambda_4 W_4(m)}{\sum_{i=1}^{4} \Lambda_i W_i(m)} = \frac{m\ .\ 0,3\ .\ W_4(m)}{W_1(m) + 0,7\ W_2(m) + 0,3\ W_3(m) + 0,3\ W_4(m)}$$

- Primera iteración: $\boxed{m = 1}$

$$L_i(0) = 0 \quad i = 1, 2, 3, 4 \qquad W_i(1) = \frac{1+0}{5} = 0,2 \quad i = 1, 2, 3, 4$$

$$L_1(1) = \frac{1\ .\ 0,2}{0,2 + 0,7\ .\ 0,2 + 0,3\ .\ 0,2 + 0,3\ .\ 0,2} = \frac{0,2}{0,2\ .\ 2,3} = 0,4348$$

$$L_2(1) = \frac{0,7\ .\ 0,2}{0,2 + 0,7\ .\ 0,2 + 0,3\ .\ 0,2 + 0,3\ .\ 0,2} = \frac{0,7\ .\ 0,2}{0,2\ .\ 2,3} = 0,3043$$

$$L_3(1) = \frac{0,3\ .\ 0,2}{0,2 + 0,7\ .\ 0,2 + 0,3\ .\ 0,2 + 0,3\ .\ 0,2} = \frac{0,3\ .\ 0,2}{0,2\ .\ 2,3} = 0,1304$$

$$L_4(1) = \frac{0,3\ .\ 0,2}{0,2 + 0,7\ .\ 0,2 + 0,3\ .\ 0,2 + 0,3\ .\ 0,2} = \frac{0,3\ .\ 0,2}{0,2\ .\ 2,3} = 0,1304$$

- Segunda iteración: $\boxed{m = 2}$

$$W_i(2) = \frac{1 + L_i(1)}{5} \quad i = 1, 2, 3, 4$$

$$W_1(2) = \frac{1 + L_1(1)}{5} = \frac{1,4348}{5} = 0,2870 \qquad W_3(2) = \frac{1 + L_3(1)}{5} = \frac{1,1304}{5} = 0,2261$$

$$W_2(2)=\frac{1+L_2(1)}{5}=\frac{1,3043}{5}=0,2609 \qquad W_4(2)=\frac{1+L_4(1)}{5}=\frac{1,1304}{5}=0,2261$$

$$L_1(2)=\frac{2\ .\ 0,2870}{0,2870+0,7\ .\ 0,2609+0,3\ .\ 0,2261+0,3\ .\ 0,2261}=\frac{0,574}{0,6053}=0,9483$$

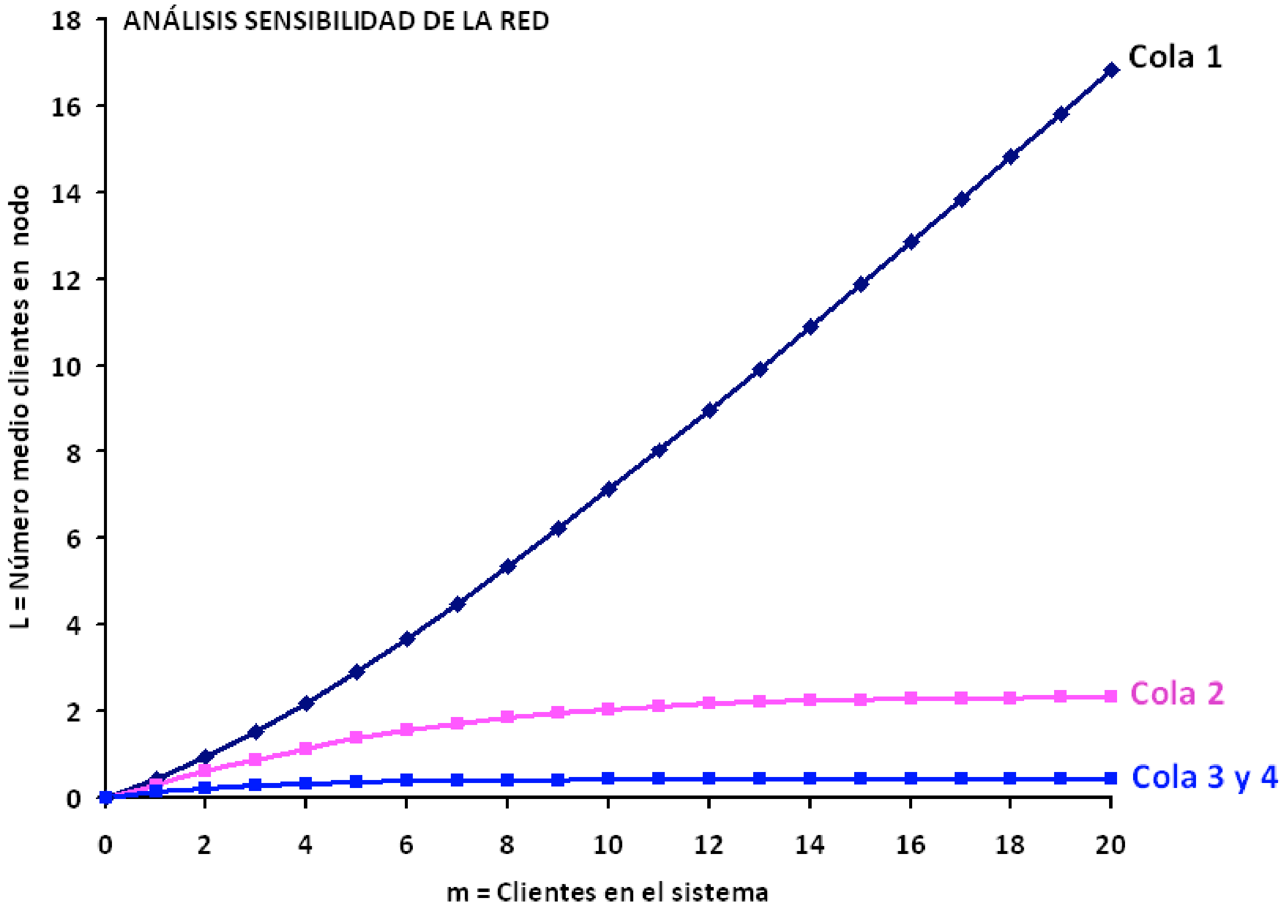
$$L_2(2)=\frac{2\ .\ 0,7\ .\ 0,2609}{0,2870+0,7\ .\ 0,2609+0,3\ .\ 0,2261+0,3\ .\ 0,2261}=\frac{0,3653}{0,6053}=0,6034$$

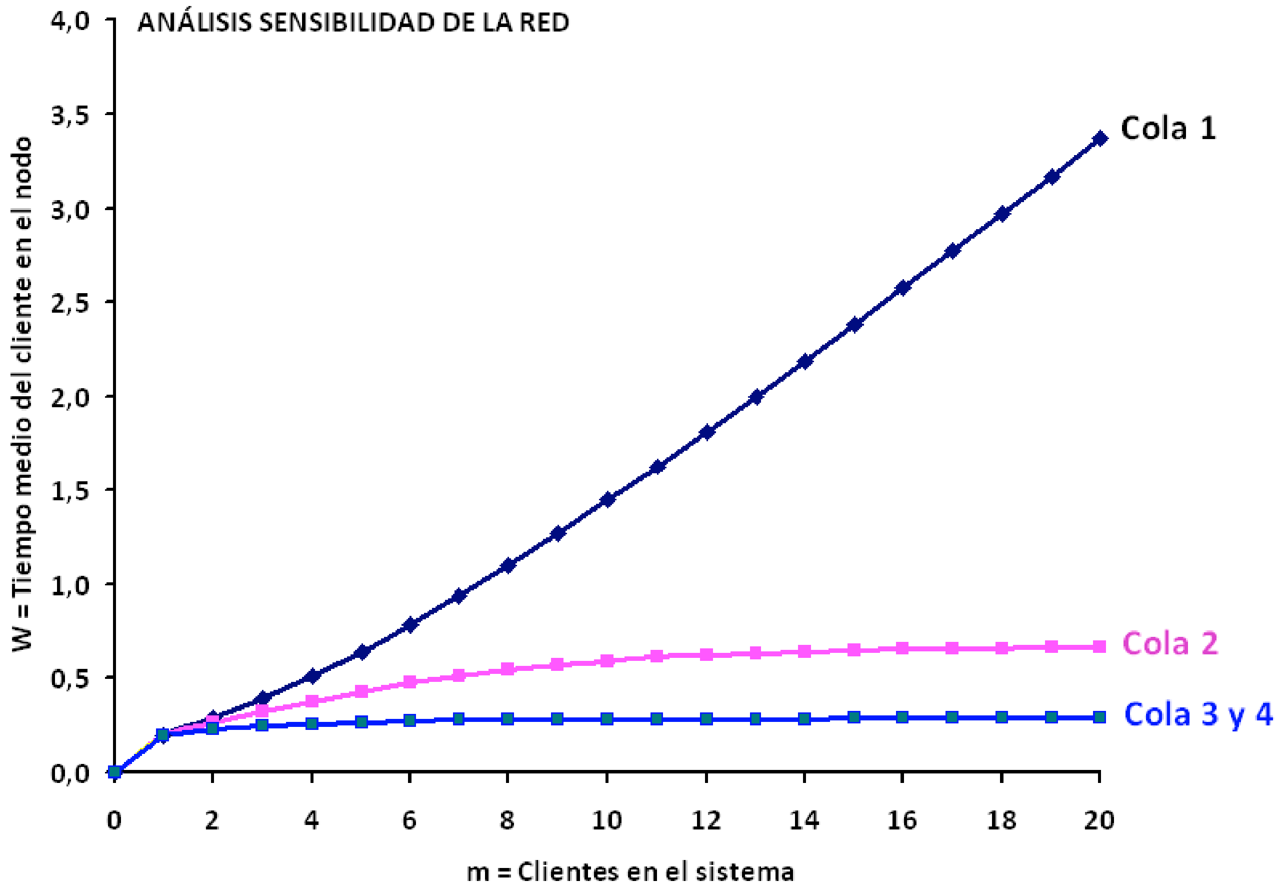
$$L_3(2)=\frac{2\ .\ 0,3\ .\ 0,2261}{0,2870+0,7\ .\ 0,2609+0,3\ .\ 0,2261+0,3\ .\ 0,2261}=\frac{0,1357}{0,6053}=0,2241$$

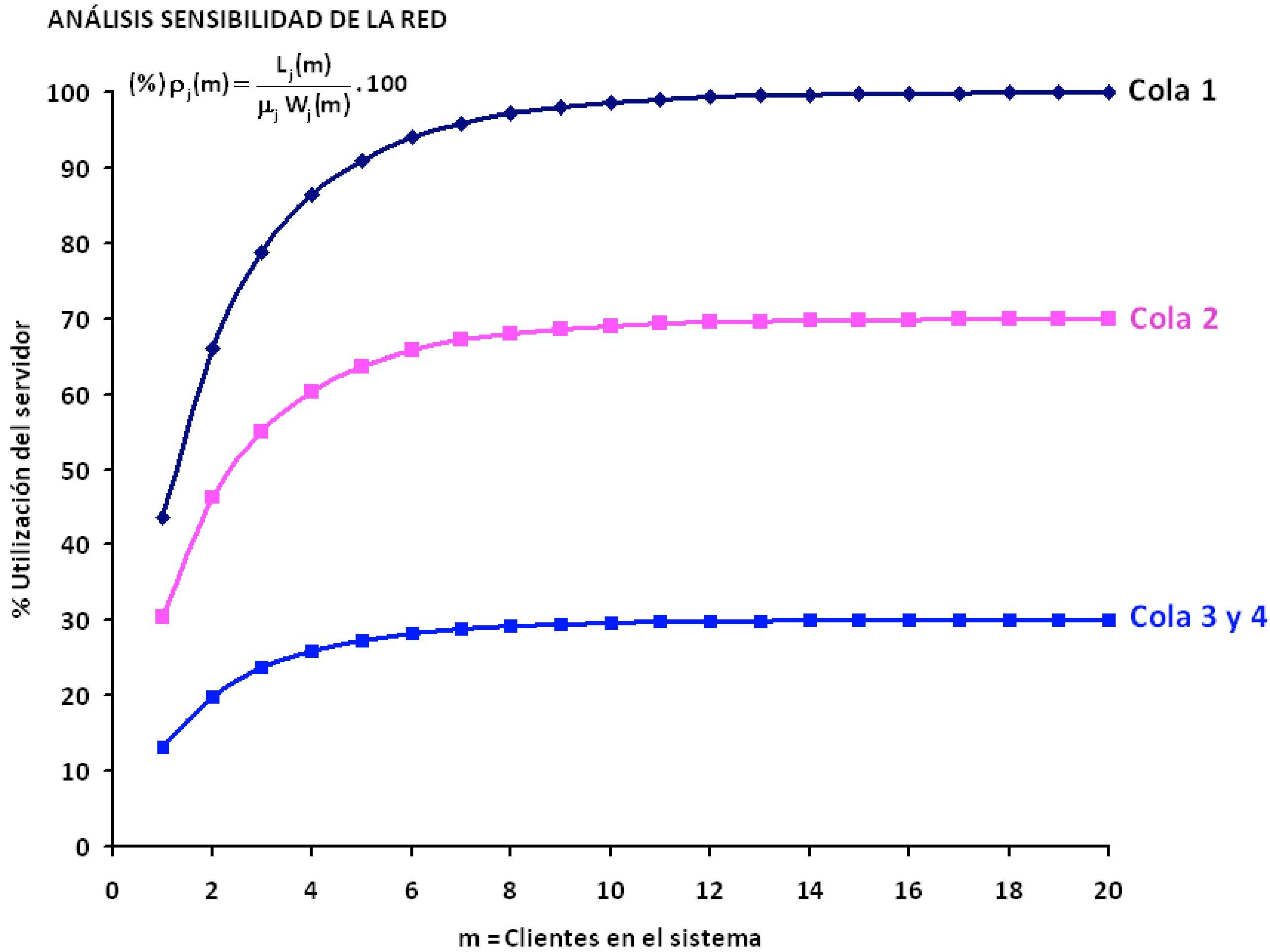
$$L_4(2)=\frac{2\ .\ 0,3\ .\ 0,2261}{0,2870+0,7\ .\ 0,2609+0,3\ .\ 0,2261+0,3\ .\ 0,2261}=\frac{0,1357}{0,6053}=0,2241$$

- Continúan las iteraciones, con una hoja de cálculo como Excel se obtiene:

	Tiempo medio espera en nodo				Número medio de clientes en nodo			
m	$W_1(m)$	$W_2(m)$	$W_3(m)$	$W_4(m)$	$L_1(m)$	$L_2(m)$	$L_3(m)$	$L_4(m)$
0	...	...	...	...	0	0	0	0
1	0,2	0,2	0,2	0,2	0,4348	0,3043	0,1304	0,1304
2	0,2870	0,2609	0,2261	0,2261	0,9483	0,6034	0,2241	0,2241
3	0,3897	0,3207	0,2448	0,2448	1,5360	0,8849	0,2895	0,2895
4	0,5072	0,3770	0,2579	0,2579	2,1913	1,1401	0,3343	0,3343
5	0,6383	0,4280	0,2669	0,2669	2,9065	1,3644	0,3646	0,3646
6	0,7813	0,4729	0,2729	0,2729	3,6737	1,5564	0,3850	0,3850
7	0,9347	0,5113	0,2770	0,2770	4,4852	1,7173	0,3987	0,3987
8	1,0970	0,5435	0,2797	0,2797	5,3341	1,8497	0,4081	0,4081
9	1,2668	0,5699	0,2816	0,2816	6,2141	1,9570	0,4144	0,4144
10	1,4428	0,5914	0,2829	0,2829	7,1197	2,0428	0,4188	0,4188
11	1,6239	0,6086	0,2838	0,2838	8,0459	2,1106	0,4218	0,4218
12	1,8092	0,6221	0,2844	0,2844	8,9887	2,1637	0,4238	0,4238
13	1,9977	0,6327	0,2848	0,2848	9,9447	2,2048	0,4253	0,4253
14	2,1889	0,6410	0,2851	0,2851	10,9110	2,2365	0,4263	0,4263
15	2,3822	0,6473	0,2853	0,2853	11,8854	2,2607	0,4270	0,4270
16	2,5771	0,6521	0,2854	0,2854	12,8661	2,2790	0,4274	0,4274
17	2,7732	0,6558	0,2855	0,2855	13,8515	2,2929	0,4278	0,4278
18	2,9703	0,6586	0,2856	0,2856	14,8406	2,3033	0,4280	0,4280
19	3,1681	0,6607	0,2856	0,2856	15,8325	2,3112	0,4282	0,4282
20	3,3665	0,6622	0,2856	0,2856	16,8264	2,3170	0,4283	0,4283


ANÁLISIS SENSIBILIDAD DE LA RED
L = Número medio clientes en nodo
m = Clientes en el sistema
Cola 1
Cola 2
Cola 3 y 4
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20


ANÁLISIS SENSIBILIDAD DE LA RED
W = Tiempo medio del cliente en el nodo
m = Clientes en el sistema
Cola 1
Cola 2
Cola 3 y 4
0,0
0,5
1,0
1,5
2,0
2,5
3,0
3,5
4,0
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20


ANÁLISIS SENSIBILIDAD DE LA RED
$(\%)\,\rho_j(m) = \dfrac{L_j(m)}{\mu_j\,W_j(m)}\,.100$
% Utilización del servidor
m = Clientes en el sistema
Cola 1
Cola 2
Cola 3 y 4
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20

📖 El sistema informático de un aeropuerto consta de cuatro estaciones de trabajo conectadas ente sí. El control y la seguridad se efectúan con tres procesos en continua ejecución en alguna de las cuatro estaciones; terminada la ejecución de un proceso en una de las estaciones se crea una copia de él mismo que envía a ejecutar a la propia estación o a alguna de las otra tres. En la tabla adjunta se informa de las probabilidades de que el proceso embrionario terminada la ejecución en la estación i-ésima se envíe a la estación j-ésima.

Destino / Origen	1	2	3	4
1	0,25	0,15	0,20	0,40
2	0,15	0,35	0,20	0,30
3	0,50	0,25	0,15	0,10
4	0,40	0,30	0,25	0,05

Las dos primeras estaciones (servidores) son biprocesadoras, cada uno con un tiempo de pocesado exponencial y capacidad de 5 procesos/minuto. Las dos últimas estaciones son monoprocesadoras y pueden atender por minuto respectivamente a 10 y 15 procesos. Se solicita:

a) Modelizar el proceso
b) Número medio de procesos en la cuarta estación.
c) Tiempo medio que transcurre desde que llega un proceso al servidor cuarto hasta que finaliza su ejecución.

Solución:

a) Se puede modelizar mediante una red de Jackson, donde los clientes son cada uno de los tres procesos que recorren el sistema, con:

$$N=3 \qquad k=4 \qquad \begin{matrix} s_1=2 \\ \mu_1=5 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} s_2=2 \\ \mu_2=5 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} s_3=1 \\ \mu_3=10 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} s_4=1 \\ \mu_4=15 \end{matrix}$$

- Ecuaciones de equilibrio:

$$\Lambda_i=\sum_{j=1}^{K}\Lambda_j r_{ji}=\sum_{j=1}^{4}\Lambda_j r_{ji} \qquad \rho_i=\frac{\Lambda_i}{\mu_i} \;\to\; \Lambda_i=\rho_i\,.\,\mu_i$$

En forma matricial $\left(\vec{\Lambda}_i=\vec{\Lambda}_j r\right)$:
$$\begin{pmatrix}\Lambda_1\\ \Lambda_2\\ \Lambda_3\\ \Lambda_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} & r_{41}\\ r_{12} & r_{22} & r_{32} & r_{42}\\ r_{13} & r_{23} & r_{33} & r_{43}\\ r_{14} & r_{24} & r_{34} & r_{44}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Lambda_1\\ \Lambda_2\\ \Lambda_3\\ \Lambda_4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \\ \Lambda_3 \\ \Lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}15 & 0{,}50 & 0{,}40 \\ 0{,}15 & 0{,}35 & 0{,}25 & 0{,}30 \\ 0{,}20 & 0{,}20 & 0{,}15 & 0{,}25 \\ 0{,}40 & 0{,}30 & 0{,}10 & 0{,}05 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \\ \Lambda_3 \\ \Lambda_4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \Lambda_1 = 0{,}25\,\Lambda_1 + 0{,}15\,\Lambda_2 + 0{,}50\,\Lambda_3 + 0{,}40\,\Lambda_4 \\ \Lambda_2 = 0{,}15\,\Lambda_1 + 0{,}35\,\Lambda_2 + 0{,}25\,\Lambda_3 + 0{,}30\,\Lambda_4 \\ \Lambda_3 = 0{,}20\,\Lambda_1 + 0{,}20\,\Lambda_2 + 0{,}15\,\Lambda_3 + 0{,}25\,\Lambda_4 \\ \Lambda_4 = 0{,}40\,\Lambda_1 + 0{,}30\,\Lambda_2 + 0{,}10\,\Lambda_3 + 0{,}05\,\Lambda_4 \end{array}$$

Haciendo arbitrariamente $\Lambda_3 = 1$ se obtiene una de las infinitas soluciones del sistema homogéneo:

$$\left.\begin{array}{r} 15\,\Lambda_1 - 3\,\Lambda_2 - 8\,\Lambda_4 = 10 \\ -3\,\Lambda_1 + 13\,\Lambda_2 - 6\,\Lambda_4 = 5 \\ 4\,\Lambda_1 + 4\,\Lambda_2 + 5\,\Lambda_4 = 17 \\ -8\,\Lambda_1 - 6\,\Lambda_2 + 19\,\Lambda_4 = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 62\,\Lambda_2 - 38\,\Lambda_4 = 35 \\ 2\,\Lambda_2 + 29\,\Lambda_4 = 36 \end{array}\right\}$$

$$\Lambda_1 = 1{,}5363 \quad \Lambda_2 = 1{,}2716 \quad \Lambda_3 = 1 \quad \Lambda_4 = \frac{1081}{937} = 1{,}1537$$

- De este modo, la utilización del servidor:

$$\rho_1 = \frac{\Lambda_1}{\mu_1} = \frac{1{,}5363}{5} = 0{,}3072 \qquad \rho_2 = \frac{\Lambda_2}{\mu_2} = \frac{1{,}2716}{5} = 0{,}2543$$

$$\rho_3 = \frac{\Lambda_3}{\mu_3} = \frac{1}{10} = 0{,}1 \qquad \rho_4 = \frac{\Lambda_4}{\mu_4} = \frac{1{,}1537}{15} = 0{,}0769$$

- Cálculo de la función $g_m(n)$

$$g_m(n) = G(n) = \sum_{i=0}^{n} f_m(i)\,.\,g_{m-1}(n-i) \quad n = 0, 1, 2, 3 \quad , \quad g_m(0) = f_m(0) = 1 \quad m = 1, 2, 3, 4$$

siendo: $f_i(n) = \dfrac{\rho_i^n}{a_i(n)}$

$$a_i(n) = \begin{cases} n! & n \le s_i \\ s_i!\ s_i^{n-s_i} & n \ge s_i \end{cases} \rightarrow \quad a_1(n) = a_2(n) = 2!\ 2^{n-2} = 2^{n-1} \quad a_3(n) = a_4(n) = 1$$

$$f_i(n) = \frac{\rho_i^n}{2^{n-1}} \quad i = 1, 2 \qquad f_i(n) = \rho_i^n \quad i = 3, 4 \quad \text{y} \quad n \ge 1$$

- Para $m = 1$: $g_1(n) = f_1(n) = \dfrac{\rho_i^n}{2^{n-1}} \quad i = 1, 2$

$n = 0$: $g_1(0) = f_1(0) = 1$

$$n=1: \; g_1(1)=f_1(1)=\frac{\rho_1}{2^0}=\rho_1=0,3072$$

$$n=2: \; g_1(2)=f_1(2)=\frac{\rho_1^2}{2^{2-1}}=\frac{0,3072^2}{2}=0,0472$$

$$n=3: \; g_1(3)=f_1(3)=\frac{\rho_1^3}{2^{3-1}}=\frac{0,3072^3}{2^2}=0,0072$$

- Para $m=2: \; g_2(n)=\sum_{i=0}^{3} f_2(i)\,.\,g_1(n-i) \qquad f_i(n)=\frac{\rho_i^n}{2^{n-1}} \quad i=1,2$

$f_2(0)=1 \qquad\qquad f_2(1)=\frac{\rho_2}{2^{1-1}}=\rho_2=0,2543$

$f_2(2)=\frac{\rho_2^2}{2^{2-1}}=\frac{\rho_2^2}{2}=\frac{0,2543^2}{2}=0,0323 \qquad\qquad f_2(3)=\frac{\rho_2^3}{2^{3-1}}=\frac{\rho_2^3}{2^2}=\frac{0,2543^3}{4}=0,0041$

$$n=0: \; g_2(0)=f_2(0)=1$$

$$n=1: \; g_2(1)=\sum_{i=0}^{1} f_2(i)\,.\,g_1(1-i)=f_2(0)\,.\,g_1(1)+f_2(1)\,.\,g_1(0)=$$
$$=1\,.\,0,3072+0,2543\,.\,1=0,5615$$

$$n=2: \; g_2(2)=\sum_{i=0}^{2} f_2(i)\,.\,g_1(2-i)=f_2(0)\,.\,g_1(2)+f_2(1)\,.\,g_1(1)+f_2(2)\,.\,g_1(0)=$$
$$=1\,.\,0,0472+0,2543\,.\,0,3072+0,0323\,.\,1=0,1576$$

$$n=3: \; g_2(3)=\sum_{i=0}^{3} f_2(i)\,.\,g_1(3-i)=f_2(0)\,.\,g_1(3)+f_2(1)\,.\,g_1(2)+f_2(2)\,.\,g_1(1)+f_2(3)\,.\,g_1(0)=$$
$$=1\,.\,0,0072+0,2543\,.\,0,0472+0,0323\,.\,0,3072+0,0041\,.\,1=0,0332$$

- Para $m=3: \; g_3(n)=\sum_{i=0}^{n} f_3(i)\,.\,g_2(n-i) \qquad f_i(n)=\rho_i^n$

$f_3(0)=1 \qquad\qquad f_3(1)=\rho_3=0,1$

$f_3(2)=\rho_3^2=0,1^2=0,01 \qquad\qquad f_3(3)=\rho_3^3=0,1^3=0,001$

$$n=0: \; g_3(0)=f_3(0)=1$$

$$n=1: \; g_3(1)=\sum_{i=0}^{1} f_3(i)\,.\,g_2(1-i)=f_3(0)\,.\,g_2(1)+f_3(1)\,.\,g_2(0)=$$
$$=1\,.\,0,5615+0,1\,.\,1=0,6615$$

$$n=2: \ g_3(2)=\sum_{i=0}^{2} f_3(i) \,.\, g_2(2-i)=f_3(0)\,.\,g_2(2)+f_3(1)\,.\,g_2(1)+f_3(2)\,.\,g_2(0)=$$

$$=1\,.\,0{,}1576+0{,}1\,.\,0{,}5615+0{,}01\,.\,1=0{,}2238$$

$$n=3: \ g_3(3)=\sum_{i=0}^{3} f_3(i) \,.\, g_2(3-i)=f_3(0)\,.\,g_2(3)+f_3(1)\,.\,g_2(2)+f_3(2)\,.\,g_2(1)+f_3(3)\,.\,g_2(0)=$$

$$=1\,.\,0{,}0332+0{,}1\,.\,0{,}1576+0{,}01\,.\,0{,}5615+0{,}001\,.\,1=0{,}0556$$

- Para $m=4: \ g_4(n)=\sum_{i=0}^{n} f_4(i)\,.\,g_3(n-i) \qquad f_i(n)=\rho_i^n$

$f_4(0)=1 \qquad\qquad f_4(1)=\rho_4=0{,}0769$

$f_4(2)=\rho_4^2=0{,}0769^2=0{,}0059 \qquad\qquad f_4(3)=\rho_4^3=0{,}0769^3=0{,}0005$

$n=0: \ g_4(0)=f_4(0)=1$

$$n=1: \ g_4(1)=\sum_{i=0}^{1} f_4(i)\,.\,g_3(1-i)=f_4(0)\,.\,g_3(1)+f_4(1)\,.\,g_3(0)=$$

$$=1\,.\,0{,}6615+0{,}0769\,.\,1=0{,}7384$$

$$n=2: \ g_4(2)=\sum_{i=0}^{2} f_4(i)\,.\,g_3(2-i)=f_4(0)\,.\,g_3(2)+f_4(1)\,.\,g_3(1)+f_4(2)\,.\,g_3(0)=$$

$$=1\,.\,0{,}2238+0{,}0769\,.\,0{,}6615+0{,}0059\,.\,1=0{,}2806$$

$$n=3: \ g_4(3)=\sum_{i=0}^{3} f_4(i)\,.\,g_3(3-i)=f_4(0)\,.\,g_3(3)+f_4(1)\,.\,g_3(2)+f_4(2)\,.\,g_3(1)+f_4(3)\,.\,g_3(0)=$$

$$=1\,.\,0{,}0556+0{,}0769\,.\,0{,}2238+0{,}0059\,.\,0{,}6615+0{,}0005\,.\,1=0{,}0772$$

- Probabilidades marginales relativas el nodo (servidor) cuarto:

$$p_m(n_k)=p_{\bullet\bullet\bullet n_k}=\frac{f_4(n_k)\,.\,g_3\,(N-n_k)}{g_4(N)} \qquad n_k=0,1,2,3 \qquad m=1,2,3,4$$

$$n_k=0: \ p_4(0)=p_{\bullet\bullet\bullet 0}=\frac{f_4(0)\,.\,g_3\,(3)}{g_4(3)}=\frac{1\,.\,0{,}0556}{0{,}0772}=0{,}7202$$

$$n_k=1: \ p_4(1)=p_{\bullet\bullet\bullet 1}=\frac{f_4(1)\,.\,g_3\,(2)}{g_4(3)}=\frac{0{,}0769\,.\,0{,}2238}{0{,}0772}=0{,}2229$$

$$n_k=2: \ p_4(2)=p_{\bullet\bullet\bullet 2}=\frac{f_4(2)\,.\,g_3\,(1)}{g_4(3)}=\frac{0{,}0059\,.\,0{,}6615}{0{,}0772}=0{,}0506$$

$$n_k = 3: \; p_4(3) = p_{\bullet\bullet\bullet 3} = \frac{f_4(3)\,.\,g_3(0)}{g_4(3)} = \frac{0,0005\,.\,1}{0,0772} = 0,0064$$

- $P(\text{algún proceso en el servidor 4}) = 1 - p_4(0) = 1 - p_{\bullet\bullet\bullet 0} = 1 - 0,7202 = 0,2798$

b) Número medio de procesos (clientes) en el cuarto servidor:

$$L_4 = \sum_{i=1}^{n} i\,.\,p_4(i) = \sum_{i=1}^{3} i\,.\,p_{\bullet\bullet\bullet i} = 1\,.\,p_{\bullet\bullet\bullet 1} + 2\,.\,p_{\bullet\bullet\bullet 2} + 3\,.\,p_{\bullet\bullet\bullet 3} =$$

$$= 1\,.\,0,2229 + 2\,.\,0,0506 + 3\,.\,0,0064 = 0,3433$$

c) Tiempo medio de permanencia de un proceso en un nodo: $W_m = \dfrac{L_m}{\overline{\Lambda}_m}$

Considerando la condición de que el número medio de clientes que entran al nodo Λ_4 tiene que ser igual al número medio de clientes que salen servidos de dicho nodo.

$$\overline{\Lambda}_4 = \mu_4\,.\sum_{i=1}^{n} p_4(i) = 15\,.\,(0,2229 + 0,0506 + 0,0064) = 4,1985$$

$$\overline{\Lambda}_4 = c\,.\,\Lambda_4 \quad \rightarrow \quad 4,1985 = c\,.\,1,1537 \quad \rightarrow \quad c = \frac{4,1985}{1,1537} = 3,6391$$

de donde,

$$\overline{\Lambda}_1 = c\,.\,\Lambda_1 \quad \rightarrow \quad \overline{\Lambda}_1 = 3,6391\,.\,1,5363 = 5,5907$$

$$\overline{\Lambda}_2 = c\,.\,\Lambda_2 \quad \rightarrow \quad \overline{\Lambda}_2 = 3,6391\,.\,1,2716 = 4,6274$$

$$\overline{\Lambda}_3 = c\,.\,\Lambda_3 \quad \rightarrow \quad \overline{\Lambda}_3 = 3,6391\,.\,1 = 3,6391$$

Finalmente, el tiempo medio de permanencia de un proceso en el nodo 4 es:

$$W_4 = \frac{L_4}{\overline{\Lambda}_4} = \frac{0,3433}{4,1985} = 0,0817 \text{ minutos } = 4,90 \text{ segundos}$$